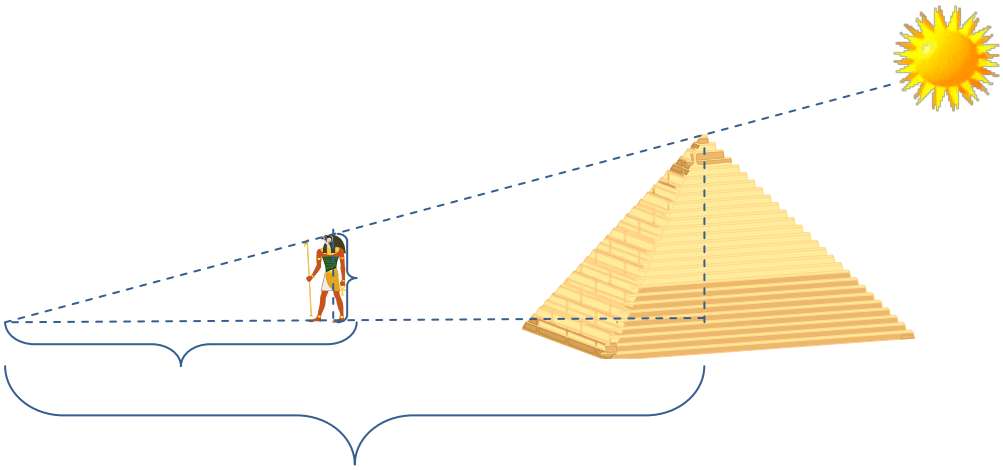
על שטחים ומשפטים

שטחים ועוד – יחידה 4



על שטחים ומשפטים

תוכן עניינים

הקדמה 4

הנושאים המרכזיים 4

מהלך הפעילות 4

רקע 5

משפט תלס והרחבותיו 9

סדנה 1: הוכחות משפטים בעזרת שטחים 11

הנחיות למדריך והצעה לפתרונות 13

סדנה 2: נקודות מיוחדות במשולש 17

הנחיות למדריך והצעה לפתרונות 21

סדנה 3: חלוקות במשולש 31

הנחיות למדריך והצעה לפתרונות 33

מקורות 37

רשימת קישורים 38

מקורות נוספים 39

הקדמה

היחידה עוסקת בהוכחה של משפטים ידועים בעזרת שטחים. ביחידה דוגמאות של משפטים ידועים ובעיות גיאומטריות הקשורות לחלוקת שטחים. השימוש בשטח בדוגמאות המוצגות מפשט את ההוכחה ועל ידי כך נותן לתלמיד כלים להתמודדות מוקדמת יותר עם חלק מהמשפטים. בנוסף, הוא מהווה דוגמא לפתרון אלגנטי (המציג יופי מתמטי) ועשוי לתרום להרחבת דרכי הפתרון לבעיה נתונה (פיתוח יצירתיות).

למרות שהמשפטים לא נכללים בתוכנית הלימודים לחטיבת הביניים, היחידה מזמנת למורים פעילות עם מתמטיקה מאתגרת ומהנה.

הנושאים המרכזיים

- שימוש בשטח ככלי להוכחה
- בעיות חקר
- בעיות עם דרכי פתרון רבות

מהלך הפעילות

יחידה זו מחולקת לשלוש סדנאות:

בסדנה 1: נוכיח את משפט תלס ומשפט חוצי הזווית.

בסדנה 2: נתנסה בהוכחות הקשורות לנקודות מיוחדות במשולש.

בסדנה 3: בסדנא זו נתנסה בחלוקת משולש למשולשים שווי שטח.

רקע

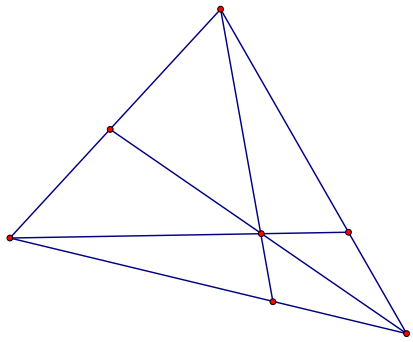
כפי שראינו ביחידות קודמות מושג השטח מקושר למושגים רבים במתמטיקה מאפשר לטפל בנושאים כלליים כגון: בניית הוכחה, סוגי הוכחות, מערכת אקסיומות, יחס שקילות ועוד. בניית הקשרים מתמטיים הוא בין העקרונות הבסיסים בחינוך המתמטי עלפי הסטנדרטים של ה- **N**ational **C**ouncil **T**eachers of **M**athematics (NCTM, 2000). עיסוק זה בקשרים בין תחומים במתמטיקה תורם לפיתוח ההבנה המתמטית ומאפשר להציג את המתמטיקה כמדע מקושר ולא כאוסף של נושאים בודדים (לייקין, 2006). קשרים בין משפטים שונים (תכונות שונות) הקשורים לאותו מושג הוא אחד הקשרים המוצגים בסטנדרטים של NCTM (2000) כקשרים המאפשרים פתרון בעיות בדרכים שונות. בהתאם לכך, השימוש בשטח ככלי להוכחה עשוי להדגים את קישוריות המושג תוך כדי פתרון בעיות בדרכים שונות (לייקין, 2006). חלק מהמשפטים המופיעים ביחידה זו נלמדים בהקבצות א' ו- ב' בכיתה ט' בהרחבות לתלמידים מתקדמים (כגון: משפט חוצה הזווית, יחס חלוקת תיכונים, משפט צ'בה).

משפט פיתגורס הוא אחד המשפטים הראשונים בהם מודגם השימוש בשטח ככלי להוכחה. למשפט **הוכחות רבות**, ורובן מרוכזות באתר **CUT-THE-KNOT**. בנוסף תוכלו לצפות ב**הוכחה דינאמית** באתר המצורף. מגוון ההוכחות הקיימות למשפט זה, מציגים הקשרים בין מושגים מתמטיים, ומשפטים מתחומים שונים העוזרים לתלמיד לפתור בעיות בדרכים שונות, תוך בחירת הדרך הנוחה והברורה לו. עושר ההוכחות והרקע ההיסטורי המלווה את המשפט, עשוי להיות בסיס טוב לפעילות חקר בנושא. בשל ההיקף הגדול של החומר הקשור למשפט פיתגורס ומתוך רצון להדגים שימושים קצת פחות מוכרים בשטחים בהוכחות של משפטים אחרים, נסתפק בשלב זה בהצגת ההוכחה הדינאמית של משפט פיתגורס ובהפניה למקורות מתאימים.

ביחידה זו נעסוק במשפט צ'בה ובמשפט תאלס והרחבותיו למרות ששני משפטים אלה אינם מופיעים בתוכנית הלימודים של חטיבת הביניים (מומלצים להרחבה לתלמידים מתקדמים).

בחרנו לעסוק בשני המשפטים כי הפעולות מיועדות למורים וחשוב שגם הם יתנסו בפעילות חדשה ומעניינת.

משפט צ'בה פחות ידוע בקרב מורים ותלמידים היות וכמעט ואינו מוזכר בספרי לימוד העוסקים בגיאומטריה. המשפט טוען כי שלושת הקטעים המחברים את קודקודי המשולש עם נקודות על הצלעות מולם, יפגשו בנקודה אחת אם ורק אם המכפלה של שלושת היחסים בין אורכי שני הקטעים שנוצרו על כל צלע שווה ל- 1.



$$\frac{AF}{FC}\times\frac{EC}{EB}\times\frac{BD}{DA}=1$$

צ'בה (Cava Giovanni) היה מתמטיקאי איטלקי, בין השנים 1647-1734. הוא פרסם את המשפט בשנת 1678. משפט זה הטומן בחובו את שני כיווני הקשר משמש ככלי להוכחת מפגש קטעים היוצאים מקודקודי המשולש. למשפט הרחבות והוכחות רבות שאחת מהן מבוססת על יחסי שטחים. בתוכנית הלימודים מובא המשפט לתלמידים מתקדמים בלבד. כמשפט שניתן להציגו דרך פעילות חקר ותוך שימוש בתוכנה גיאומטרית דינאמית. להרחבה וקריאה נוספת **על משפט צי'בה** ראו באתר **CUT-THE-KNOT**.

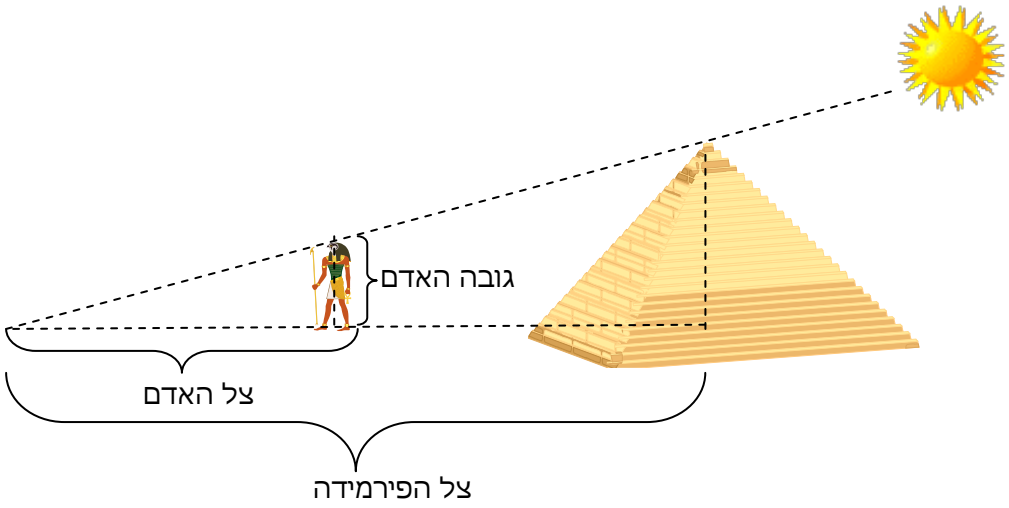
בעזרת המשפט אפשר לבחון תכונות של נקודות מיוחדות וידועות במשולש כגון: נקודות מפגש תיכונים, גבהים, חוצי זוויות. בנוסף, מזמן המשפט היכרות עם נקודות מיוחדות נוספות שאחת מהן היא נקודת Gergonne. נקודה זו היא נקודת המפגש של הקטעים המחברים את קודקודי המשולש עם נקודות ההשקה של המעגל החסום בו והיא נקראת על שמו של המתמטיקאי הצרפתי ג'וזף ג'רגון (Joseph-Dias Gergonne) שגילה אותה. ג'רגון (1771 - 1859) התפרסם בין השאר כמי שיזם בשנת 1810 את הירחון הראשון במתמטיקה. הירחון הופיע עד 1832 ובמהלך שנים אלה פירסם ג'רגון קרוב ל- 200 פרסומים שהתרכזו בעיקר בגיאומטריה. משפט Gergonne עצמו שכמעט ואינו ידוע מובא בסדנה 2 כדוגמה למשפטים אותם ניתן להוכיח בעזרת שימוש בשטחים.

משפט מפורסם קצת יותר הנלמד בחטיבה העליונה בנושא דמיון הוא משפט תלס על הרחבותיו (ראו בהמשך). תלס חי בעיר מילאטוס שבאסיה הקטנה בשנים 550 - 640 לפני הספירה. בצעירותו עסק תלס במסחר. לרגל עסקיו ביקר תלס במצרים ושם למד גיאומטריה ואסטרונומיה מחכמי מצרים. לאחר שפרש מחיי המסחר התמסר למתמטיקה ואסטרונומיה והעמיק את התורות שלמד בצעירותו. בשונה מהמצרים והבבלים שדנו בדוגמאות מספריות וחישובים מקורבים, תלס התייחס לצורך במתן נימוקים לוגיים להצדקת טענות גיאומטריות (משפטים). תרומתו למתמטיקה באה לידי ביטוי בניסוח משפטים כלליים. לתלס מיוחסים שישה משפטים בנושא בגיאומטריה:

1. הקוטר מחלק את העיגול לשני חלקים חופפים (ייתכן שהמצרים ידעו על החלוקה אך תלס היה הראשון להוכיח את נכונות החלוקה).
2. זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות.
3. שני ישרים החותכים זה את זה יוצרים זוויות קודקודיות שוות.
4. שני משולשים השווים בשתי זוויות ובצלע, חופפים.
5. כל זווית היקפית הנשענת על קוטר מעגל היא זווית ישרה.
6. שני ישרים מקבילים מקצים קטעים פרופורציוניים על שוקי זווית (ידוע בספרי הלימוד כמשפט תלס).

בספרי הלימוד המשפט השישי ידוע כמשפט תלס בעוד שבמקורות ההיסטוריים המשפט הנושא את שמו של תלס הוא המשפט על גודלה של הזווית ההיקפית הנשענת על הקוטר.

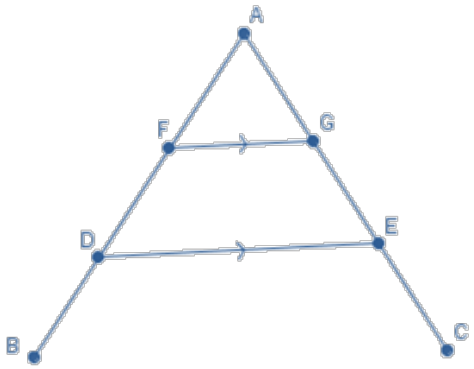
תלס ניצל את המשפט השישי על מנת לקבוע את גובה הפירמידה של המלך חופו (שנודע בכינויו היווני חיאופס). לצורך כך, ביקש להעמיד ליד הפירמידה אדם ולסמן את גובהו בחול. כאשר צילו של אותו אדם הגיע למידת גובהו המסומן בחול, מדד את צל הפירמידה (הנמדד ממרכז הפירמידה) וקבע כי אורך צל הפירמידה שווה לגובהה (ראה איור).



משפט תלס והרחבותיו

משפט תלס

שני ישרים מקבילים מקצים קטעים פרופורציוניים על שוקי זווית

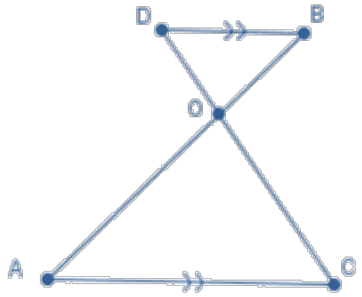


אם $FG \parallel DE$

אז $\frac{AF}{FD} = \frac{AG}{GE}$

משפט תלס- הרחבה א'

שני ישרים מקבילים מקצים קטעים פרופורציוניים על המשכי שוקי זווית

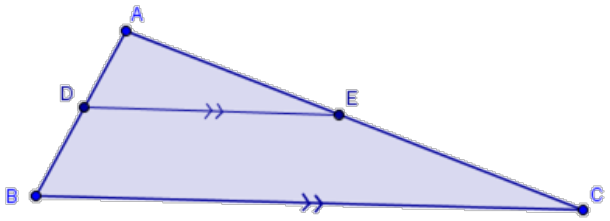


אם $DB \parallel AC$

אז $\frac{DO}{CO} = \frac{BO}{OA}$

משפט תלס הרחבה ב'

ישר החותך שתיים מצלעות המשולש ומקביל לצלע השלישית, חותך ממנו משולש שצלעותיו פרופורציוניות לצלעות המשולש הנתון.



אם $DE \parallel BC$

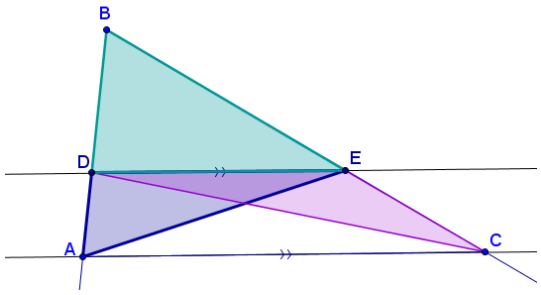
אז $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

סדנה 1: הוכחות משפטים בעזרת שטחים

1. משפט תלס

שני ישרים מקבילים מקצים קטעים פרופורציוניים על שוקי זווית

א. הוכיחו בעזרת שטחים



נתון: $DE \parallel AC$

הוכח: $\frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC}$

הדרכה:

מצא את היחס של שטחי המשולשים: ΔBDE , ΔADE , ΔDEC

ב. הוכיחו בעזרת **מידה משותפת**

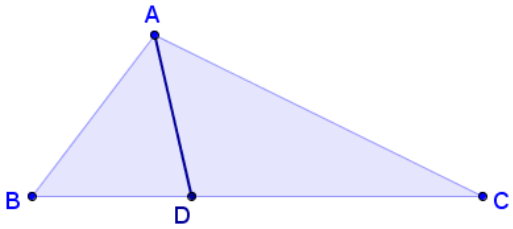
הגדרה- מידה משותפת

אם הקטע AB מכיל את הקטע $m\ CD$ פעמיים שלמות, ואם הקטע EF מכיל את הקטע $n\ CD$ פעמיים שלמות, הקטע CD נקרא מידה משותפת של הקטעים AB ו- CD. בהנחה כי לשני הקטעים BD ו- AD יש מידה משותפת (אם כי המשפט נכון גם לקטעים שאין להם מידה משותפת.

היחס בין הקטעים AB ו- EF מוגדר כ- $\frac{m}{n}$.

2. משפט חוצה הזווית

חוצה הזווית מחלק את הצלע שמול הזווית אותה הוא חוצה לשני קטעים המתייחסים זה לזה כיחס הצלעות הכולאות את הזווית.



א. הוכיחו בעזרת שטחים

נתון: AD חוצה $BAC\angle$

צ"ל: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

הדרכה: השתמשו בשטח ובתכונת חוצה הזווית כמקום גיאומטרי.

ב. הוכיחו בדרך נוספת

הדרכה:

האריכו את AB מהצד של A עד לנקודה E כך שמתקיים: $AE = AC$.

הנחיות למדריך והצעה לפתרונות

דרכי הפעלה: עבודה יחידנית

שאלות מנחות לדיון:

1. מצאו, אם אפשר, הוכחות נוספות למשפטים האלו.
2. מה דעתכם על ההוכחות השונות? התייחסו לנקודות הבאות: למי הן מיועדות? איזה ידע קודם נדרש מהתלמיד? איזו הוכחה אהבתם? איזו הוכחה לדעתכם פשוטה ואלגנטית? האם תבחרו להציג רק הוכחה אחת לתלמיד? אם כן איזו ולמה?

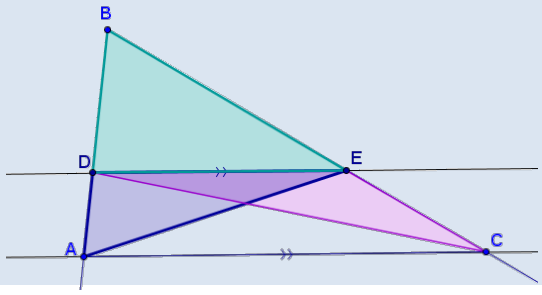
1. משפט תלס

שני ישרים מקבילים מקצים קטעים פרופורציוניים על שוקי זווית

א. הוכיחו בעזרת שטחים

$DE \parallel AC$

הוכח: $\frac{BD}{AD}=\frac{BE}{EC}$



הוכחה:

1. בניית עזר: נוריד גובה DF

$$\frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta DEC}}=\frac{BE}{EC}$$

2. בניית עזר: נוריד גובה EH

$$\frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta DEA}}=\frac{BD}{DA}$$

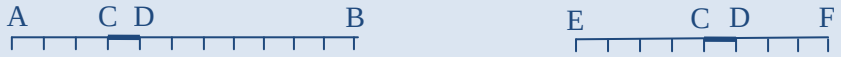
3. $S_{\Delta DEC}=S_{\Delta DEA}$ כי יש להם בסיס משותף והגובה לבסיס זה שווה (מרחק בין ישרים מקבילים).

4. מכאן נקבל: $\frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta DEC}}=\frac{BE}{EC}=\frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta DEA}}=\frac{BD}{DA}$.

ב. הוכיחו בעזרת **מידה משותפת**

הגדרה- מידה משותפת

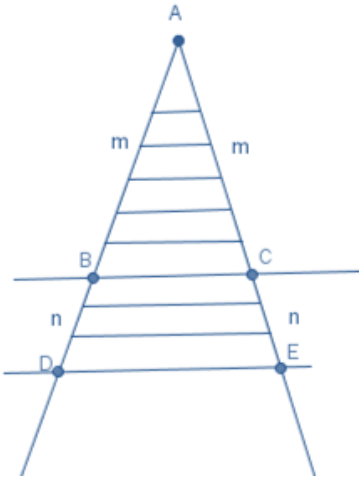
אם הקטע AB מכיל את הקטע CD m פעמיים שלמות, ואם הקטע EF מכיל את הקטע CD n פעמיים שלמות, הקטע CD נקרא מידה משותפת של הקטעים AB ו- CD. בהנחה כי לשני הקטעים BD ו- AD יש מידה משותפת (אם כי המשפט נכון גם לקטעים שאין להם מידה משותפת.



היחס בין הקטעים AB ו- EF מוגדר כ- $\frac{m}{n}$.

התבוננו בהוכחה הבאה. הוכחה זו מצויה ברוב ספרי הלימוד בגיאומטריה לחטיבה העליונה ועושה שימוש במונח מידה משותפת.

הוכחה:



בהנחה, שלקטעים AB ו- BD יש מידה משותפת, נקצה אותה על הקטע AB ועל הקטע AB מכיל את המידה המשותפת m פעמים, והקטע BD מכיל את אותה המידה n פעמים.

נעביר דרך נקודות החלוקה קווים מקבילים לישרים BC ו- DE קווים מקבילים אלה מחלקים את הקטע AC ל- m חלקים שווים ואת הקטע CE לאותם n חלקים שווים (כל הקטעים הם קטעי אמצעים של טרפז פרט לעליון שהוא קטע אמצעים במשולש).

כלומר: $\frac{AB}{BD}=\frac{m}{n}$ (לפי הגדרת היחס בין שני קטעים) ובאותו אופן נקבל $\frac{AC}{CE}=\frac{m}{n}$.

ולכן: $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$

הערה: המשפט נכון גם עבור קטעים שאינם בעלי מידה משותפת.

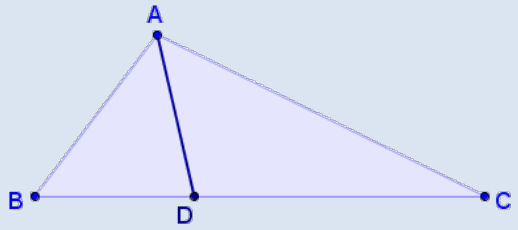
2. משפט חוצה הזווית

חוצה הזווית מחלק את הצלע שמול הזווית אותה הוא חוצה לשני קטעים המתייחסים זה לזה כיחס הצלעות הכולאות את הזווית.

א. הוכיחו בעזרת שטחים

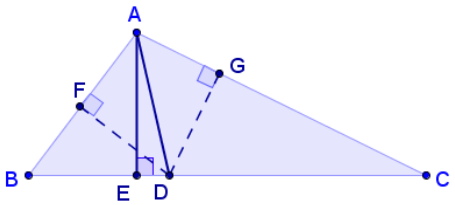
נתון: AD חוצה $BAC\angle$

צ"ל: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$



הדרכה: השתמשו בשטח ובתכונת חוצה הזווית כמקום גיאומטרי.

1. נשתמש בעובדה שהיחס בין קטעים BD ו- DC שווה ליחס שטחי המשולשים ΔABD ו- ΔADC כי לשני המשולשים אותו גובה. כלומר $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{BD}{DC}$.



2. מנקודה D הורדנו גבהים במשולשים ABD ו- ADC. נשתמש במשפט לפיו כל נקודה הנמצאת על חוצה הזווית נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית ונקבל: $DG = FD$.

3. ומכאן נקבל: $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{AB}{AC}$.

4. מסעיפים 1 ו- 3 נקבל $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

ב. הוכיחו בדרך נוספת.

הדרכה:

האריכו את AB מהצד של A עד לנקודה E כך שמתקיים: $AE = AC$.

על-פי ההדרכה נקבל ΔAEC משולש שווה שוקיים, ונוכל להסיק $AD \parallel EC$.

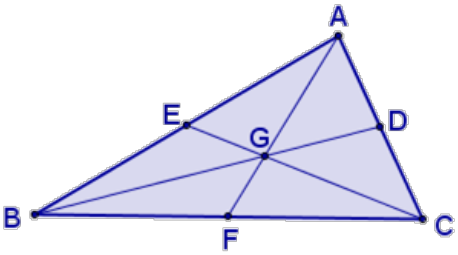
נשתמש במשפט תלס להוכחת המשפט.

סדנה 2: נקודות מיוחדות במשולש

1. יחס חלוקת תיכונים

כל שני תיכונים במשולש מחלקים זה את זה לשני קטעים כך שהקטע הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהקטע הקרוב לצלע.

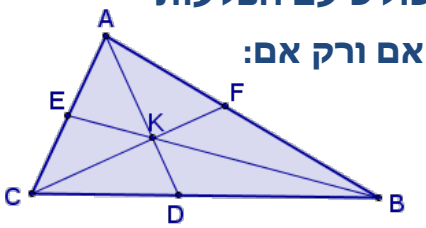
הדרכה: השתמשו בכך ששלושת התיכונים נפגשים בנקודה אחת (הנקודה G בשרטוט) ומצאו את הקשר בין ששת המשולשים שמתקבלים.



2. משפט צ'בה (1648-1738)

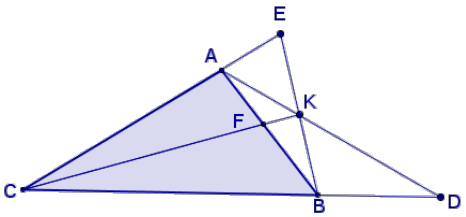
שלושת הקטעים המחברים את קודקודי המשולש עם הצלעות שמולן (AD, BE ו- CF) נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$



הערות:

1. שימו לב לסדר הכתיבה, מתחילים מאחד הקודקודים ונעים עם כיוון השעון (או נגד כיוון השעון). במונה רושמים את הקטע הראשון ובמכנה את הקטע השני השייך לאותו צלע ממשיכים באותו כיוון ורושמים את הקטע הבא במונה וחוזר חלילה.
2. נהוג לכנות בשם צ'ביאנים ישרים במשולש המחברים את קודקוד המשולש עם נקודה על צלעות הנגדיות (נקודות אלה עשויות להימצא על המשך הצלעות המתאימות).
3. המשפט תקף גם למקרים בהם הנקודות נמצאות על המשך הצלעות המתאימות ונקודת החיתוך נמצאת מחוץ למשולש, ראו שרטוט:



שימו לב: במשפט "אם ורק אם" קיימת דרישה להוכחה של שני כיווני הקשר.

א. נסחו במילים ובכתיב אלגברי את שני כיווני הקשר והוכיחו אותם.

הדרכה לכיוון 1:

1. הסבר מדוע $\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{BD}{CD}$

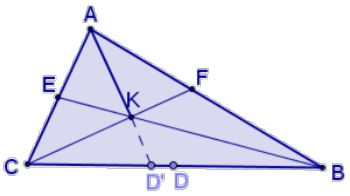
2. הסבר מדוע $\frac{S_{\Delta BKD}}{S_{\Delta CKD}} = \frac{BD}{CD}$

3. השתמש בתכונות הפרופורציה והוכח ש- $\frac{S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta AKC}} = \frac{BD}{CD}$

4. באופן דומה מצאו את שאר היחסים המבוקשים והשלימו את ההוכחה.

הדרכה לכיוון 2:

ההוכחה תתבצע בדרך השלילה. נניח שהקטעים CF ו- BE נפגשים בנקודה K. עלינו להראות כי AD עובר דרך K.



1. נאריך את AK עד למפגש עם הצלע BC. נסמן נקודה זו ב- D' (ראה איור). לפי ההנחה שלושת הישרים לא נחתכים בנקודה K ולכן נקודה D' שונה מהנקודה D.

לפי מה שהוכחת בסעיף קודם מתקיים: _____

2. לפי הנתון מתקיים: _____

3. מה ניתן להסיק על נקודה D ו- D'?

ב. בדקו את המשפט לציביאנים מיוחדים: תיכון, חוצה זווית, גובה.

ג. השתמשו בבניית העזר הבאה והוכיחו בדרך נוספת.

בניית עזר: העבירו מקביל דרך אחד מקודקודי המשולש והאריכו שני ציביאנים היוצאים משני הקודקודים האחרים עד למפגש עם הישר המקביל. מיצאו משולשים דומים והיעזרו ביחס השטחים שבניהם.

ד. העזרו ב- Geogebra ורשמו את שלבי הבניה לכל אחד מכיווני הקשר.

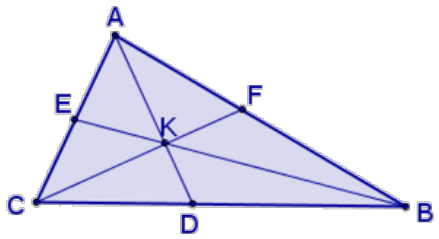
---

3. משפט Gergonne (1818)

אם שלושה קטעים (AD, BE ו- CF), המחברים את קודקודי המשולש (ΔABC) עם הצלעות שמולם נפגשים בנקודה אחת בתוך המשולש

אז: $\frac{KD}{AD}+\frac{KF}{CF}+\frac{EK}{BE}=1$.

הוכיחו את המשפט.



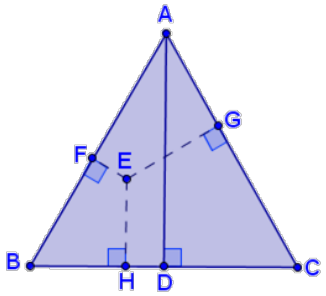
רמז: הבע את היחסים $\frac{KD}{AD},\frac{KF}{CF},\frac{EK}{BE}$ בעזרת שטחים.

---

4. נקודה פנימית במשולש שווה צלעות

סכום המרחקים של נקודה פנימית במשולש שווה צלעות, מצלעות המשולש שווה לגובה המשולש.

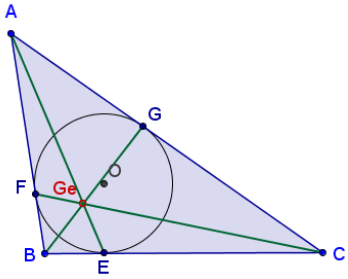
הוכיחו את המשפט.



---

5. נקודת Gergonne

הקטעים המחברים את קודקודי המשולש עם שלוש נקודות ההשקה של המעגל החסום במשולש, נפגשים בנקודה אחת.



א. היעזרו במשפט צי'בה והוכיחו את המשפט.

ב. באילו תנאים נקודת Gergonne ומרכז המעגל החסום מתלכדות? ניתן להיעזר **ביישומון**.

ג. באילו תנאים נקודת Gergonne ומרכז המעגל החסום נמצאות על הישר המחבר את נקודת Gergonne עם קודקוד המשולש?

מקורות נוספים: THE GERGONNE POINT

---

6. חיפוש אחר נקודות...

מצא עבור משולש ΔABC נקודה O כך ש: $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC}$

רמז: יש ארבע נקודות כאלה.

הנחיות למדריך והצעה לפתרונות

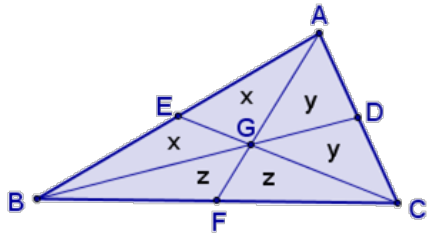
דרכי הפעלה: עבודת חקר בזוגות

שאלות מנחות לדיון:

1. מצאו דרכים נוספות להוכחת המשפטים.
2. איזה ידע נדרש מהתלמיד על מנת שיוכל להתמודד עם ההוכחות שהוצגו?
3. משפט צ'יבה מכיל את התנאי "אם ורק אם", כיצד הבנייה (במקרה שלנו בעזרת כלי טכנולוגי) של כל אחד מכיווני ההוכחה עשויה לתרום להבנה של התלמיד?

1. יחס חלוקת תיכונים

כל שני תיכונים במשולש מחלקים זה את זה לשני קטעים כך שהקטע הקרוב לקודקוד גדול פי 2 מהקטע הקרוב לצלע.



נתון: BD, AF, CE תיכונים במשולש ΔABC.

G נקודת מפגש התיכונים.

הוכח: $\frac{BG}{GD}=\frac{CG}{EG}=\frac{AG}{GF}=\frac{2}{1}$

הוכחה (עבור חלוקת BD):

נוכיח כי שלושת התיכונים מחלקים את המשולש לשישה משולשים שווי שטח.

תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווה שטח. בהתאם למשפט נסמן ב- x, y, z את השטחים של ששת המשולשים שהתקבלו מחיתוך התיכונים.

נתבונן בזוג המשולשים ΔABF ו- ΔAFC ובזוג המשולשים ΔABD ו- ΔDBC ונקבל את השוויונות הבאים:

$$\begin{cases} 2x+z=2y+z \\ 2x+y=2z+y \end{cases}$$

מהשוויונות הנ"ל נקבל: $x=y=z \quad (1)$

נתבונן במשולשים ΔAGD ו- ΔABD (ובגובה המשותף מנקודה A ל- BD) ומ- (1) נקבל: $\frac{S_{AGB}}{S_{\Delta AGD}}=\frac{BG}{GD}=\frac{2}{1}$.

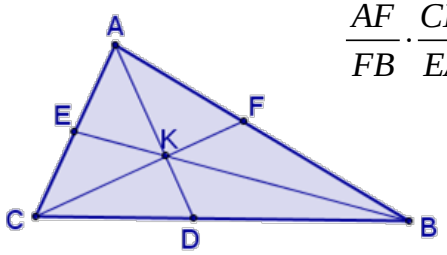
2. משפט צ'בה (1648-1738)

שלושת הקטעים המחברים את קודקודי המשולש עם הצלעות שמולן (AD, BE ו- CF) נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{BD}{DC}=1$

א. נסחו במילים ובכתיב אלגברי את שני כיווני הקשר והוכיחו אותם.

כיוון 1:

אם שלושת הקטעים המחברים את קודוקודי המשולש עם הצלעות שמולן נפגשים בנקודה אחת, אז מתקיים: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{BD}{DC}=1$



1. למשולשים ΔACD ו- ΔADB גובה משותף מקודקוד A, לכן

$$\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{BD}{CD}$$

2. למשולשים ΔBKD ו- ΔCKD גובה משותף מקודקוד K, לכן

$$\frac{S_{\Delta BKD}}{S_{\Delta CKD}}=\frac{BD}{CD}$$

3. לפי אחת מתכונות הפרופורציה אם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אז $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

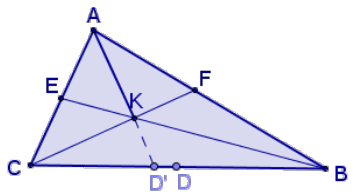
4. מ- (1) ו- (3) נקבל: $\frac{S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta AKC}}=\frac{BD}{CD}$

5. באופן דומה נוכיח כי $\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta BKC}}$, $\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\Delta BKC}}{S_{\Delta AKB}}$

6. מ- (4) ו- (5) נקבל: $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta AKC}}\cdot\frac{S_{\Delta BKC}}{S_{\Delta AKB}}\cdot\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta BKC}}=1$

כיוון 2:

אם שלושה קטעים המחברים את קודקודי המשולש עם הצלעות שמולן מחלקים את הצלעות כך שמתקיים: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{BD}{DC}=1$, אז שלושת הקטעים נפגשים בנקודה אחת.



הוכחה זו תתבצע בדרך השלילה.

נניח שהקטעים CF ו- BE נפגשים בנקודה K. עלינו להראות כי AD עובר דרך K.

1. נאריך את AK עד למפגש עם הצלע BC. נסמן נקודה זו ב- D' (ראה איור). נניח בשלילה כי שלושת הישרים לא נחתכים בנקודה K ולכן נקודה D' שונה מהנקודה D.

   ולכן מתקיים $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{BD'}{D'C}=1$.

2. לפי הנתון מתקיים: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{BD}{DC}=1$

3. מ- (1) ו- (2) נקבל: $\frac{BD}{DC}=\frac{BD'}{D'C}$

4. $\frac{BD}{DC}+1=\frac{BD'}{D'C}+1$

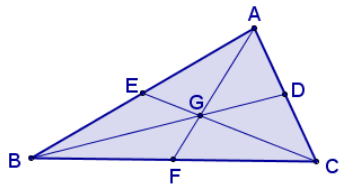
5. $\frac{BD+DC}{DC}=\frac{BD'+D'C}{D'C}$

6. $\frac{BC}{DC}=\frac{BC}{D'C}$

7. מ- (3) ו- (6) קיבלנו ש- $CD=CD'$ ולכן הנקודות D ו- D' מתלכדות.

ב. בדיקת המשפט לצי'ביאנים מיוחדים: תיכון, חוצה זווית, גובה.

תיכונים:



AF, BD, CE תיכונים ולכן: $\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}=1$

מסקנה: שלושת התיכונים נפגשים בנקודה אחת.

חוצי זוויות:

AF, BD, CE חוצי הזויות ולכן לפי משפט חוצי הזווית מתקיים:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}\quad,\quad\frac{AC}{AB}=\frac{FC}{BF}\quad,\quad\frac{BC}{AC}=\frac{BE}{AE}$$

נכפול את היחסים ונקבל:

$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{BC}{AC}=1$$

מסקנה: שלושת חוצי הזויות נפגשים בנקודה אחת.

גבהים: AF, BD, CE גבהים.

נקבל שלוש זוגות של משולשים דומים ומתוכם נסיק על יחסי הצלעות המתאימות:

$$\frac{AD}{BF}=\frac{DG}{FG}\qquad\Leftarrow\Delta ADG\ \square\ \Delta BFG$$

$$\frac{BE}{DC}=\frac{EG}{DG}\qquad\Leftarrow\Delta BEG\ \square\ \Delta CDG$$

$$\frac{FC}{AE}=\frac{FG}{EG}\qquad\Leftarrow\Delta CFG\ \square\ \Delta AEG$$

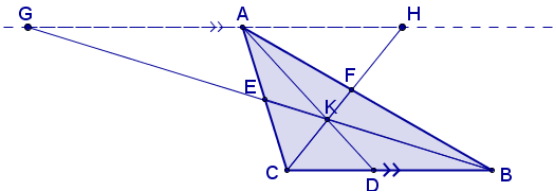
נכפול את היחסים ונקבל:

$$\frac{AD}{BF}\cdot\frac{BE}{DC}\cdot\frac{FC}{AE}=\frac{DG}{FG}\cdot\frac{EG}{DG}\cdot\frac{FG}{EG}=1$$

מסקנה: שלושת הגבהים נפגשים בנקודה אחת.

ג. השתמשו בבניית העזר הבאה והוכיחו בדרך נוספת.

בניית עזר: העבירו מקביל דרך אחד מקודקודי המשולש והאריכו שני ציביאנים היוצאים משני הקודקודים האחרים עד למפגש עם הישר המקביל. מיצאו משולשים דומים והיעזרו ביחס השטחים שבניהם.



בניית עזר: $BC \parallel GH$

1. $\frac{AF}{FB}=\frac{AH}{BC} \Leftarrow \Delta AFH \sim \Delta BFC$

2. $\frac{CE}{EA}=\frac{CB}{AG} \Leftarrow \Delta AGE \sim \Delta BCE$

3. $\frac{KD}{AK}=\frac{BD}{AG} \Leftarrow \Delta AGK \sim \Delta DBK$

4. $\frac{AK}{DK}=\frac{AH}{DC} \Leftarrow \Delta AHK \sim \Delta DCK$

5. $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{BD}{AG}\cdot\frac{AH}{DC}=\frac{AH}{BC}\cdot\frac{CB}{AG}\cdot\frac{KD}{AK}\cdot\frac{AK}{DK}$

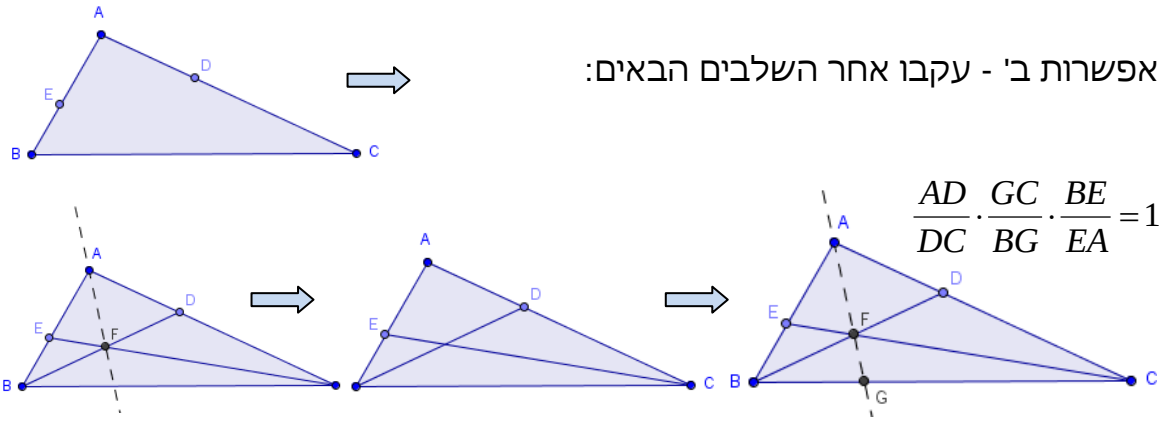
6. נצמצם את שני אגפי המשוואה (5) בביטוי: $\frac{AH}{AG}$ ונקבל: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$

ד. העזרו ב- Geogebra ורשמו את שלבי הבניה לכל אחד מכיווני הקשר

כיוון 1:

אפשרות א' - פיתחו את **היישומון (CHEAVA 1)** על מצב הצגה ועקבו אחר שלבי הבניה.

אפשרות ב' - עקבו אחר השלבים הבאים:

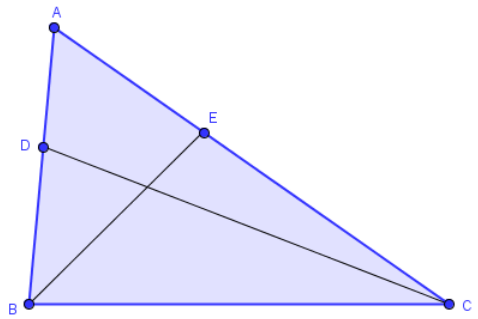


$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{GC}{BG}\cdot\frac{BE}{EA}=1$$

כיוון 2:

אפשרות א' - פיתחו את **היישומון (CHEAVA 2)**. על מצב הצגה ועיקבו אחר שלבי הבניה.

אפשרות ב' - עקבו אחר שלבים הבאים:



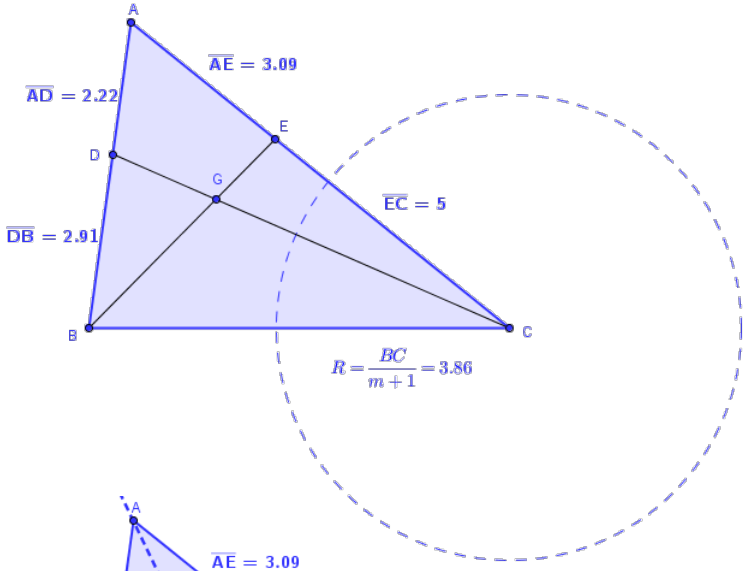
נתון: $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BD}{DA}\cdot\frac{CF}{FB}=1$

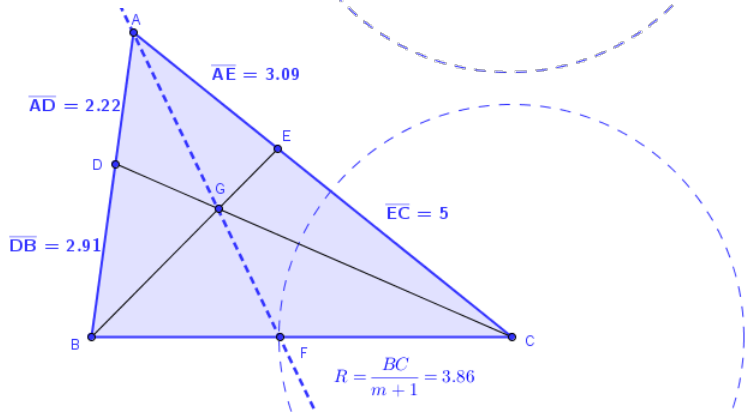
נסמן: $\frac{AE}{FB}\cdot\frac{BD}{DA}=m$

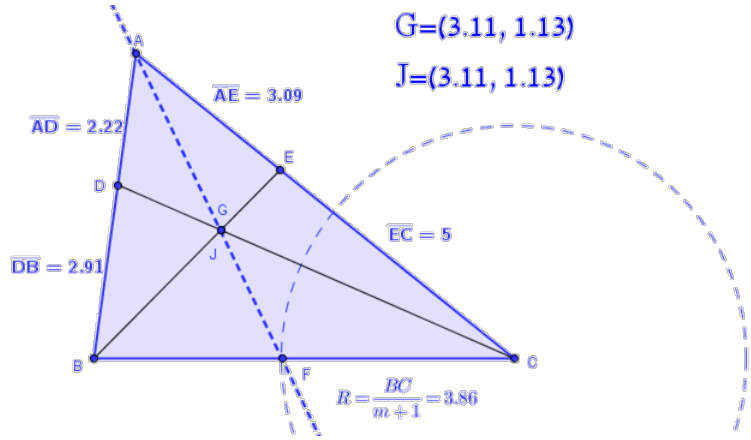
$$\frac{CF}{FB}=\frac{CF}{BC-CF}=\frac{1}{m}$$

$$CF=\frac{BC}{m+1}$$

נבנה מעגל שמרכזו C ורדיוסו CF







בעזרת הבניות השונות ניתן להמחיש את ההבדל שבין שני כיווני ההוכחה הנדרשים. בניה זו מדגימה את ההבדל שבין הוכחת קיום להוכחת התכונה כפי שעשינו בסעיף הראשון. מקובל לומר שמשפט קיום הוא משפט הטוען שקיים שעצם מתמטי מסוים קיים (רוקח ומובשוביץ-הדר, 2011). הוכחה של משפט קיום עשויה להיות קונסטרוקטיבית, כלומר – הוכחת הקיום של העצם המתמטי נעשית על ידי בנייתו בפועל, או הצבעה על עצם כזה (כמו למשל נוסחת הפתרון של המשוואה הריבועית).

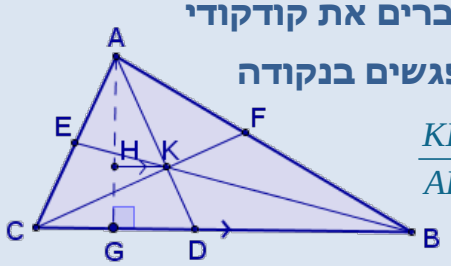
הערה: ניתן לבקש את המורים להרחיב את החקירה למצולעים נוספים. המשפט מתקיים גם במצולעים בעלי מספר אי זוגי של קודקודים.

לקריאה נוספת: **משפט צ'בה והרחבתו**, עטרה שריקי, קלרה זיסקין ואילנה לביא. *על"ה* 38, ע"מ 32-36 תשס"ז, 2007.

---

3. משפט Gergonne (1818)

אם שלושה קטעים (AD, BE ו- CF), המחברים את קודקודי המשולש (ΔABC) עם הצלעות שמולם נפגשים בנקודה אחת בתוך המשולש אז: $\frac{KD}{AD}+\frac{KF}{CF}+\frac{EK}{BK}=1$



הוכיחו את המשפט.

הוכחה:

1. מנקודה A נוריד גובה ל- BC. דרך K נעביר מקביל ל- BC החותך את AG בנק' H.
2. בעזרת הרחבה של משפט תלס נוכיח כי $\frac{AG}{HG}=\frac{AD}{KD}$
3. למשולשים ΔCKB ו- ΔABC צלע משותפת BC ולכן: $\frac{S_{\Delta CKB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{KD}{AD}$
4. באופן דומה נקבל: $\frac{EK}{BK}=\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta ABC}}$, $\frac{KF}{CF}=\frac{S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta ABC}}$
5. מ- 3 ו- 4 נקבל: $\frac{KD}{AD}+\frac{KF}{CF}+\frac{EK}{BK}=\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta AKB}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta AKC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}=1$

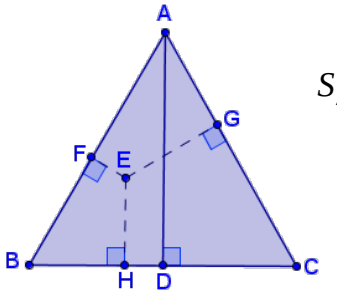
---

4. נקודה פנימית במשולש שווה צלעות

סכום המרחקים של נקודה הנמצאת בתוך משולש שווה צלעות שווה לגובה המשולש.

הוכיחו את המשפט.

פתרון:



1. $S_{\Delta AEB}=\frac{FE\cdot AB}{2}$,' $S_{\Delta AEC}=\frac{EG\cdot AC}{2}$, $S_{\Delta BEC}=\frac{HE\cdot BC}{2}$

2. שטח המשולש ΔABC שווה ל- $S_{\Delta ABC}=\frac{AD\cdot BC}{2}$

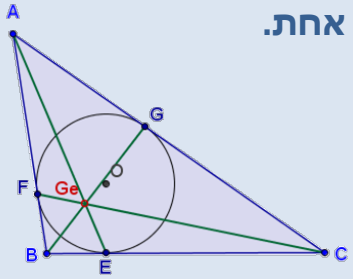
3. $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BEC}+S_{\Delta CEA}+S_{\Delta AEB}$

4. $BC=AC=AB$ ומכאן נקבל $AD=EH+EG+EF$

---

5. נקודת Gergonne

הקטעים המחברים את קודקודי המשולש עם שלוש נקודות ההשקה של המעגל החסום במשולש, נפגשים בנקודה אחת.



א. היעזרו במשפט צי'בה והוכיחו את המשפט.

1. צלעות המשולש ΔABC משיקות למעגל לכן, כל שני משיקים היוצאים מנקודה אחת שווים (מנקודת המוצא ועד לנקודת ההשקה) ומכאן ש:

$$AF=AG,\quad CG=CE,\quad BF=BE$$

2. מ- (1) נקבל:

$$CE\cdot BF\cdot AG=CG\cdot BE\cdot AF$$

קיבלנו ש: $\frac{CG}{BF}\cdot\frac{BE}{AG}\cdot\frac{AF}{EC}=1$ ולכן לפי משפט צי'בה הישרים המחברים את קודקודי המשולש עם נקודות ההשקה של המעגל החסום, נפגשים בנקודה אחת.

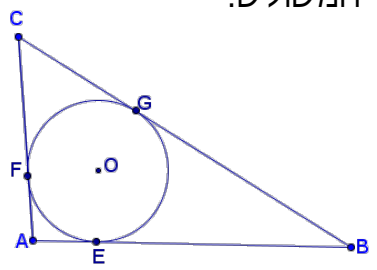
ב. באילו תנאים נקודת Gergonne ומרכז המעגל החסום מתלכדות? ניתן להיעזר **ביישומון**.

הנקודות מתלכדות כאשר המשולש הוא שווה צלעות. כאשר הנקודות מתלכדות כל אחד מקטעים המחברים את קודקוד המשולש עם נקודות ההשקה מתלכד עם חוצה הזווית, ולכן כל אחד מהקטעים משמש כגובה (הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה) וחוצה זווית ולכן מתקבל משולש שווה צלעות.

ג. באילו תנאים נקודת Gergonne ומרכז המעגל החסום נמצאות על הישר המחבר את נקודת Gergonne עם קודקוד המשולש?

מקורות נוספים: THE GERGONNE POINT

במשולש שווה שוקיים (כל שכן, משולש שווה צלעות) הגובה לבסיס וחוצה זווית הראש מתלכדים ולכן נקודת Gergonne ומרכז המעגל החסום במשולש ימצאו על הישר העובר דרך קודקוד המשולש.



הצעה לפעילות חלופית:

בנה ב- Geogebra משולש כלשהו. העבר את חוצי הזוויות, סמן את נקודות המפגש בין המעל למשולש ובנה את המעגל החסום במשולש (ראה שרטוט).

א. בנה יחד עם הצוות את נקודת Gergonne (העבר קטע אחר קטע).

ב. שאלות לדיון:

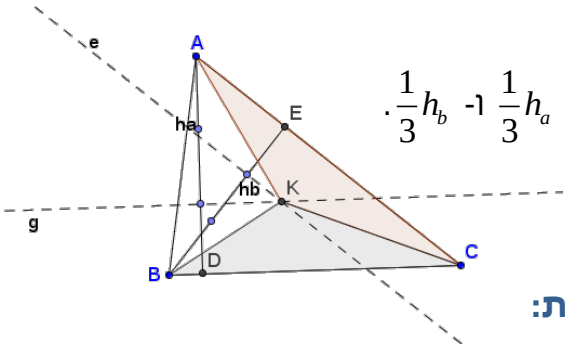
- האם נקודה זו קיימת בכל משולש? בידקו על משולשים נוספים.
- הוכיחו את טענתכם.

6. חיפוש אחר נקודות

מצא עבור משולש ΔABC נקודה O כך ש: $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC}$.

רמז: יש ארבע נקודות כאלה.

פתרון:



1. נקודת מפגש תיכונים.

2. נקודת המפגש של קווי הגובה $\frac{1}{3}h_a$ ו- $\frac{1}{3}h_b$.

שלבי מציאת הנקודה המבוקשת:

g – ישר המקביל ל- BC ועובר דרך נקודה הנמצאת על שליש הגובה היורד מקודקוד A (h_a).

e – ישר המקביל לצלע AC ועובר דרך נקודה הנמצאת על שליש הגובה היורד מקודקוד B (h_b).

k – מפגש הישרים e ו- f היא הנקודה המבוקשת.

הוכחה:

מהבניה נקבל:

1. $$S_{\Delta BKC} = \frac{\frac{1}{3}h_a \cdot BC}{2} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$$

2. $$S_{\Delta AKC} = \frac{\frac{1}{3}h_b \cdot AC}{2} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$$

ומכאן שהשטח של משולש ΔAKB חייב להיות שליש משטח המשולש ΔABC.

באופן דומה ניתן למצוא עוד שתי נקודות כאלה שהן נק' מפגש $\frac{1}{3}h_a$ ו- $\frac{1}{3}h_c$ ונק' מפגש $\frac{1}{3}h_b$ ו- $\frac{1}{3}h_c$).

הוכחה נוספת ניתן לראות באתר **MATHEMATICS EDUCATION**.

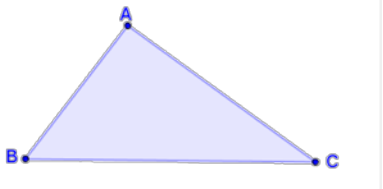
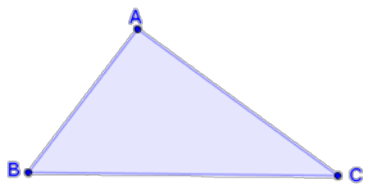
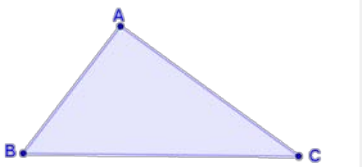
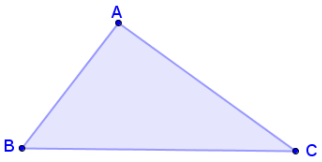
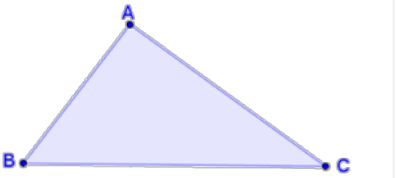
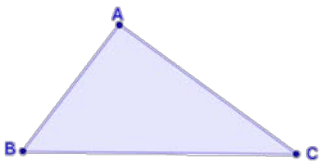
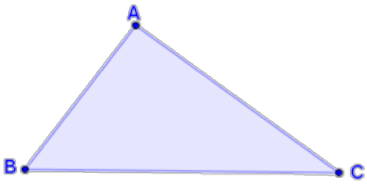
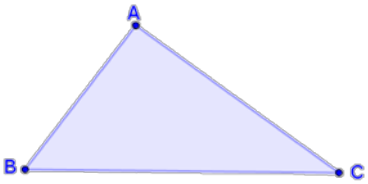
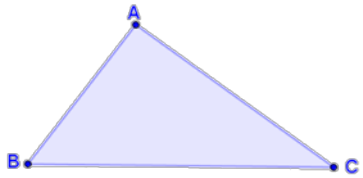
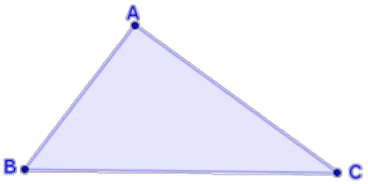
סדנה 3: חלוקות במשולש

1. חלוקת המשולש לארבעה שטחים שווים

א. חלקו את המשולש לארבעה שטחים שווים במספר דרכים רבות ככל האפשר.

ב. נסו למצוא שיטה לספירת האפשרויות.

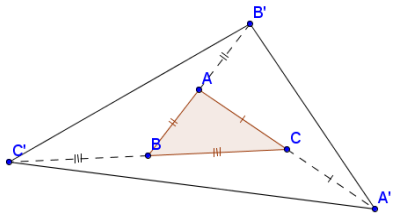
הערה: מספר החלוקות האפשריות גדול ממספר המשולשים בדף זה.

.1 	.2 
	
	
	
	

.2

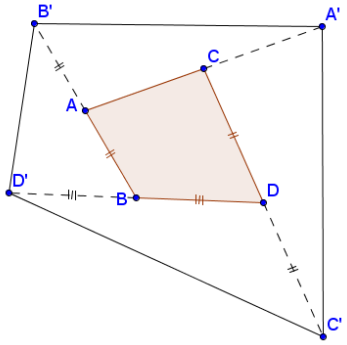
א. נתון משולש שהגדילו את צלעותיו פי שתיים.

מה היחס בין שטח המשולש החדש שהתקבל לשטח המשולש המקורי?



ב. נתון מרובע שהגדילו את צלעותיו פי שתיים.

מה היחס בין שטח המרובע החדש שהתקבל לשטח המרובע המקורי?



הנחיות למדריך והצעה לפתרונות

דרכי הפעלה: רצוי לפתוח בפעילות הראשונה שדנה בחלוקת משולש לארבע משולשים שווי שטח ואת פעילות שנייה לתת כפעילות נוספת.

שאלות מנחות לדיון:

מהן התרומות של פעילות זו?

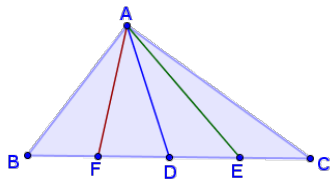
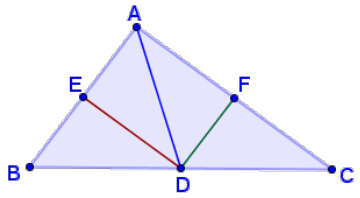
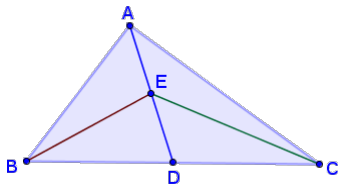
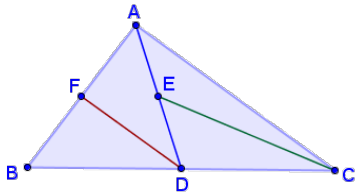
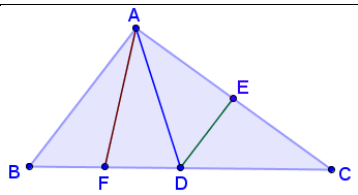
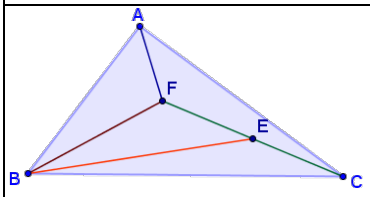
האם ניתן להביא נושא זה לידיעת התלמידים? אם כן, באיזה אופן? אם לא, מדוע?

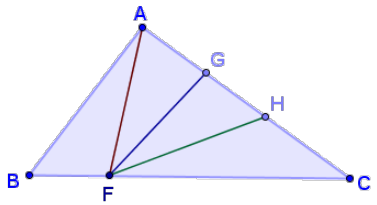
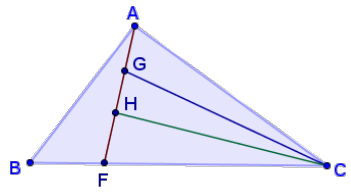
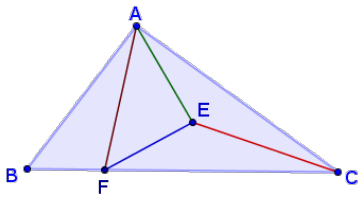
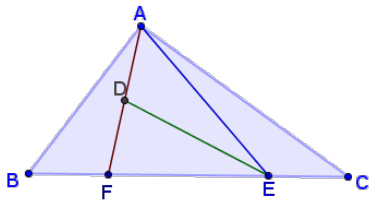
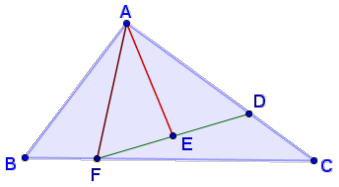
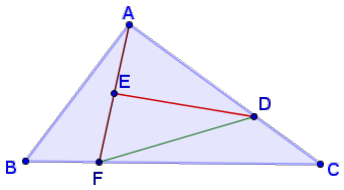
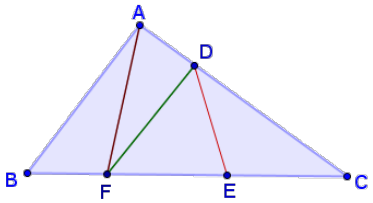
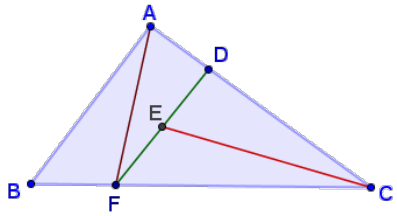
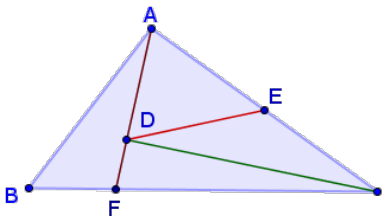
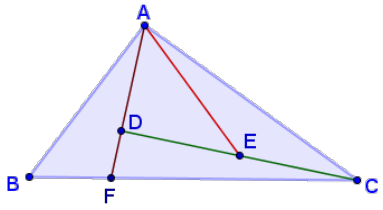
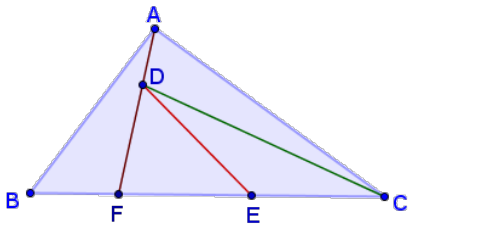
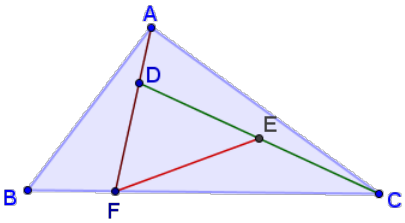
1. חלוקת משולש לארבעה משולשים שווי שטח- הפתרונות

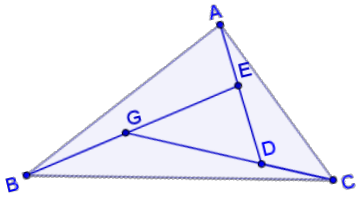
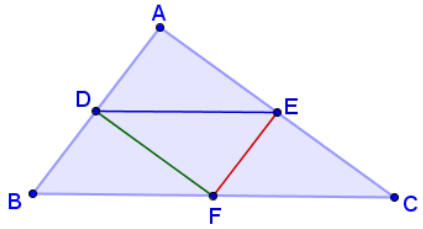
סה"כ יש 108 אפשרויות שונות לחלוקת שטח המשולש ל- 4 משולשים שווי שטח. בסעיף זה נביא רק חלק מהן.

חומר נוסף על חלוקות המשולש ניתן למצוא באתר MATHPUZZLE.

כל החלוקות מתבססות על חלוקה ביחסים קבועים.

 3 חלוקות	 3 חלוקות
 3 חלוקות	 6 חלוקות
 6 חלוקות	 6 חלוקות

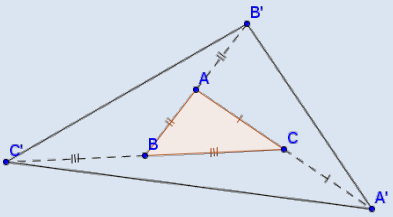
 6 חלוקות	 6 חלוקות
 6 חלוקות	 6 חלוקות
 6 חלוקות	 6 חלוקות
 6 חלוקות	 6 חלוקות
 6 חלוקות	 6 חלוקות
 6 חלוקות	 6 חלוקות

 2 חלוקות	 חלוקה אחת

.2

א. נתון משולש שהגדילו את צלעותיו פי שתיים.

מה היחס בין שטח המשולש החדש שהתקבל לשטח המשולש המקורי?



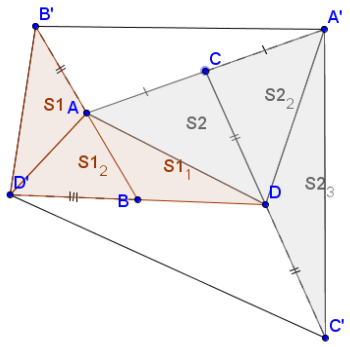
תשובה: פי 7.

נעביר את BA' ונמצא את יחס השטחים $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BCA'}}$. באותו אופן נעביר את CB' ואת AC'.

ב. נתון מרובע שהגדילו את צלעותיו פי שתיים.
מה היחס בין שטח המרובע החדש שהתקבל לשטח המרובע המקורי?

תשובה: פי 5.

הדרכה: נעביר את AD ונחלק את המרובע המקורי לשני שטחים S_1 ו- S_2.
סכום שטחי המשולשים $\Delta A'CC'$ ו- $\Delta D'BB'$ גדול פי 2 משטח המרובע המקורי.
באופן דומה נעביר את BC ונחזור על התהליך עם שני המשולשים הנותרים.



מקורות

- לייקין ר. (2006), על ארבעה קשרים מתמטיים ופתרון בעיות בדרכים שונות, *על"ה* 36, 14-8.

http://highmath.haifa.ac.il/data/alim27_38/ale36-pdf/ale36-2.pdf

- קליינר י. (1994). *מאמרים נבחרים בהסטוריה של המתמטיקה*. בעריכת נ. מובשוביץ-הדר, קשר חם, הטכניון.

- רוקח א. ומובשוביץ-הדר נ. (2011). משפטי קיום והוכחות קיום בבית הספר התיכון – צורך כמעט קיומי, *על"ה* 45, 13-5.

http://highmath.haifa.ac.il/images/data2/alle45/45-1.pdf

- שריקי ע., זיסקין ק., ולביא א. (2007). משפט צ'בה והרחבתו, *על"ה* 38, 36-32.

http://highmath.haifa.ac.il/data/alim27_38/ale38-pdf/ale38-7.pdf

- National Council of Teachers of mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for School Mathematics. Reston VA: NCTM.

רשימת קישורים

- **הוכחות רבות למשפט פיתגורס** באתר cut-the-knot

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

- **הוכחה דינאמית למשפט פיתגורס**

http://www.mathmatics.co.il/articles/Pythagorean_Theorem_Proof.gif

- **על משפט ציבה** באתר cut-the-knot

http://www.cut-the-knot.org/Generalization/ceva.shtml#bi

- **יישומון** בנושא נקודת Gergonne

http://highmath.haifa.ac.il/Ogdan/Applets/geogonne%20point.ggb

- מקורות נוספים בנושא נקודת Gergonne - **THE GERGONNE POINT**

http://jwilson.coe.uga.edu/emt668/EMT668.Folders.F97/Hales/669Essays/Essay3%7F/Gergonne.html

- **היישומון (CHEAVA 1)**

http://highmath.haifa.ac.il/Ogdan/Applets/cheava1.html

- **היישומון (CHEAVA 2)**

http://highmath.haifa.ac.il/Ogdan/Applets/cheava2.html

- חיפוש נקודות (הוכחה נוספת) באתר **MATHEMATICS EDUCATION**

http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/Challen/trisect/centroid.html

מקורות נוספים

- **METHODS OF GEOMETRY - JAMES T. SMITH**

http://www.google.com/search?tbo=p&tbm=bks&q=+inauthor:%22James+T.+Smith%22

- **GEOMETRIC MEASURMENT FORMULAS – A TEACHER'S PERSPECTIVE**

http://mtl.math.uiuc.edu/node/92

- Scissors congruence and Hilbert's third problem - Norman What is area

http://www.austms.org.au/Gazette/2006/May06/mathellaneous.pdf

- מהלך שעור בכתה בנושא שימור שטח של חצרות:

http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/weekly_present/conservation_of_yards_area.pdf

- **MATHPUZZLE**

http://www.mathpuzzle.com/triangle.html

- **CEVA'S THEOREM AND MENELAUS'S THEOREM:**

http://www.mathdb.org/notes_download/elementary/geometry/ge_G1.pdf

- **CUT THE KNOT**

http://www.cut-the-knot.org/triangle/Gergonne.shtml