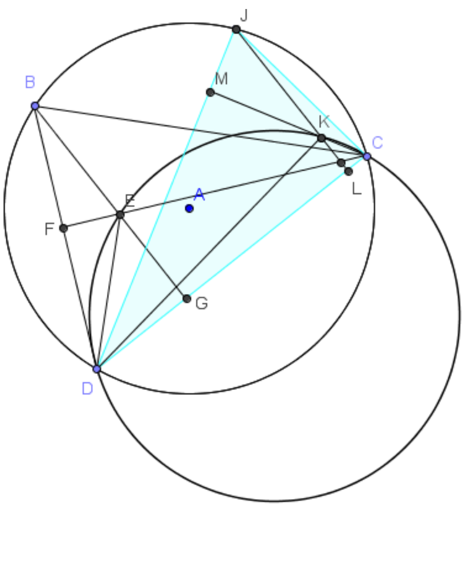
המעגל ומקומות גאומטריים אחרים



אוגדן למדריך הבית ספרי למתמטיקה בחט"ב
המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

המעגל ומקומות גאומטריים אחרים

תוכן עניינים

הקדמה

יחידה זו עוסקת במקומות גאומטריים ובפרט במעגל. בעיסוק במעגל נתמקד בשני דיונים:

- שקילות ההגדרות של מעגל.
- שינוי מושג המעגל בהתאם להגדרות שונות של מרחק בין נקודות.

נזכיר כמה נקודות חשובות המתייחסות לשקילות ההגדרות.

הקטע הבא לקוח ממאמר של ויניצקי ולייקין (1996) על הגדרות (שקולות ולא שקולות) ומושג המשיך שפורסם בעיתון על"ה, מס' 19, עמ' 69 – 73.

מחברים אחדים (Khinchin 1968, Solow 1984, Vinner 1992) מצביעים על עקרונות לוגיים של הגדרות:

- בהגדרה מציגים את שם המושג החדש ומשתמשים בו רק פעם אחת במסגרת זאת.
- לצורך הגדרת המושג החדש משתמשים רק במושגים שהוגדרו קודם.
- בהגדרה מופיעים תנאים מספיקים והכרחיים שעל האובייקט לקיים כדי שיוכל לקבל את השם של המושג שמגדירים.
- לעיתים מגדירים גם שעל אוסף התנאים להיות מינימלי.
- אחרי שנבחרה הגדרה הגידים אחרים המתארים את המושג נקראים תכונות. התכונות נובעות מההגדרה.
- כל היגד השייך למחלקה זו יכול להתקבל כהגדרה, כאשר שאר ההיגדים מהווים משפטים. המשפטים האלה הם תנאים מספיקים והכרחיים שעל האובייקט לקיים כדי לקבל את שם המושג.

אחת ההגדרות המקובלות של מעגל היא: מעגל הוא המקום הגאומטרי של נקודות המישור הנמצאות במרחק קבוע מנקודה נתונה.

עם זאת קיימות גם הגדרות אחרות של מעגל. ביחידה זו נדון בשאלה האם ההגדרות האלה שקולות. בדיון נחפש הוכחות לכך שכל הגדרה אחרת, השונה מההגדרה המקובלת הנ"ל, מתארת גם היא מעגל כפי שהוגדר בהגדרה שממנה יצאנו.

בסדנה 6 נדון בהגדרות שונות של מרחק בין נקודות ובשינוי מושג המעגל בהתאם להגדרות השונות של המרחק.

רקע

הגדרה של מקום גאומטרי

מקום גאומטרי הוא אוסף כל הנקודות במישור או במרחב המקימות תכונה מסוימת. התכונה מהווה גם תנאי מספיק וגם תנאי הכרחי למקום גאומטרי:

- כל נקודה ששייכת לצורה שמהווה את המקום הגאומטרי, מקיימת את התכונה
- כל נקודה שנמצאת מחוץ לצורה אינה מקיימת את התכונה.

קיימות שתי אפשרויות להוכיח כי צורה גאומטרית מסוימת היא מקום גאומטרי של כל הנקודות המקיימות תכונה מסוימת.

בכל אחת מהאפשרויות יש להראות קיום של שני תנאים:

אפשרות א'

- כל הנקודות על הצורה מקיימות את התכונה.
- כל הנקודות המקיימות את התכונה נמצאות על הצורה.

(מכאן, כל הנקודות שאינן על הצורה אינן מקיימות את התכונה).

אפשרות ב'

- כל הנקודות על הצורה מקיימות את התכונה.
- כל נקודה שאינה על הצורה לא מקיימת את התכונה.

(מכאן, כל הנקודות המקיימות את התכונה נמצאות על הצורה).

האפשרויות א' ו- ב' זהות בשלב הראשון של הוכחה ושונות בשלב השני של ההוכחה.

דוגמות להוכחות ניתן למצוא בסדנה 1-2.

קשיים בהוראת מקומות גאומטריים

מקום גאומטרי הוא אוסף כל הנקודות בעלות תכונה משותפת.

האוסף הזה יכול להיות קבוצה ריקה (למשל כל הנקודות במישור שמרחקן מהראשית הצירים הוא -3 יחידות), או קבוצה של מספר סופי של נקודות (אוסף כל הנקודות במישור הנמצאות במרחקים שווים מצלעות המשולש הנתון), או אינסוף נקודות (למשל, אוסף כל הנקודות במישור הנמצאות במרחקים שווים מהנקודה הנתונה). את המקום הגאומטרי אפשר לתאר במישור ובמרחב כצורה גאומטרית (למשל sphere). את אוסף הנקודות האלה אפשר גם לתאר על ידי בנייה גאומטרית או על ידי משוואה אנליטית המייצגת קשר אלגברי בין שיעורי הנקודות. יש טענה שכאשר מלמדים מקום גאומטרי כקשר האלגברי בין x ל- y (גאומטריה אנליטית), הוא נעשה לאחד הקשים יותר בתכנית הלימודים Stols (2006) עם זאת, הגאומטריה האנליטית בכלל והמקומות הגאומטרים בפרט הם גשר בין האלגברה לגאומטריה (1990,Moise). התחלת השימוש במערכת צירים תרמה רבות לבניית גשר זה ומאז הגאומטריה והאלגברה שלובות זו בזו, דבר שהקל על הוכחת טענות כאלה ואחרות Fishback (1969).

מצד אחר גאומטריה מסייעת "להמחיש" את המשוואות. Hawking (1999) טען שמשוואות הן החלק המשעמם במתמטיקה, ולכן עסק במציאת ההקשרים הגאומטריים של משוואות, כלומר חיפש מקומות גאומטריים של הנקודות שהמשוואות מתארות אותם.

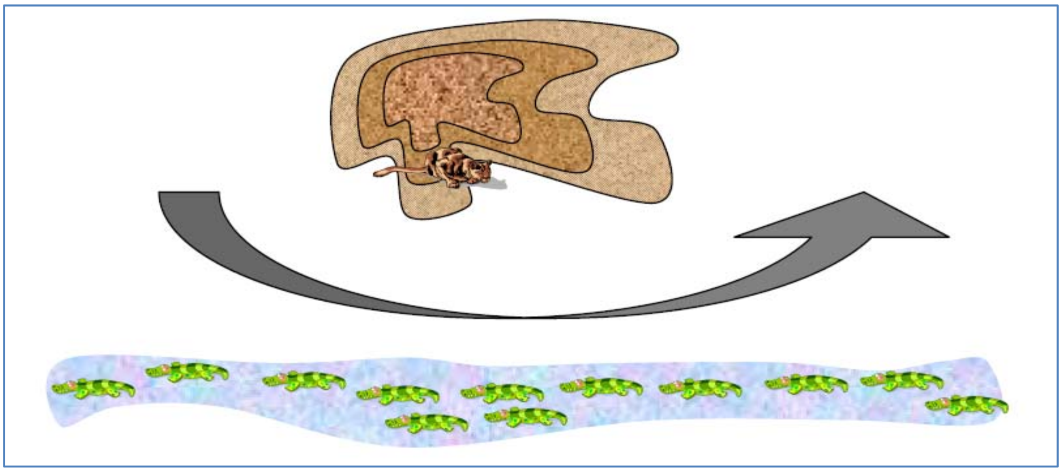
דרכי הוראה של מקומות גאומטריים

בחטיבת הביניים אפשר להמחיש את רעיון המקום הגאומטרי קודם כל על-ידי דוגמאות מחיי היום יום.

למשל:

רונית מתאמנת לתחרות אופניים. ההורים בקשו לא להתרחק מהבית למרחק גדול מ- 1 ק"מ. תוכלו לתאר את המקום הגאומטרי של כל הנקודות שרונית יכולה להתאמן בהן?

במשחק בנקודה אחת רובץ אריה ובנקודה אחרת רובץ תנין. עליכם להעביר את החייל במרחקים הגדולים ביותר האפשריים מהאריה ותנין. מהו המקום הגאומטרי של הנקודות שבהן אפשר להעביר את החייל?



איזו צורת גרף יכולה להתקבל כמקום הגאומטרי הזה?

אדם קונה מגרש. המועצה המקומית מתירה לבנות בית חדש, על פי התנאים הבאים:

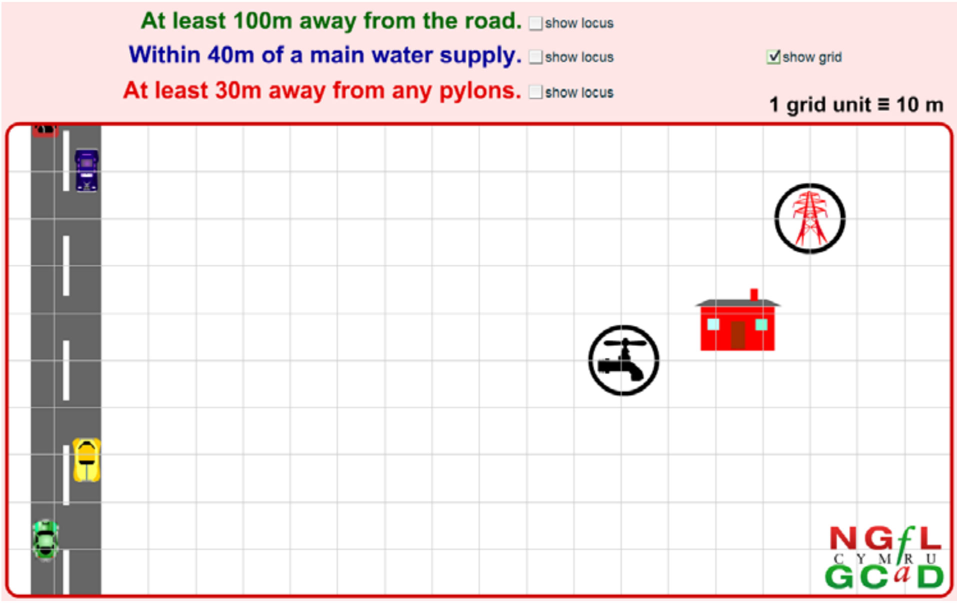
במרחק 100 מטר לפחות מהכביש הראשי.

לכל היותר 40 מטר ממקור אספקת המים לאזור.

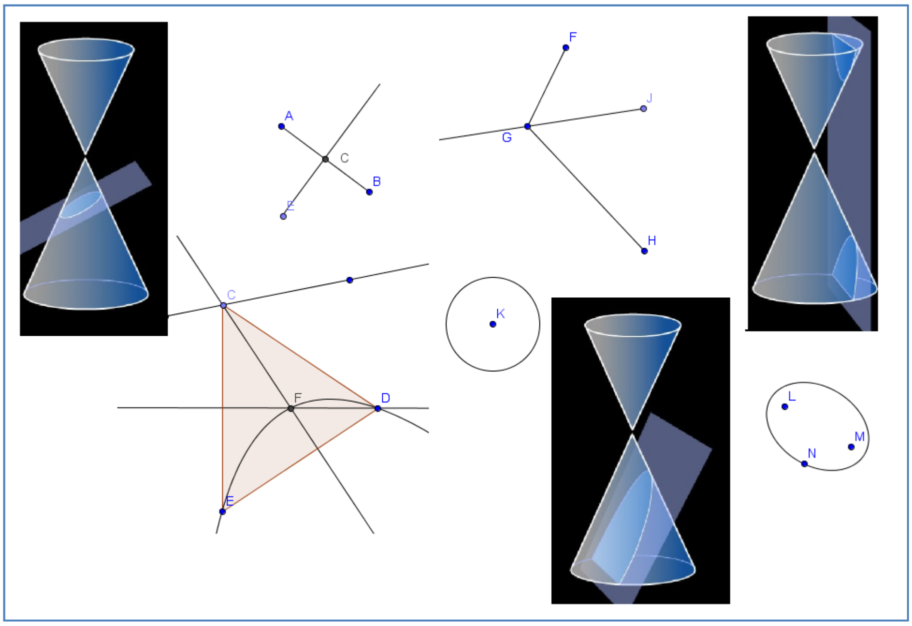
במרחק של לפחות 30 מטר מעמוד מתח גבוה.

כדי לעזור בפתרון פתחו את היישומון שבתמונה:

ביישומון סמנו את האילוץ אותו תרצו לראות והזיזו את ה"בית" בעזרת עכבר המחשב.



לפניכם כמה סרטוטים. מה לדעתכם משותף לכל הסרטוטים האלה?



בכל הסרטוטים האלה מופיעים מקומות גאומטריים.

דוגמאות נוספות של מקומות גאומטריים:

- המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקם מהנקודה הנתונה הוא מספר שלילי כלשהו, מכיל 0 נקודות.
- המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקם מהנקודה הנתונה הוא מספר 0. המקום הגאומטרי הזה מכיל רק נקודה אחת – את הנקודה הנתונה עצמה.
- המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה הנתונה הוא 3.7 יחידות אורך. המקום הגאומטרי הזה מכיל אינסוף נקודות (מעגל שהנקודה הנתונה היא מרכזו והרדיוס הוא 3.7 יחידות אורך).

בבעיות העוסקות במקומות גאומטריים עלינו:

- לשער איזו צורה מתקבלת כמקום גאומטרי
- להוכיח שכל הנקודות, בעלות התכונה הנדונה, שייכות לצורה הזאת
- להוכיח שעל הצורה הזאת אין אף נקודה שהיא איננה בעלת התכונה הנ"ל, או להוכיח שכל נקודה שאינה על הצורה לא מקיימת את התכונה.

המעגל ומקומות גאומטריים בתכנית הלימודים החדשה

כיתה ו'
▪ התלמיד מכיר את מאפייני המעגל כגון: כל נקודה מרוחקת מרחק שווה מהמרכז אך אינו עוסק בהגדרה הפורמאלית שלו. ▪ התלמיד מכיר דרכים לשרטוט מעגל. ▪ התלמיד מבין את פעולת המחוגה והשפעת אורך הרדיוס על גודל המעגל. ▪ התלמיד יודע לחשב שטח והיקף מעגל.
כיתה ז'
התלמיד יודע לחשב ולכתוב ביטויים אלגבריים לשטח והיקף מעגל.

כיתה ט'
התלמיד מכיר את ההגדרה הבאה של המעגל: "קבוצת כל הנקודות שמרחקן מנקודה מסוימת שווה לאורך מסוים קבוע נקראת מעגל. הנקודה היא מרכז המעגל והאורך הקבוע הוא אורך הרדיוס". התלמיד מכיר את ההגדרות של מושגים במעגל. התלמיד מכיר את תכונות המעגל ואת המשפטים המתקיימים בו.
כיתה י' (4-5 יח"ל)
▪ התלמיד מכיר ויודע כיצד למצוא את משוואת המעגל. ▪ התלמיד מכיר את ההגדרה למקום גאומטרי. ▪ התלמיד יודע לזהות ולהגדיר את האנך האמצעי לקטע ואת חוצה הזווית כמקומות גאומטריים.
כיתה יב' (5 יח"ל)
▪ התלמיד יודע להגדיר את המעגל, האליפסה וההיפרבולה כמקומות גאומטריים ומכיר את המשוואות המייצגות אותם. ▪ התלמיד יודע למצוא ולזהות מקומות גאומטריים על פי תכונה גאומטריית (או תכונות) אותן מקיימות קבוצת נקודות.

סדנה 1: בניית מקום גאומטרי – מרחקים שווים מנקודות

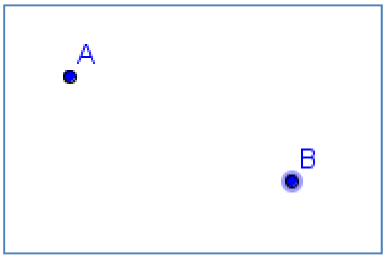
המקום הגאומטרי הידוע ביותר הוא **מעגל**. מעגל הוא מקום גאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מנקודה אחת הנקראת מרכז המעגל.

נפנה לעוד מקומות גאומטריים הדנים במרחקים מנקודות הנתונות.
גודל המרחק אינו משנה כל עוד הוא נשאר קבוע.

1.

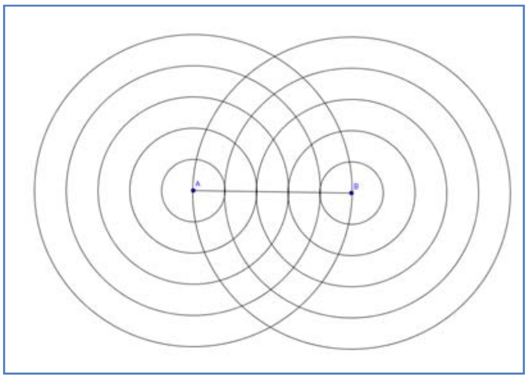
א. לפניכם שתי נקודות נתונות.

סמנו נקודה אחת הנמצאת במרחקים שווים משתי הנקודות האלה.



ב. בתוכנת גיאוגברה סמנו שתי נקודות כלשהן ובנו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהנקודות שסימנתם.
איזו צורה קיבלתם? בדקו שלא טעיתם.

ג. לפניכם קטע AB. היעזרו בשרטוט והוסיפו לשרטוט את המקום הגאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודות A ו- B ונסחו זאת במילים.

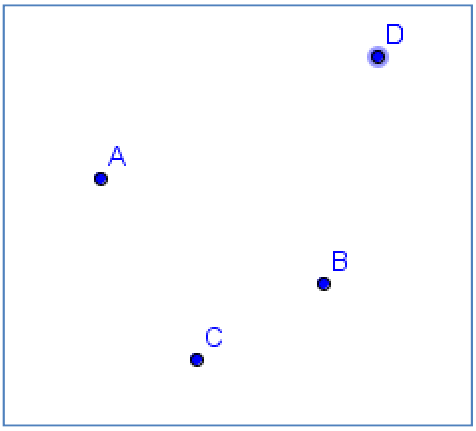


הוכיחו שהצורה שקיבלתם היא המקום הגאומטרי שהגדרנו.

.2 בתוכנת גיאוגברה סמנו שלוש נקודות אקראיות.
הסתמכו על סעיף א' ובנו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים משלוש הנקודות שסימנתם.
איזו צורה קיבלתם? בדקו שלא טעיתם.
הוכיחו שהצורה שקיבלתם היא המקום הגאומטרי שהגדרנו.

.3

א. מהו המקום הגאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מארבע נקודות נתונות? הסבירו ונמקו את תשובתכם.
חשבו גם על מקרים ספציפיים.



ב. ידוע שקיימת צורה שהיא מקום גאומטרי של נקודות הנמצאות במרחקים שווים מ- n $(n > 2)$ נקודות.
מה אפשר להסיק על n נקודות האלה? מהי הצורה שהיא המקום הגאומטרי?

4. כמה מעגלים שונים אפשר להעביר:

א. דרך נקודה אחת?

ב. דרך שתי נקודות?

ג. דרך שלוש נקודות?

ד. דרך הנקודות שמספרן גדול מ- 2?

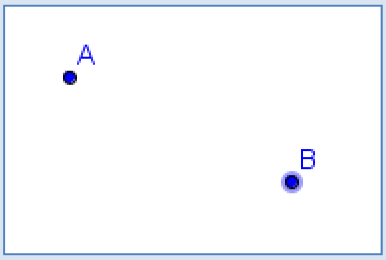
ה. כיצד שאלות אלו קשורות למקומות גאומטריים שבהם דנו מעלה?

פתרונות והנחיות למדריך

.1

א. לפניכם שתי נקודות נתונות.

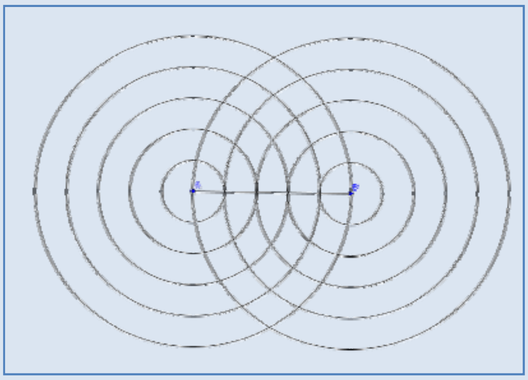
סמנו נקודה אחת הנמצאת במרחקים שווים משתי הנקודות האלה.



ב. בתוכנת גיאוגברה סמנו שתי נקודות כלשהן ובנו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהנקודות שסימנתם.

איזו צורה קיבלתם? בדקו שלא טעיתם.

ג. לפניכם קטע AB . היעזרו בשרטוט והוסיפו לשרטוט את המקום הגאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודות A ו- B ונסחו זאת במילים.



הוכיחו שהצורה שקיבלתם היא המקום הגאומטרי שהגדרנו.

המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהנקודות A ו-B הוא אנך אמצעי לקטע AB .

בשאלה זו נדגים את שתי אפשרויות ההוכחה הקיימות (ראה עמוד 7).

לפי אפשרות א' עלינו להוכיח את קיומם של שני התנאים הבאים:

א. כל הנקודות על הצורה מקיימות את התכונה הנתונה.

ב. כל הנקודות המקיימות את התכונה הנתונה נמצאות על הצורה.

הוכחה:

ציינו שיש שתי אפשרויות לדון במקום גאומטרי: אפשרות א' ואפשרות ב'.

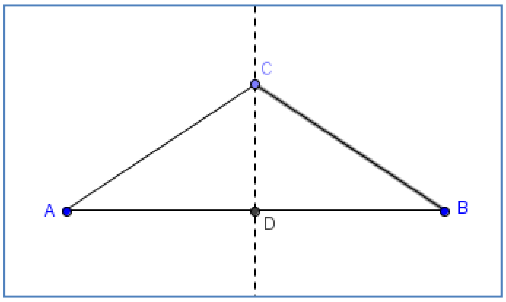
נתבסס על האפשרות א'.

1. נוכיח שאם נקודה נמצאת במרחק שווה משתי נקודות אז היא נמצאת על האנך האמצעי לקטע העובר דרך הנקודות.

נתון: $AC = CB$

צ"ל: C נקודה על האנך האמצעי לקטע.

ב"ע: דרך הנקודה C נוריד אנך ל- AB.



1. לפי הנתון: $AC = BC$
2. CD צלע משותפת של המשולשים ACD ו- BCD.
3. מבניית העזר: $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90^\circ$
4. $\Delta CDA \cong \Delta CDB$ לפי צ.ז.צ.
5. מהחפיפה נקבל ש- $AD = DB$

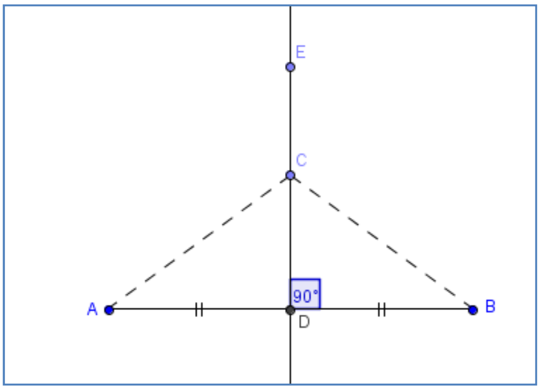
כלומר הנקודה C נמצאת על האנך האמצעי.

2. נוכיח שכל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי לקטע נמצאת במרחקים שווים מקצוות הקטע

נתון: $AD = DB$, $ED \perp AB$

C נקודה כלשהי על האנך האמצעי

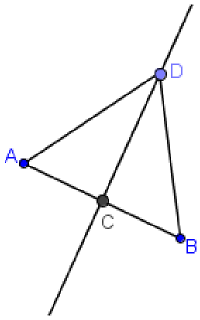
צ"ל: $AC = BC$



1. לפי הנתון $AD = DB$
2. לפי הנתון $ED \perp AB$
3. משולש שבו הגובה הוא גם תיכון, הוא משולש שווה שוקיים.
   מכאן ΔABC הוא משולש שווה שוקיים.
4. $AC = BC$

הוכחה:

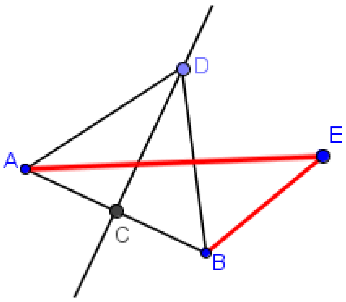
על האנך האמצעי נסמן נקודה D כלשהי. נוכיח שנקודה D נמצאת במרחקים שווים מהנקודות A ו-B .



$\Delta ADC \cong \Delta BDC$ - משולשים ישרי זוויות שהניצבים שלהם שווים בהתאמה. מכאן $AD = BD$. הוכחנו שכל נקודה על האנך האמצעי שייכת למקום הגאומטרי הנדון.

התבססנו על האפרות א' וסיימנו את ההוכחה.
אם היינו מתבססים על האפשרות ב' היינו צריכים להוכיח את הסעיף ב2:
כל נקודה שאיננה על האנך האמצעי איננה שייכת למקום הגאומטרי הנדון.

ב2. נוכיח שכל נקודה שאיננה על האנך האמצעי איננה שייכת למקום הגאומטרי הנדון.
נוכיח בדרך השלילה:



נניח שקיימת נקודה E שאיננה על האנך האמצעי וגם היא שייכת למקום הגאומטרי הנדון.

ΔAEB הוא משולש שווה שוקיים.

C – אמצע הבסיס.

DC – אנך אמצעי. ב ΔAEB הגובה מקדקוד E חייב להיות על האנך האמצעי. מצב כזה לא יכול להיות כי E לא שייכת לאנך האמצעי. קיבלנו סתירה.

כלומר, ההנחה שקיימת נקודה E שאיננה על האנך האמצעי וגם היא שייכת למקום הגאומטרי הנדון, היא הנחה מוטעית.

2. בתוכנת גיאוגברה סמנו שלוש נקודות אקראיות.
הסתמכו על סעיף א' ובנו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים משלוש הנקודות שסימנתם.
איזו צורה קיבלתם? בדקו שלא טעיתם.
הוכיחו שהצורה שקיבלתם היא המקום הגאומטרי שהגדרנו.

המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים משלוש הנקודות הנתונות, הוא נקודה אחת: נקודת חיתוך של האנכים האמצעיים של צלעות המשולש.

הוכחה:

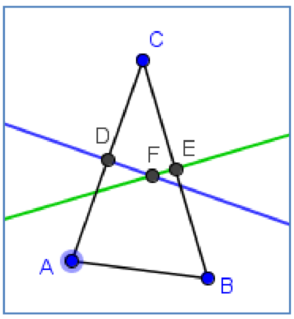
A, B, C – הן שלוש הנקודות הנתונות.

DF ו- EF – אנכים אמצעיים.

F – הנקודה המשותפת שלהם.

$CF = BF$, $AF = CF$

מכאן: $AF = CF = BF$

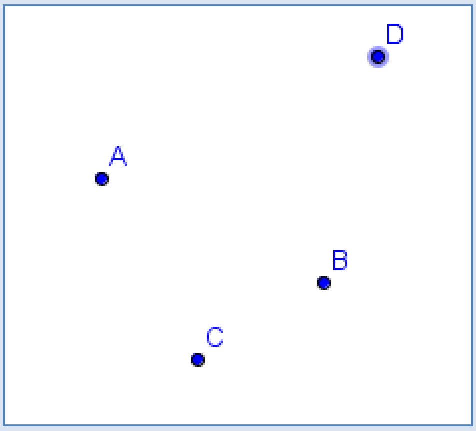


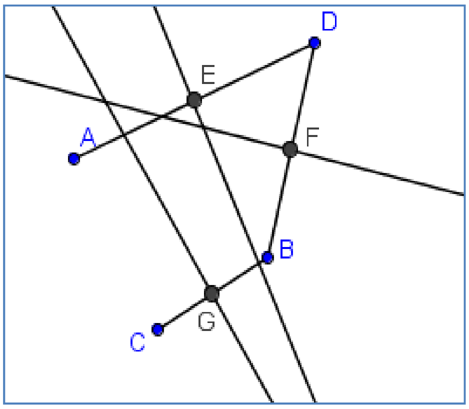
המסקנה הנוספת מכאן היא שמרכז המעגל החוסם את המשולש הנתון הוא נקודת חיתוך של האנכים האמצעיים של צלעות המשולש.

.3

א. מהו המקום הגאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מארבע נקודות נתונות? הסבירו ונמקו את תשובתכם.

חשבו גם על מקרים ספציפיים.





נעביר שלושה קטעים המחברים בין זוגות הנקודות הנתונות AD, DB, BC.

נעביר אנכים אמצעים של הקטעים האלה. במקרה כללי האנכים אינם נחתכים, כלומר לא קיימת נקודה שנמצאת במרחקים שווים מכל 4 נקודות הנתונות. במקום הגאומטרי יש 0 נקודות.

במקרה המיוחד שבו אפשר להעביר מעגל דרך כל הנקודות הנתונות, מרכז המעגל הוא המקום הגאומטרי המבוקש. במקום הגאומטרי יש נקודה 1.

ב. ידוע שקיימת צורה שהיא מקום גאומטרי של נקודות הנמצאות במרחקים שווים מ- n $(n > 2)$ נקודות.

מה אפשר להסיק על n נקודות האלה? מהי הצורה שהיא המקום הגאומטרי?

כמו בסעיף הקודם, רק כאשר אפשר להעביר מעגל דרך כל הנקודות הנתונות, יהיה מקום גאומטרי כזה – מרכז המעגל

---

4. כמה מעגלים שונים אפשר להעביר:

א. דרך נקודה אחת?

אינסוף מעגלים

ב. דרך שתי נקודות?

אינסוף מעגלים

ג. דרך שלוש נקודות?

מעגל אחד.

ד. דרך הנקודות שמספרן גדול מ-2?

מעגל אחד או אף מעגל.

ה. כיצד שאלות אלו קשורות למקומות גאומטריים שבהם דנו מעלה?

מרכז המעגל העובר דרך כל הנקודות הנתונות הוא המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהנקודות הנתונות.

סדנה 2: בניית מקום גאומטרי – מרחק שווה מישרים

.1

א. בתוכנת גיאוגברה העבירו ישר כלשהו ובנו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהישר שהעברתם.
איזו צורה קיבלתם? בדקו שלא טעיתם.

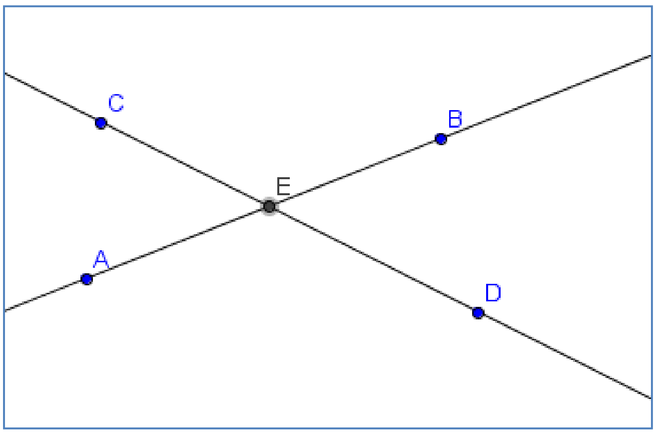
ב. הוכיחו שהצורה שהתקבלה היא המקום הגאומטרי שהגדרנו.

.2

א. בתוכנת גיאוגברה העבירו שני ישרים מקבילים כלשהם ובנו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מן הישרים שהעברתם.
איזו צורה קיבלתם?

ב. הוכיחו שהצורה שקיבלתם היא המקום הגאומטרי שהגדרנו.

.3 בתוכנת גיאוגברה העבירו שני ישרים נחתכים כלשהם ובנו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות באותו מרחק מן הישרים שהעברתם.

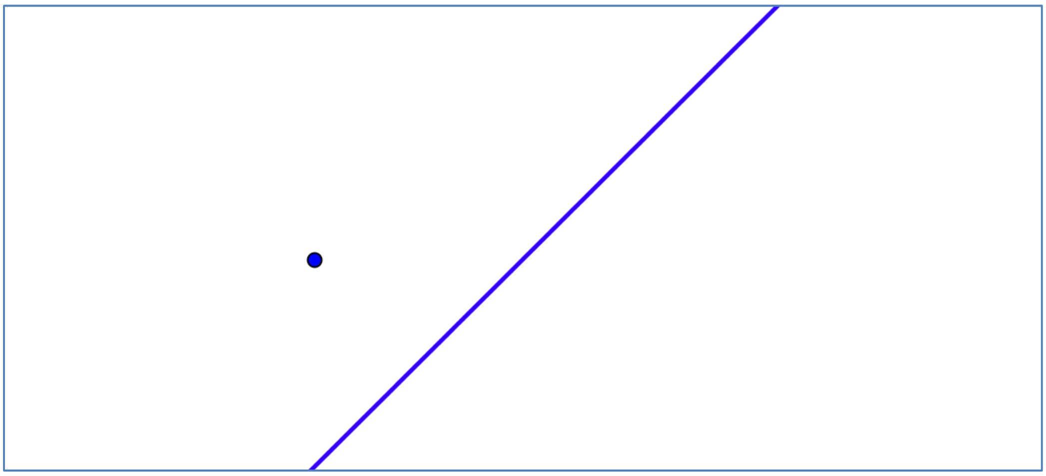


איזו צורה קיבלתם?

הוכיחו שהצורה שקיבלתם היא המקום הגאומטרי שהגדרנו.

הגדירו חוצה זוית כמקום גאומטרי

4. כתבו הסבר כיצד אפשר למצוא מקום גאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהישר ומהנקודה הנתונים. ציירו ביד חופשית את הבנייה של המקום הגאומטרי. הוכיחו שהצורה שהתקבלה היא אכן המקום הגאומטרי המבוקש. אפשר להיעזר בתכנת גיאוגברה.

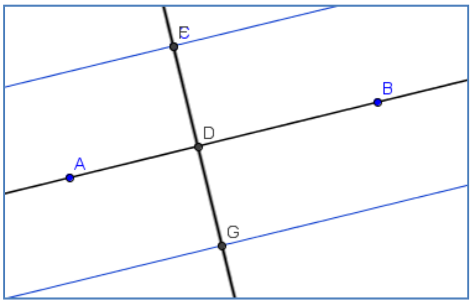


פתרונות והנחיות למדריך

1.

א. בתוכנת גיאוגברה העבירו ישר כלשהו ובנו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהישר שהעברתם.
איזו צורה קיבלתם? בדקו שלא טעיתם.

ב. הוכיחו שהצורה שהתקבלה היא המקום הגאומטרי שהגדרנו.



על הישר AB הנתון נסמן נקודה D כלשהי.
דרך הנקודה D נעביר אנך לישר AB.
על שני צדדי האנך נקצה את המרחק הנתון מהנקודה D, הנקודות E ו-G.
דרך הנקודות האלה נעביר ישרים מקבילים ל- AB.
שני הישרים האלה הם המקום הגאומטרי הדרוש.

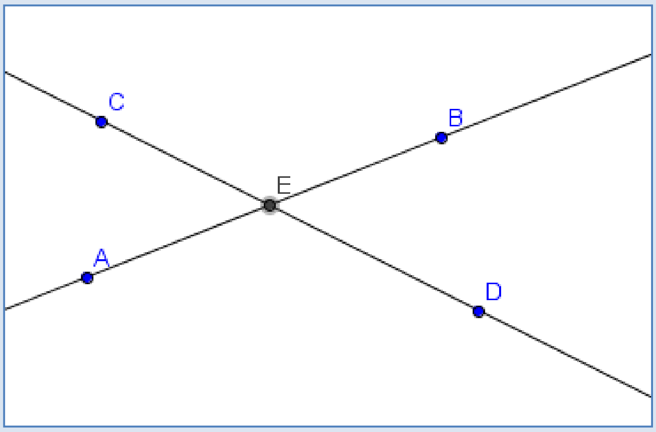
2.

א. בתוכנת גיאוגברה העבירו שני ישרים מקבילים כלשהם ובנו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מן הישרים שהעברתם.
איזו צורה קיבלתם?

ב. הוכיחו שהצורה שקיבלתם היא המקום הגאומטרי שהגדרנו.

על סמך הסעיף הקודם ברור שהמקום הגאומטרי הדרוש אמור להיות קו ישר מקביל לשני הישרים הנתונים הנמצא במרחק הנתון מהישרים הנתונים. המצב אפשרי רק אם המרחק בין הישרים הנתונים גדול פי 2 מהמרחק שנתון במקום הגאומטרי. בכל המקרים האחרים מקום גאומטרי כזה לא קיים.

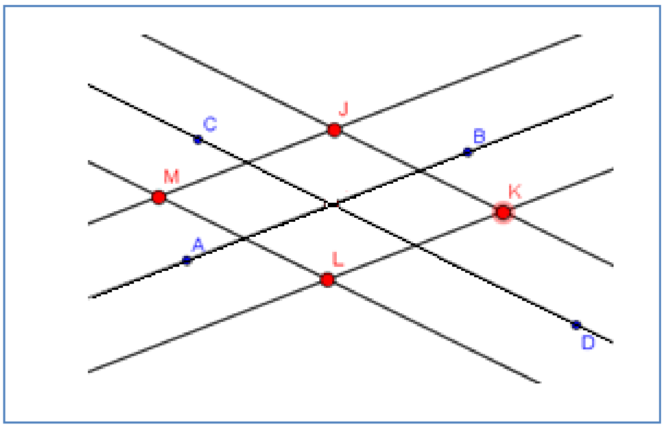
3. בתוכנת גיאוגברה העבירו שני ישרים נחתכים כלשהם ובנו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות הנמצאות באותו מרחק מן הישרים שהעברתם.



איזו צורה קיבלתם?

הוכיחו שהצורה שקיבלתם היא המקום הגאומטרי שהגדרנו.

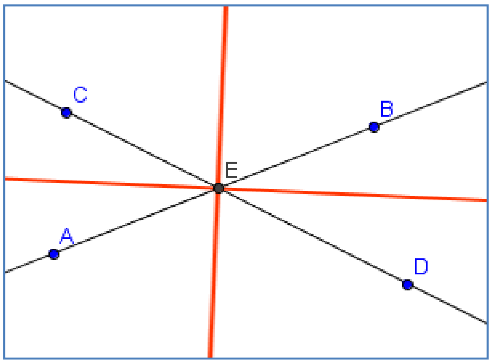
הגדירו חוצה זווית כמקום גאומטרי.



על סמך הסעיף א' נוכל לסמן 4 נקודות השייכות למקום הגאומטרי הדרוש: J, K, L, M.

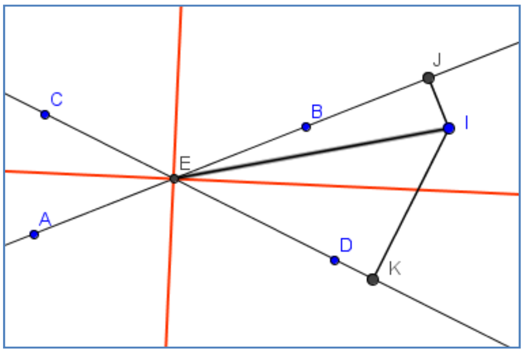
נעביר חוצה זווית של שתי זוויות קדקודיות. נוכיח שכל נקודה על חוצה הזווית נמצאת במרחקים שווים מהישרים הנתונים.

$\Delta GEF \cong \Delta HEF$ (משולשי ישרי זוויות שבהם שתי זוויות שוות בהתאמה, EF - צלע משותפת). מכאן $FG = FH$. גם חוצה הזווית של שתי הזוויות האחרות עונה על אותה דרישה:



נשאר להוכיח שאין נקודה אחרת שאיננה על חוצי הזוויות אך נמצאת במרחקים שווים מהישרים הנתונים.

נוכיח בדרך השלילה:
נניח שיש נקודה I שאיננה על חוצה זוויות והיא נמצאת במרחקים שווים מהישרים הנתונים.

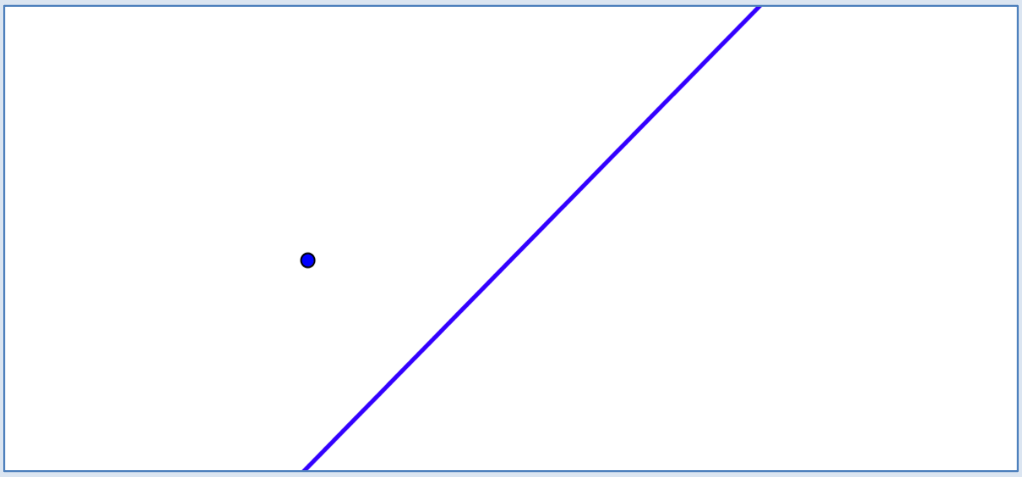


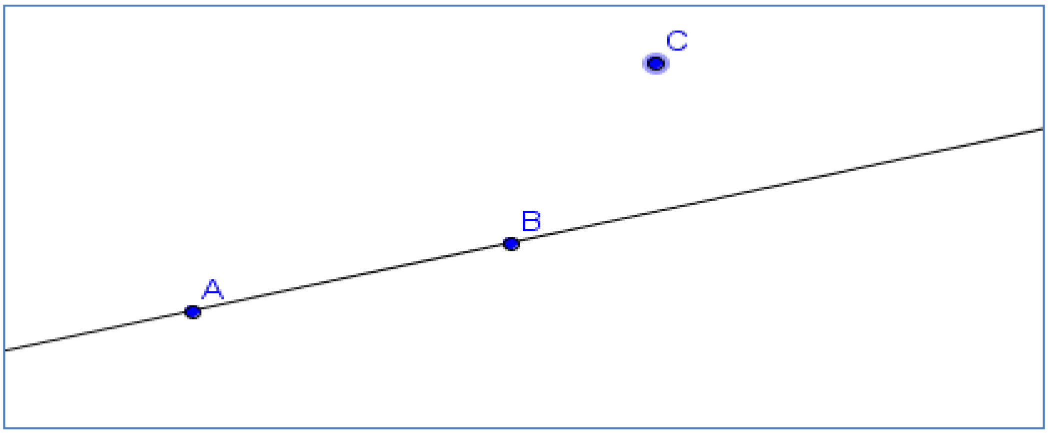
$\Delta EJI \cong \Delta EKI$

מכאן $\sphericalangle JEI \cong \sphericalangle KEI$ מה שמהווה סתירה עם העובדה שהנקודה I איינה על חוצה זווית. כלומר שני חוצי הזוויות הם המקום הגאומטרי המבוקש.

על סמך התשובה הנ"ל אפשר להגדיר **חוצה זווית כמקום גאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מקרני הזווית.**

4. כתבו הסבר כיצד אפשר למצוא מקום גאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהישר ומהנקודה הנתונים. ציירו ביד חופשית את הבנייה של המקום הגאומטרי. הוכיחו שהצורה שהתקבלה היא אכן המקום הגאומטרי המבוקש. אפשר להיעזר בתכנת גיאוגברה.

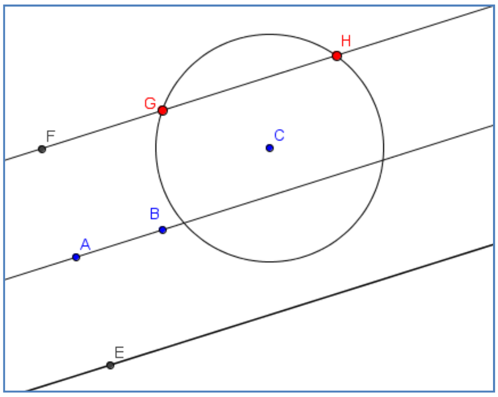




נבנה מקום גאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק הנתון מהישר הנתון AB.

נבנה מקום גאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק הנתון מהנקודה הנתונה C.

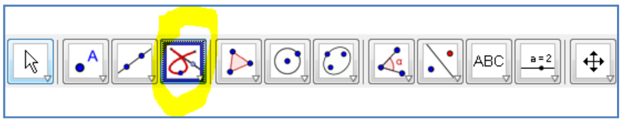
נמצא את נקודות החיתוך של שני המקומות הגאומטריים הנ"ל. נקודות החיתוך האלה האם המקום הגאומטרי הנדרוש.



H
G
C
F
B
A
E

סדנה 3: נקודות מיוחדות במשולש ומקומות גאומטריים

1. השתמשו ביישומון **גבהים במשולש.**
כל קדקודיו של המשולש נמצאים על מעגל. במשולש העברנו שני גבהים.
הניעו את אחד הקדקודים של המשולש על המעגל ועקבו אחרי המקום הגאומטרי שיוצרות נקודות החיתוך של הגבהים. מהו המקום הגאומטרי? הוכיחו.
השתמשו באפשרות מקום גאומטרי:



---

2. השתמשו ביישומון **תיכונים במשולש.**
כל קדקודיו של המשולש נמצאים על מעגל. במשולש העברנו שני חוצי זוויות.
הניעו את אחד הקדקודים של המשולש על המעגל ועקבו אחרי המקום הגאומטרי שיוצרות נקודות החיתוך של חוצי הזוויות (השתמשו באפשרות מקום גאומטרי).
מהו המקום הגאומטרי? הוכיחו.

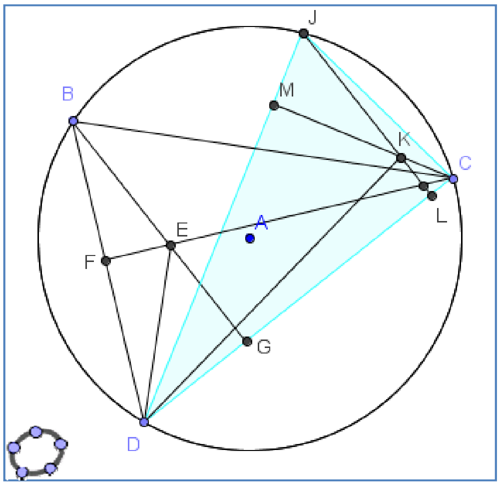
---

3. השתמשו ביישומון **גבהים במקביל.**
ביישומון מופיע משולש. קדקוד אחד של המשולש זז על ישר מקביל לצלע של המשולש שהקדקוד אינו שייך לה. במשולש העברנו שני גבהים.
הניעו את אחד הקדקודים של המשולש על הישר ועקבו אחרי המקום הגאומטרי שיוצרות נקודות החיתוך של הגבהים (השתמשו באפשרות מקום גאומטרי). מהו המקום הגאומטרי? הוכיחו.

פתרונות והנחיות למדריך

1. השתמשו ביישומון **גבהים במשולש**.

כל קדקודיו של המשולש נמצאים על מעגל. במשולש העברנו שני גבהים.
הניעו את אחד הקדקודים של המשולש על המעגל ועקבו אחרי המקום הגאומטרי שיוצרות נקודות החיתוך של הגבהים. מהו המקום הגאומטרי?
הוכיחו.
השתמשו באפשרות מקום גאומטרי:



E - נקודת החיתוך של הגבהים במשולש BCD.

K - נקודת החיתוך של הגבהים במשולש DJC שהתקבל מהמשולש BCD על ידי הזזה כלשהי של הקדקוד B על מעגל.
נוכיח שדרך הנקודות E ו- K אפשר להעביר מעגל.

$\sphericalangle DKM = \sphericalangle DJC$ זוויות שהקרניים שלהן מאונכות בהתאמה.

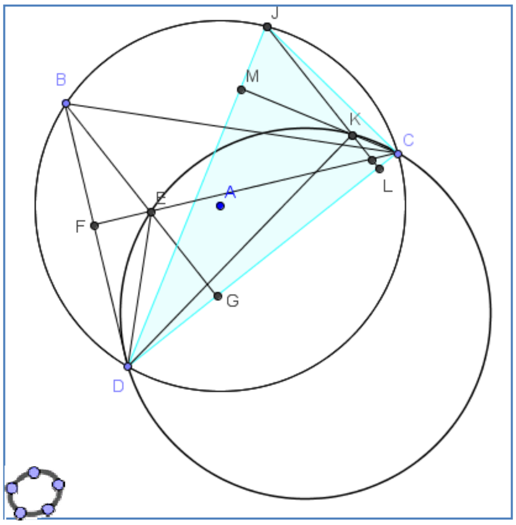
$\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$ זוויות שהקרניים שלהן מאונכות בהתאמה.

$\sphericalangle DJC = \sphericalangle ABC$ זוויות היקפיות הנשענות על אותו מיתר.

מכל אלה נובע: $\sphericalangle DKM = \sphericalangle DEF$

מכאן: $\sphericalangle DKC = \sphericalangle DEC$ זוויות צמודות לזוויות שוות.

מכאן: דרך הנקודות E, K, C, D אפשר להעביר מעגל שבו $\sphericalangle DKC$ ו- $\sphericalangle DEC$ הן זוויות היקפיות.

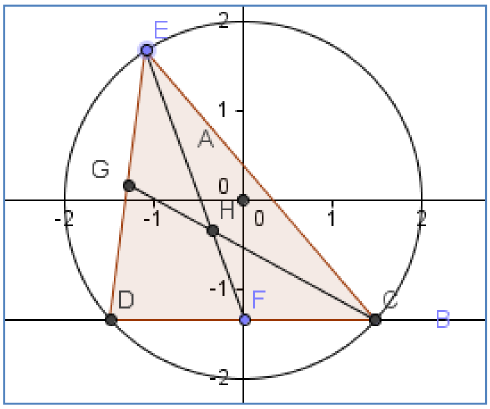


---

2. השתמשו ביישומון **תיכונים במשולש.**
כל קדקודיו של המשולש נמצאים על מעגל. במשולש העברנו שני חוצי זוויות.
הניעו את אחד הקדקודים של המשולש על המעגל ועקבו אחרי המקום הגאומטרי שיוצרות נקודות החיתוך של חוצי הזוויות (השתמשו באפשרות מקום גאומטרי).
מהו המקום הגאומטרי? הוכיחו.

בסרטוט נקודה H היא נקודת החיתוך של התיכונים, נקודה E זזה על מעגל.
נמקם את המשולש במערכת צירים, כך שמרכז המעגל יהיה בראשית הצירים וצלע DC מקבילה לציר X.
נניח שרדיוס המעגל הוא r.

נסמן את שיעורי הנקודות: $D(-a,-b)$,$C(a,-b)$,$E(x,y)$,$\mathrm{H}(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1)$ –
נקודה השייכת למקום הגאומטרי הנדון. מכיוון שנקודה E נמצאת על המעגל, מתקיים $x^2+y^2=r^2$



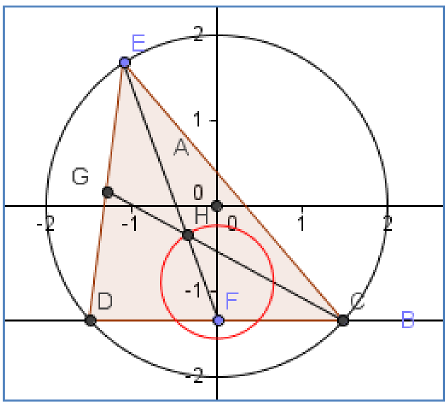
- F – אמצע הקטע DC. לכן שיעורי הנקודות הם: $\mathrm{F}(0.-\mathrm{b})$.
- H מחלקת את התיכון EF ביחס 2:1. לכן שיעורי הנקודותה שך H הם:

$$x_1=\frac{1\cdot 0+2x}{3}, y_1=\frac{1\cdot(-b)+2\sqrt{r^2-x^2}}{3}$$

- הביטוי של הקואורדינטה y באמצעות x הוא:

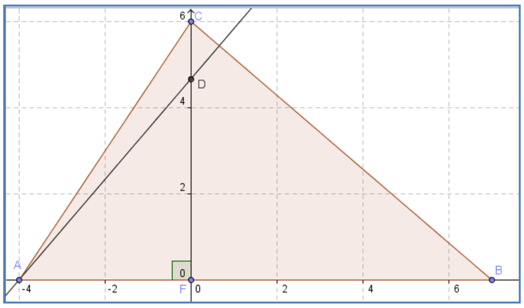
$$y_1=\frac{-b}{3}+\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{3}$$

- מכאן המקום הגאומטרי של הנקודות החיתוך של התיכונים הוא מעגל.



3. השתמש ביישומון **גבהים במקביל**.
ביישומון מופיע משולש. קדקוד אחד של המשולש זז על ישר מקביל לצלע של המשולש שהקדקוד אינו שייך לה. במשולש העברנו שני גבהים.
הניעו את אחד הקדקודים של המשולש על הישר ועקבו אחרי המקום הגאומטרי שיוצרות נקודות החיתוך של הגבהים (השתמש באפשרות מקום גאומטרי). מהו המקום הגאומטרי? הוכיחו.

בסרטוט נקודה D היא נקודת החיתוך של הגבהים, נקודה C זזה על הישר המקביל לצלע AB:



נמקד את המשולש במערכת צירים, כך שנקודה A נמצאת בראשית הצירים וצלע AB נמצאת על ציר X.

נסמן את שיעורי הנקודות: $D(x,y)$, $C(x,b)$, $B(a,0)$, $A(0,0)$.

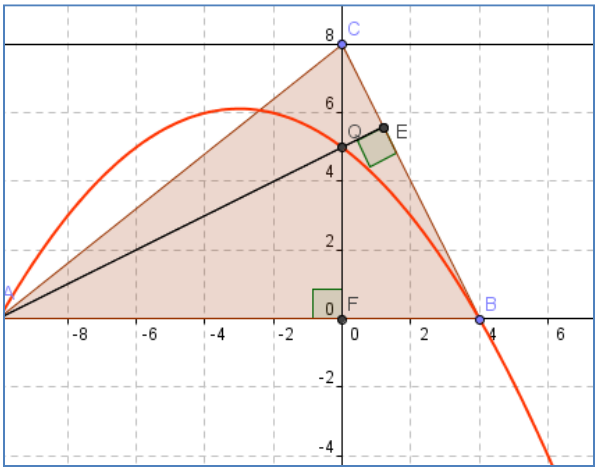
D – נקודה השייכת למקום הגאומטרי הנדון.

הקווים BC ו- AD הם קווים מאונכים.

מכאן: $$\frac{y}{x}\cdot\frac{b}{x-a}=-1$$

מכאן: $$y=\frac{(a-x)x}{b}$$

קיבלנו שהמקום הגאומטרי הנדון הוא פרבולה:



סדנה 4: הגדרות שונות למעגל כמקום גאומטרי

הסדנה לקוחה מתוך "הגדרות שקולות" / גרייסי וינצקי ורוזה לייקין המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים הטכניון, חיפה/ אוגוסט 1997.

בסדנה נדון בשקילות של הגדרות שונות של מעגל.

נתחיל מהגדרת המעגל הזו: מעגל הוא מקום גאומטרי של נקודות במישור הנמצאים במרחק שווה מנקודה אחת (מרכז המעגל).

לפניך דף המכיל 2 התיאורים של מקומות גאומטריים.

תיאור 1: המקום הגאומטרי של נקודות במישור מהן רואים קטע נתון בזווית ישרה.

תיאור 2: המקום הגאומטרי של נקודות במערכת צירים קרטזית המקיימות: $x^2 + y^2 = R^2$, כאשר R מספר ממשי.

1. עבור כל תיאור בדקו האם הוא מתאר מעגל בהתאם להגדרתו מעלה.

2. הצדיקו את טענתכם על ידי הוכחה.

3. מצאו קשרים רבים ככל האפשר בין המקומות הגאומטריים שהוגדרו.

4.

א. האם כל אחד מהתיאורים הנ"ל יכולים להוות הגדרת מעגל? הסבירו.

ב. אם הייתם צריכים לבחור אחד התיאורים כהגדרה בסיסית של מעגל האם הייתם בוחרים בהגדרה בסדנה כבסיסית, או הייתם בוחרים הגדרה אחרת? הסבירו.

פתרונות והנחיות למדריך

הערה חשובה: כשמוכיחים שתיאור כלשהו מייצג מקום גאומטרי של נקודות, יש להוכיח את המשפט והיפוכו (תנאי הכרחי ומספיק). יש להראות כי כל נקודה השייכת למקום הגאומטרי של הנקודות מקיימת את התכונה המשותפת, ויש להראות להיפך שכל נקודה המקיימת את התכונה שייכת למקום הגאומטרי של הנקודות.

הסדנה לקוחה מתוך "הגדרות שקולות" / גרייסי וינצקי ורוזה לייקין המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים הטכניון, חיפה/ אוגוסט 1997.

בסדנה נדון בשקילות של הגדרות שונות של מעגל.

נתחיל מהגדרת המעגל הזו: מעגל הוא מקום גאומטרי של נקודות במישור הנמצאות במרחק שווה מנקודה אחת (מרכז המעגל).

לפניך דף המכיל 2 התיאורים של מקומות גאומטריים.

תיאור 1: המקום הגאומטרי של נקודות במישור מהן רואים קטע נתון בזווית ישרה.

תיאור 2: המקום הגאומטרי של נקודות במערכת צירים קרטזית המקיימות: $x^2+y^2=R^2$, כאשר R מספר ממשי.

- עבור כל תיאור בדקו האם הוא מתאר מעגל בהתאם להגדרתו מעלה.
- הצדיקו את טענתכם על ידי הוכחה.
- מצאו קשרים רבים ככל האפשר בין המקומות הגאומטריים שהוגדרו.

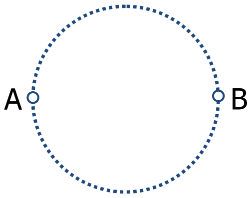
שאלות לדיון

א. האם כל אחד מהתיאורים הנ"ל יכולים להוות הגדרת מעגל? הסבירו.

ב. אם הייתם צריכים לבחור אחד התיאורים כהגדרה בסיסית של מעגל האם הייתם בוחרים בהגדרה בסדנה כבסיסית, או הייתם בוחרים הגדרה אחרת? הסבירו.

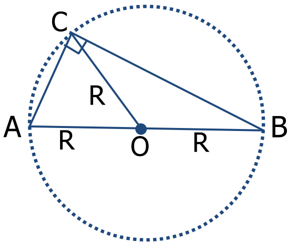
תיאור 1: המקום הגאומטרי המתקבל הוא מעגל שמרכזו באמצע הקטע AB ואורך הרדיוס שלו שווה למחצית האורך של קטע AB, ללא שתי הנקודות שבקצוות הקטע.

מסקנה: תיאור 1 אינו מתאר מעגל בהתאם להגדרה הנתונה היות ושתי נקודות הקצה אינן נכללות בו.



הוכחה:

כיוון 1:



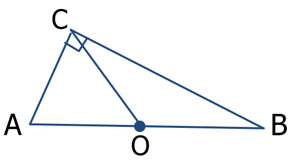
נתון: הנקודה C שייכת למעגל שמרכזו O,

צ"ל: $\sphericalangle ACB = 90^\circ$

זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90°,

ולכן כל נקודה שממנה יראו את הקטע C בזווית של - 90°

תיהיה שייכת למעגל O.



כיוון 2:

נתון: מנקודה C רואים קטע AB בזווית ישרה.

צ"ל: נקודה C שייכת למעגל שמרכזו באמצע הקטע AB ואורך הרדיוס שלו שווה למחצית האורך של קטע AB.

הוכחה:

נתון: $\sphericalangle ACB = 90^\circ$

צ"ל: O מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

O אמצע AB, התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר ומכאן

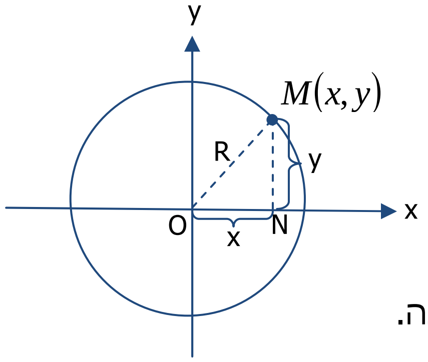
ש: $AO = BO = CO$ ⇐ O מרכז המעגל ו- AO הוא הרדיוס שלו.

תיאור 2:

המקום הגאומטרי המתקבל הוא מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו R.

כיוון 1:

אם הנקודה $M(x,y)$ נמצאת על המעגל מרכזו O ורדיוסו R אז היא מקיימת $x^2+y^2=R^2$.



הנקודה $M(x,y)$ שייכת למעגל,

מנקודה M נוריד אנך לציר ה- X.

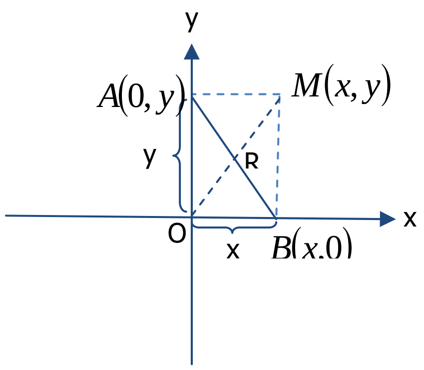
משולש ONM ישר זווית

ולפי פיתגורס מתקיים: $x^2+y^2=R^2$

⇐ כל נקודה על המעגל מקיימת את התכונה.

כיוון 2:

אם נקודה מקיימת $x^2+y^2=R^2$ אז היא נמצאת על מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.



לפי הנתון $x^2+y^2=R^2$, נמקם את המשולש

ABO במערכת הצירים כך שקדקוד הזווית

הישרה בראשית הצירים.

מנקודה A נעלה אנך לציר ה- Y.

מנקודה B נעלה אנך לציר ה- X.

מהבניה נקבל שמרובע $AOBM$ הוא מלבן.

אלכסוני המלבן שווים זה לזה ומכאן: $AB=MO=R$

⇐ הנקודה נמצאת על המעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

מסקנה: תיאור 2 מתאר מעגל בהתאם להגדרה הנתונה. היות וכל הנקודות המיוצגות במשוואה $x^2+y^2=R^2$ מרוחקות מרחק קבוע מנקודה אחת (במקרה זה ראשית הצירים).

סדנה מס' 5: מעגל אפולוני

אפולוני (262-190 לפני הספירה) הוא מדען ביוון העתיקה, אחד המתמטיקאים והאסטרונומים המשפיעים ביותר בזמנו. אפולוני הוכיח כמעט 400 משפטים, המציא את המונחים אליפסה, פרבולה, היפרבולה, אסימפטוטה, עסק בחיתוכים קוניים, מכניקה ואופטיקה. המקום הגאומטרי שנדון כאן נקרא "מעגל אפולוני" וניתן לתיאור באופן הבא:

תיאור 3: המקום הגאומטרי של נקודות במישור, שיחס מרחקיהן משתי נקודות נתונות הוא קבוע. $\left\{C : \dfrac{AC}{BC} = a, a \in R, a > 0\right\}$

1. נניח ש:

נתונות נקודות A ו- B.

נתון שנקודה C היא כזאת שהיחס בין אורכי הקטעים AC ו- CB הוא קבוע:

$AC : CB = a$ (a - מספר חיובי כלשהו).

מצאו מקום גאומטרי של הנקודות שהיחס של המרחקים שלהן משתי הנקודות הנתונות הוא מספר קבוע.

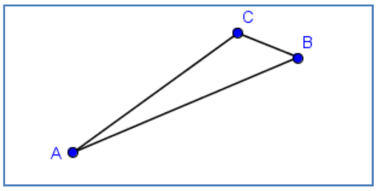
---

2. נניח ש:

נתונות שתי נקודות A ו- B ונתונה נקודה C הנמצאת מחוץ לישר AB.

נתון שהיחס בין אורכי הקטעים AC ו- CB הוא קבוע:

$AC : CB = a$ (a - מספר חיובי כלשהו).



מצאו מקום גאומטרי של הנקודות שהיחס של המרחקים שלהן משתי הנקודות הנתונות הוא מספר קבוע.

מדוע המקום הגאומטרי הזה נקרא "מעגל" אפולוני?

מצאו את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.

פתרונות והנחיות למדריך

1. נניח ש:

נתונות נקודות A ו- B.

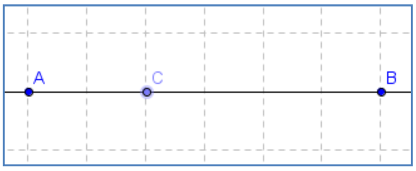
נתון שנקודה C היא כזאת שהיחס בין אורכי הקטעים AC ו- CB הוא קבוע:

$AC:CB=a$ (a - מספר חיובי כלשהו).

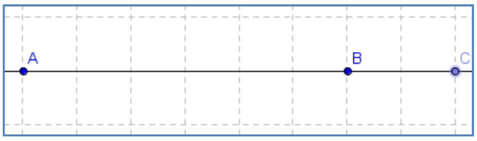
מצאו מקום גאומטרי של הנקודות שהיחס של המרחקים שלהן משתי הנקודות הנתונות הוא מספר קבוע.

חשבו על שני מקרים:

א. נקודה C נמצאת על הישר AB בין הנקודות A ו-B:

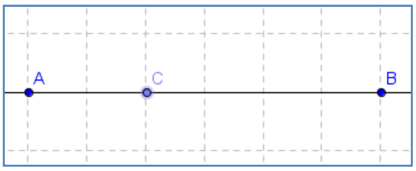


ב. נקודה C נמצאת על הישר AB מחוץ לקטע AB:



הוכחה:

א. נקודה C נמצאת על הישר AB בין הנקודות A ו- B:



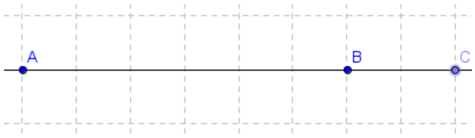
$AC=a\cdot CB$

$AB=AC+CB=CB\cdot(a+1)$

$CB(a+1)=AB$

$CB=\dfrac{AB}{a+1}$

ב. נקודה C נמצאת על הישר AB מחוץ לקטע AB:



$AC = a \cdot CB$

$AB = AC - CB = a \cdot CB - CB = CB \cdot (a-1)$

$$CB = \frac{AB}{a-1}$$

המקום הגאומטרי מכיל רק שתי נקודות.

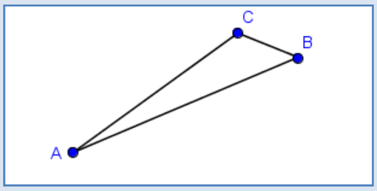
---

2. נניח ש:

נתונות שתי נקודות A ו- B ונתונה נקודה C הנמצאת מחוץ לישר AB.

נתון שהיחס בין אורכי הקטעים AC ו- CB הוא קבוע:

$AC : CB = a$ (a - מספר חיובי כלשהו).

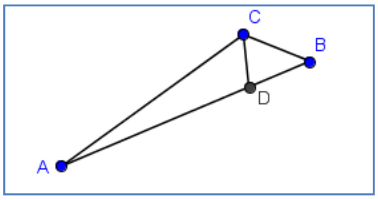


מצאו מקום גאומטרי של הנקודות שהיחס של המרחקים שלהן משתי הנקודות הנתונות הוא מספר קבוע.

מדוע המקום הגאומטרי הזה נקרא "מעגל" אפולוני?

מצאו את מרכז המעגל ואת הרדיוס שלו.

נבנה את חוצה הזווית CD של הזווית ACD.

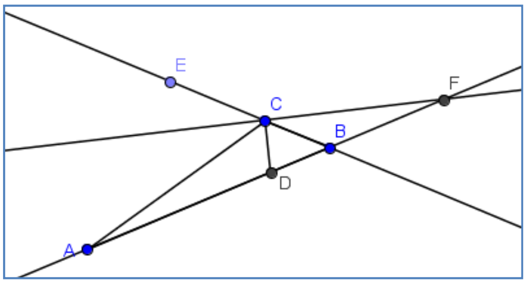


על פי תכונת חוצה הזווית נקבל:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{DA}{DB} = a$$

D שייכת למקום הגאומטרי.

נבנה את חוצה הזווית CD של הזווית החיצונית FCE.

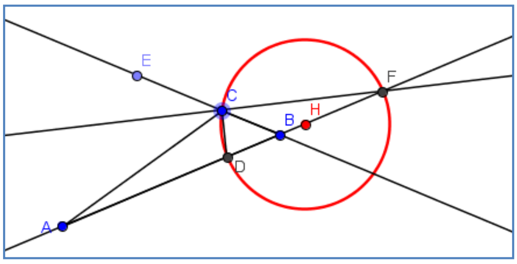


בדומה למקרה הקודם F שייכת למקום הגאומטרי.

זווית FCA היא זווית בין חוצי הזוויות של שתי זוויות צמודות.

מכאן: זווית FCA היא זווית ישרה.
לכן נקודה C נמצאת על מעגל שקוטרו הוא AB.
כלומר, כל נקודה הנמצאת על המעגל שקוטרו הוא AB שייכת למקום הגאומטרי שאותו אנחנו מחפשים.

קיבלנו מעגל אפולוני.



סדנה 6: תלות המעגל כמקום הגאומטרי בהגדרת המרחק

הסדנה לקוחה מתוך "הגדרות שקולות" / גרייסי וינצקי ורוזה לייקין המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים הטכניון, חיפה/ אוגוסט 1997.

דף הגדרות

מרחק: מרחק בין שתי נקודות במישור $B(x_b, y_b)$, $A(x_a, y_a)$ הוא פונקציה שמעתיקה את קבוצת הזוגות של הנקודות במישור לקבוצת המספרים הממשיים. על פונקציה זו לקיים את התנאים הבאים הנקראים אקסיומות המרחק.

1. $A = B \iff d(A,B)=0$; $d(A,B)\geq 0$ לכל A ו-B.
2. $d(A,B)=d(B,A)$ לכל A ו-B.
3. $d(A,B)+d(B,C)\geq d(A,C)$ לכל A, B ו-C.

לפניכם כמה הגדרות של מרחק בין שתי נקודות A ו-B:

הגדרה 1: $m(A,B)=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_a-y_b)^2}$

הגדרה 2: $t(A,B)=|x_b-x_a|+|y_b-y_a|$

הגדרה 3: $l(A,B)=\max\{|x_b-x_a|;|y_b-y_a|\}$

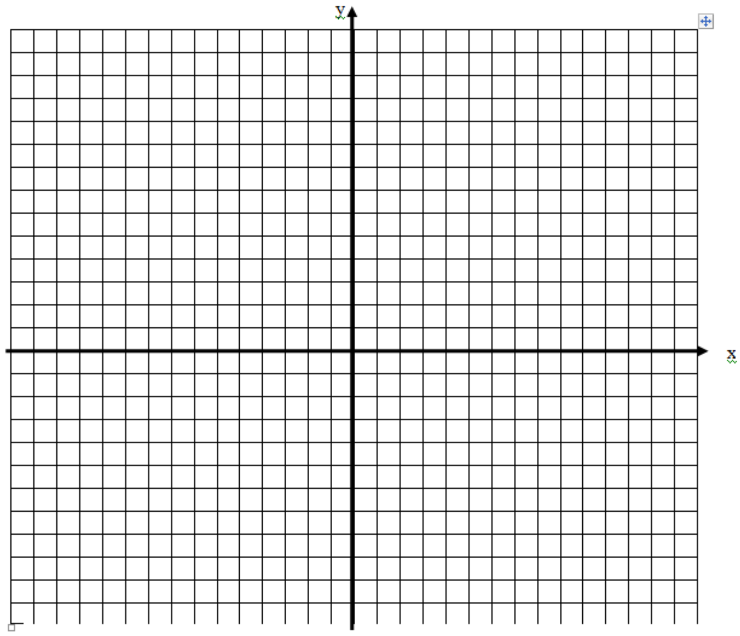
1. $l(A,B),\ t(A,B),\ m(A,B)$ - הן שלוש פונקציות התלויות כל אחת בשני משתנים:
לכל זוג נקודות A ו- B הפונקציה מתאימה מספר שהוא המרחק בין הנקודות

א. הראו שהפונקציות t, m ו- l מקיימות את אקסיומות המרחק.

ב. מעגל הוא מקום גאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק קבוע מנקודה נתונה. תארו מעגלים בהתאם לכל אחת מהגדרות המרחק מעלה - הפונקציות t, m ו- l.

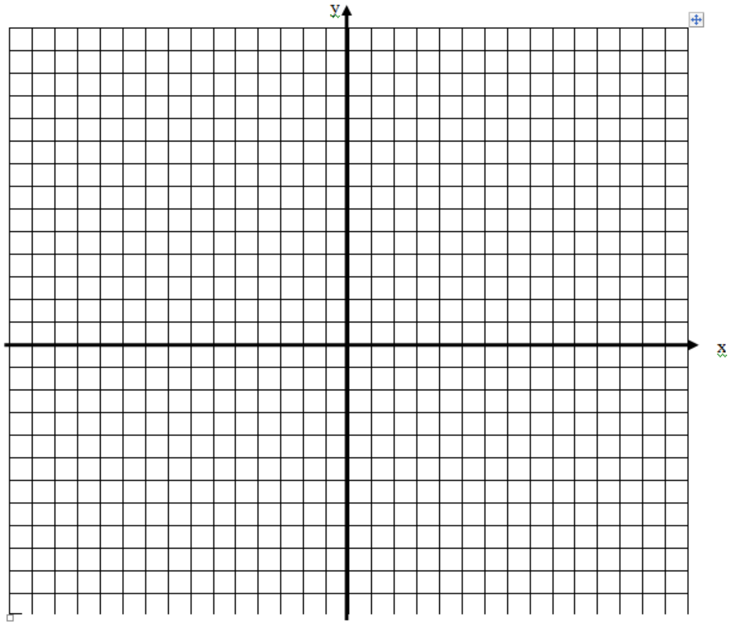
2.

א. הגדרה 1 של מרחק בין נקודות A ו- B: $m(A,B)=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_a-y_b)^2}$.
איך נראה המעגל בהתאם להגדרה 1 של מרחק בין שתי נקודות?



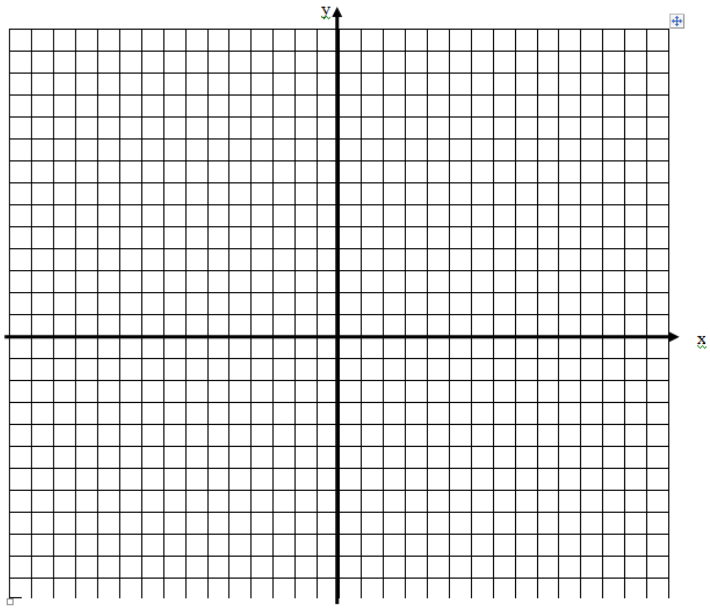
ב. הגדרה 2 של מרחק בין נקודות A ו-B: $t(A,B)=|x_b-x_a|+|y_b-y_a|$.

איך נראה המעגל בהתאם להגדרה 2 של מרחק בין שתי נקודות?



ג. הגדרה 3 של מרחק בין נקודות A ו-B: $l(A,B)=\max\{|x_b-x_a|;|y_b-y_a|\}$.

איך נראה המעגל בהתאם להגדרה 2 של מרחק בין שתי נקודות?



פתרונות והנחיות למדריך

1. $l(A,B)$, $t(A,B)$, $m(A,B)$ - הן שלוש פונקציות התלויות כל אחת בשני משתנים: לכל זוג נקודות A ו- B הפונקציה מתאימה מספר שהוא המרחק בין הנקודות.

א. הראו שהפונקציות m, t ו- l מקיימות את אקסיומות המרחק.

ב. מעגל הוא מקום גאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק קבוע מנקודה נתונה. תארו מעגלים בהתאם לכל אחת מהגדרות המרחק מעלה – הפונקציות m, t ו- l.

נראה שהפונקציה $m(A,B)=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_a-y_b)^2}$ מקיימת את שלוש אכסיומות המרחק.

1. צ"ל:

א. $A=B$ אם ורק אם $m(A,B)=0$

ב. $m(A,B)\geq 0$ לכל A ו- B

כיוון א:

נתון: $A=B$

צ"ל: $m(A,B)=0$

נציב $A=B$

ונקבל $m(A,A)=\sqrt{(x_a-x_a)^2+(y_a-y_a)^2}=\sqrt{0+0}=0$

כיוון ב:

נתון: $m(A,B)=0$

צ"ל: $A=B$

נציב $m(A,B)=0$

ונקבל $\boldsymbol{m(A,B)=\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}=0}$

מתקיים רק אם: $x_a=x_b$ **וגם** $y_a=y_b$

לכן: $A=B$

$m(A,B)\geq 0$ לכל A ו-B כי לפי הגדרה 1, הפונקציה m מוגדרת על ידי פונקציה השורש של סכום ריבועים. הריבוע יכול להיות חיובי או 0, ובהתאם להגדרה הפונקציה m מקבלת ערכים חיוביים או אפס בלבד.

2. צ"ל: $m(A,B)=m(B,A)$ לכל A ו- B

$$m(A,B)=\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}=m(B,A)$$

3. צ"ל: $m(A,B)+m(B,C)\geq m(A,C)$ לכל A, B ו- C

זהו למעשה תרגום אלגברי לאי שיוון המשולש הנובע מכך **שהמרחק הקצר ביותר בין שתי נקודות הוא הקו הישר:** הקטעים AB, BC, AC יכולים ליצור משולש או להתלכד לקטע.

במקרה של המשולש נקבל: $m(A,B)+m(B,C)>m(A,C)$

ובמקרה של הקטע נקבל: $m(A,B)+m(B,C)=m(A,C)$

קיבלנו שהפונקציה $m(A,B)=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_a-y_b)^2}$ מקיימת את שלוש האכסיומות של המרחק.

נראה שהפונקציה $t(A,B)=\lvert x_b-x_a\rvert+\lvert y_b-y_a\rvert$ מקיימת את שלושת אכסיומות המרחק.

1. צ"ל : $A=B$ אם ורק אם $t(A,B)=0$ וגם $t(A,B)\geq 0$ לכל A ו-B

כיוון א:

נתון: $A = B$

צ"ל: $t(A,B) = 0$

נציב $A = B$

ונקבל: $t(A,B) = |x_a - x_a| + |y_a - y_a| = 0$

כיוון ב:

נתון: $t(A,B) = 0$

צ"ל: $A = B$

נציב: $t(A,B) = 0$

ונקבל: $t(A,B) = |x_a - x_a| + |y_a - y_a| = 0$

סכום שני מספרים שווה לאפס אם מדובר בשני מספרים נגדיים. סכום זה מורכב משני ערכים מוחלטים כלומר שני המספרים הם חיוביים ולכן האפשרות היחידה מתקבלת כאשר : $x_a = x_b$ וגם $y_a = y_b$ כלומר אם: $A = B$.

ראינו שהפונקציה t מוגדרת ע"י סכום של ערכים מוחלטים של מספר ולכן $t(A,B) \geq 0$ לכל A ו-B.

2. צ"ל: $t(A,B) = t(B,A)$ לכל A ו- B :

$$t(A,B) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a| = |x_a - x_b| + |y_a - y_b| = t(B,A)$$

3. צ"ל: $t(A,B) + t(B,C) \geq t(A,C)$ לכל A, B ו- C:

$$t(A,B) + t(B,C) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a| + |x_c - x_b| + |y_c - y_b|$$

לפי אי שיוון המשולש מתקיים: $|x| + |y| = |x + y|$

ולכן:

$$|x_b - x_a| + |x_c - x_b| + |y_b - y_a| + |y_c - y_b| \geq |x_b - x_a + x_c - x_b| + |y_b - y_a + y_c - y_b|$$

$$|x_b - x_a + x_c - x_b| + |y_b - y_a + y_c - y_b| = |x_c - x_a| + |y_c - y_a|$$

$$|x_c - x_a| + |y_c - y_a| = |x_a - x_c| + |y_a - y_c| = t(A,C)$$

קיבלנו שהפונקציה $t(A,B) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|$ מקיימת את שלוש האכסיומות של המרחק.

נראה שהפונקציה $l(A,B) = \max\{|x_b - x_a|;|y_b - y_a|\}$

מקיימת את שלוש אכסיומות המרחק.

1. צ"ל: $A = B$ אם ורק אם $l(A,B) = 0$. וגם $l(A,B) \geq 0$ לכל A ו-B.

כיוון א:

נתון: $A = B$

צ"ל: $l(A,B) = 0$

נציב $A = B$

ונקבל $l(A,A) = \max\{|x_a - x_a|;|y_a - y_a|\} = \{0;0\} = 0$

כיוון ב:

נתון: $l(A,B) = 0$

צ"ל: $A = B$

נציב $l(A,B) = 0$

ונקבל $l(A,B) = \max\{|x_b - x_a|;|y_b - y_a|\} = 0$

הפונקציה מחזירה את הערך המקסימאלי בין שני מספרים שהם ערכים מוחלטים של הפרשי שיעורי ה-x ושיעורי ה-y של שתי הנקודות. אם ערך זה שווה לאפס הרי שבהכרח מתקיים: $x_a = x_b$ וגם $y_a = y_b$ כלומר $A = B$.

הפונקציה l מקבלת את הערך המקסימאלי של שני ערכים מוחלטים ולכן $l(A,B) \geq 0$ לכל A ו-B.

2. צ"ל: $l(A,B)=l(B,A)$ לכל A ו- B.

$$l(A,B)=\max\{|x_b-x_a|;|y_b-y_a|\}=\max\{|x_a-x_b|;|y_a-y_b|\}=l(B,A)$$

3. צ"ל: $l(A,B)+l(B,C)\geq l(A,C)$ לכל A, B ו- C.

נפרט את המרחקים בהתאם להגדרות:

$$l(A,B)=\max\{|x_b-x_a|;|y_b-y_a|\}\qquad l(B,C)=\max\{|x_c-x_b|;|y_c-y_b|\}$$
$$l(A,C)=l(C,A)=\max\{|x_c-x_a|;|y_c-y_a|\}$$

נכתוב את המרחק אחרת:

$$l(A,C)=l(C,A)=\max\{|x_c-x_a|;|y_c-y_a|\}=\max\{|x_c+x_b-x_b-x_a|;|y_c+y_b-y_b-y_a|\}=$$
$$\max\{|(x_c-x_b)+(x_b-x_a)|;|(y_c-y_b)+(y_b-y_c)|\}$$

כדי להקל על הכתיבה נסמן:

$$(x_c-x_b)=a\qquad (x_b-x_a)=b\qquad (x_c-x_b)=c\qquad (x_b-x_a)=d$$
$$(y_c-y_b)=a'\qquad (y_b-y_a)=b'\qquad (y_c-y_b)=c'\qquad (y_b-y_a)=d'$$

נציב את הסימנים בנוסחאות המרחקים:

$$l(A,B)+l(B,C)=\max\{|a|;|a'|\}+\max\{|b|;|b'|\}$$

סכום המרחקים הזה שווה לגדול בין הסכומים

$$(1)\quad \begin{cases} |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \\ |\boldsymbol{a}'|+|\boldsymbol{b}| \\ |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}'| \\ |\boldsymbol{a}'|+|\boldsymbol{b}'| \end{cases}$$

נציב את הסימנים במרחק השלישי:

$$l(A,C)=\max\{(|a|+|b|),(|a'|+|b'|)\}$$

סכום המרחקים הזה שווה לגדול בין הסכומים

$$(2)\quad \begin{cases} |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \\ |\boldsymbol{a}'|+|\boldsymbol{b}'| \end{cases}$$

נשווה את (1) ו-(2):

אפשרות ראשונה: בשניהם התוצאה היא $|a|+|b|$ או $|a'|+|b'|$,

כלומר: $l(A,B)+l(B,C)=l(A,C)$

אפשרות שנייה: ב (1) התוצאה היא $|a'|+|b|$ או $|a|+|b'|$, סימן ש $|a|+|b|$ וגם $|a'|+|b'|$ קטנים מהתוצאה,

כלומר $l(A,B)+l(B,C)>l(A,C)$

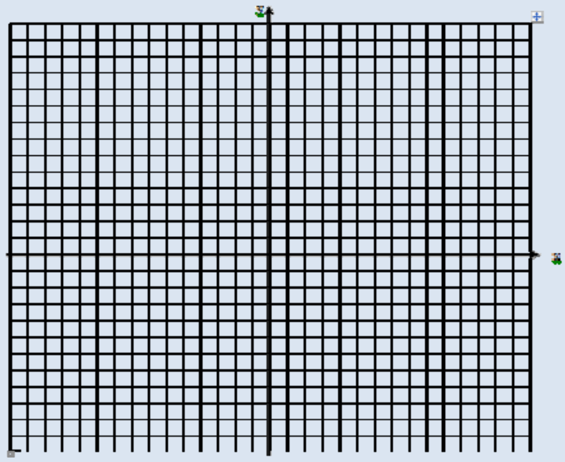
קיבלנו שהפונקציה $l(A,B)=\max\{|x_b-x_a|;|y_b-y_a|\}$

מקיימת את שלוש האכסיומות של המרחק.

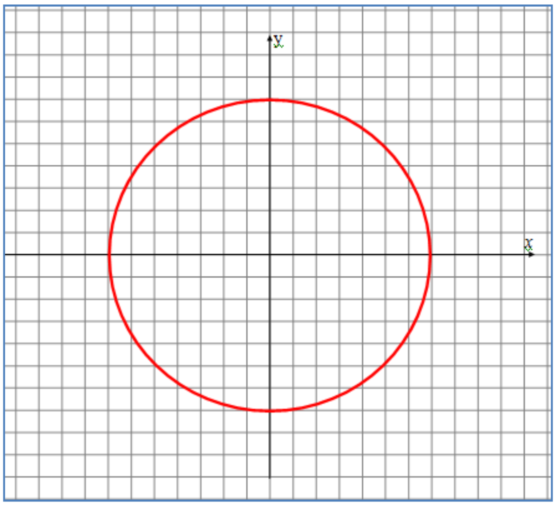
.2

א. הגדרה 1 של מרחק בין נקודות A ו-B: $m(A,B)=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_a-y_b)^2}$.

איך נראה המעגל בהתאם להגדרה 1 של מרחק בין שתי נקודות?



המעגל בהתאם להגדרה 1: $m(A,B)=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$



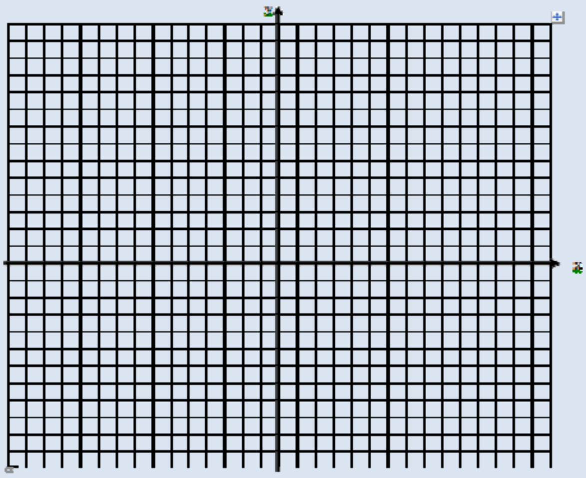
הסבר:

נניח ש: $A(0,0)$ בהתאם להגדרה 1 נקבל: $t(A,B)=\sqrt{x_b^2+y_b^2}=R$

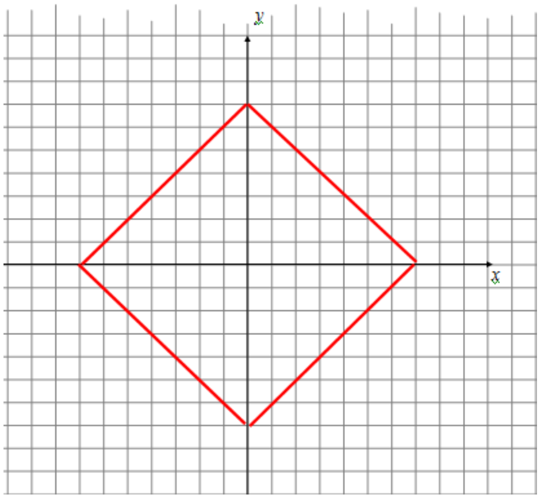
כלומר: $x_b^2+y_b^2=R^2$ שמוכרת לנו כמשוואת מעגל שמרכזו בראשית הצירים.

ב. הגדרה 2 של מרחק בין נקודות A ו-B: $t(A,B)=|x_b-x_a|+|y_b-y_a|$.

איך נראה המעגל בהתאם להגדרה 2 של מרחק בין שתי נקודות?



המעגל בהתאם להגדרה 2: $t(A,B)=|x_b-x_a|+|y_b-y_a|$



הסבר:

נניח ש: $A(0,0)$ בהתאם להגדרה 2

נקבל: $t(A,B)=|x_b|+|y_b|=R$

עבור $x>0$ וגם $y>0$ נקבל שהישר $x+y=R$ תוחם את המעגל ברביע הראשון.

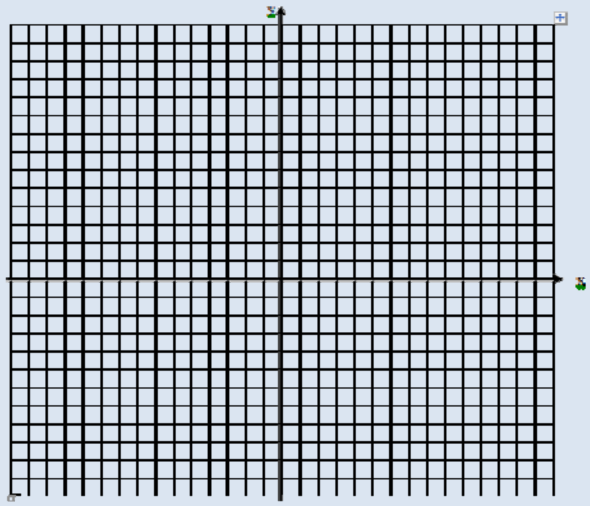
עבור $x<0$ וגם $y>0$ נקבל שהישר $-x+y=R$ תוחם את המעגל ברביע השני.

עבור $x<0$ וגם $y<0$ נקבל שהישר $-x-y=R$ תוחם את המעגל ברביע השלישי.

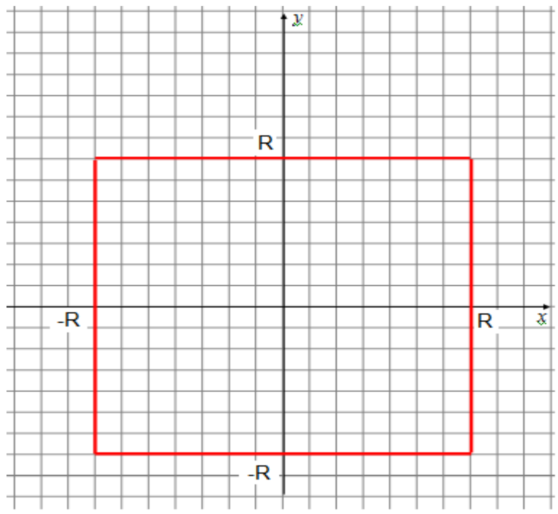
עבור $x>0$ וגם $y<0$ נקבל שהישר $x-y=R$ תוחם את המעגל ברביע הרביעי.

ג. הגדרה 3 של מרחק בין נקודות A ו- B : $l(A,B)=\max\{|x_b-x_a|;|y_b-y_a|\}$.

איך נראה המעגל בהתאם להגדרה 2 של מרחק בין שתי נקודות?



המעגל בהתאם להגדרה 3: $l(A,B)=\max\{|x_b-x_a|;|y_b-y_a|\}$



הסבר:

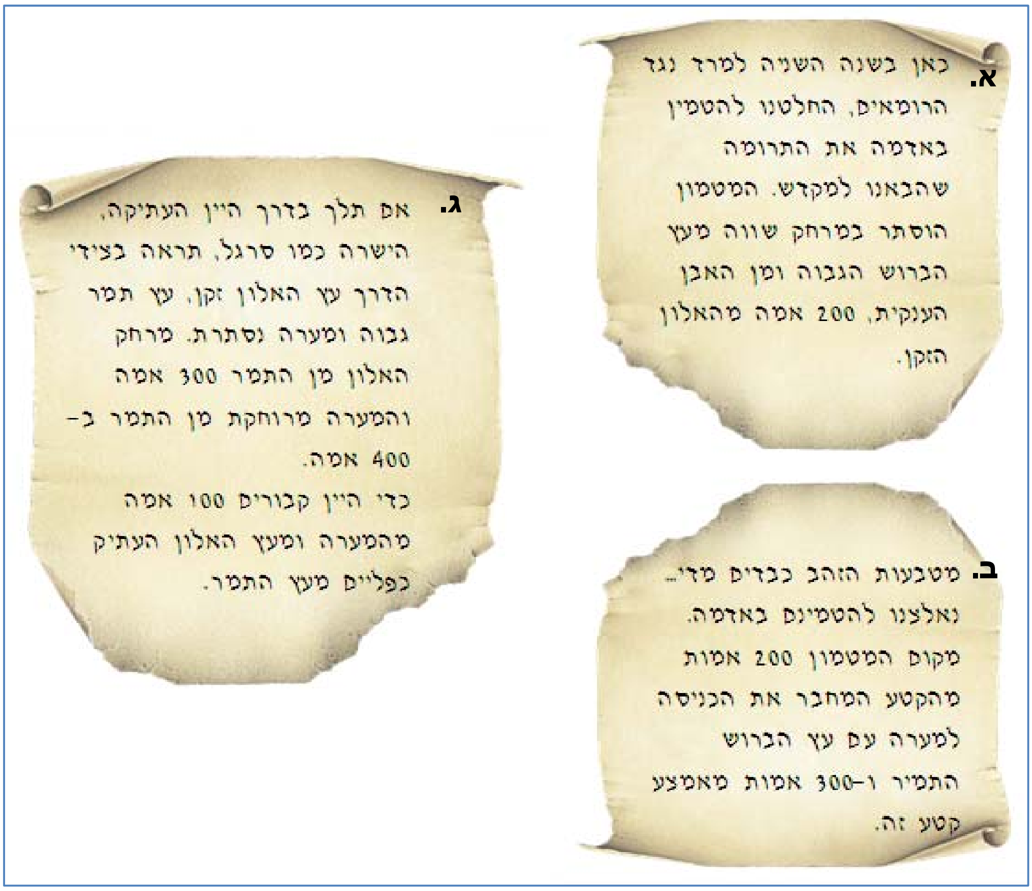
נניח ש: $A(0,0)$ ו-B נקודה כלשהי. בהתאם להגדרה 3

נקבל: $l(A,B)=\max\{|x_b|;|y_b|\}$ נסמן: $l(A,B)=\max\{|x_b|;|y_b|\}=R$

מכאן נובע שלפי ההגדרה הנ"ל עבור כל נקודה השייכת למעגל מתקיים $x=R$ או $x=-R$, או $y=-R$ או $y=R$. קיבלנו שבמקרה הזה ה"מעגל" הוא ריבוע.

סדנה 7: "פיצוח" חפש את המטמון

לקראת חגיגות שנות השישים החליטו ברשות העתיקות לחשוף את תעלומת כתבי הסתרים אר התגלו זה מכבר בחפירות ארכיאולוגיות אי שם בארץ. בחפירות נמצאו שלושה קנקני חרס עתיקים בהם קלפים עם כתבי סתרים המתארים את מקומם של שלושה מטמונים עתיקים. כמו כן, צורפה מפה המתארת את איזור החפירות, שם ע"פ ההשערה, הוטמנו המטמונים. בחידת הכדים תוכלו להיעזר גם ביישומון האינטראקטיבי המצורף מטה.

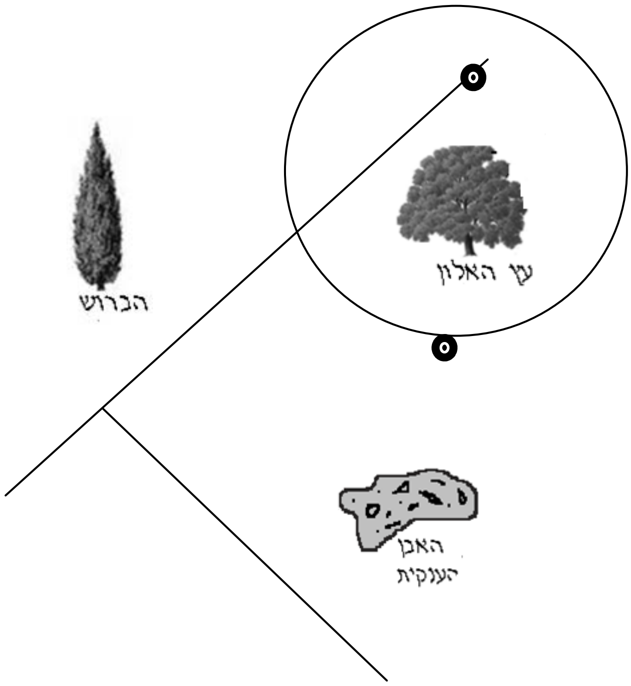


בסיור באתר העתיקות הצליחו לאתר את העצים, האבן הענקית, המערה ואת דרך היין כמתואר במפה המצורפת. ע"פ כתבי החידה, היכן כדאי לדעתכם לחפור כדי לגלות את שלושת המטמונים: תרומת המקדש, מטבעות הזהב וכדי היין?

לפניכם יישום דינאמי: **מפת המטמון** בו תוכלו להיעזר בפתרון חידת הכדים.

פתרונות והנחיות למדריך

א. כאן בשנה השנייה למרד נגד הרומאים, החלטנו להטמין באדמה את התרומה שהבאנו למקדש. המטמון הוסתר במרחק שווה מעץ הברוש הגבוה ומן האבן הענקית, 200 אמה מהאלון הזקן.



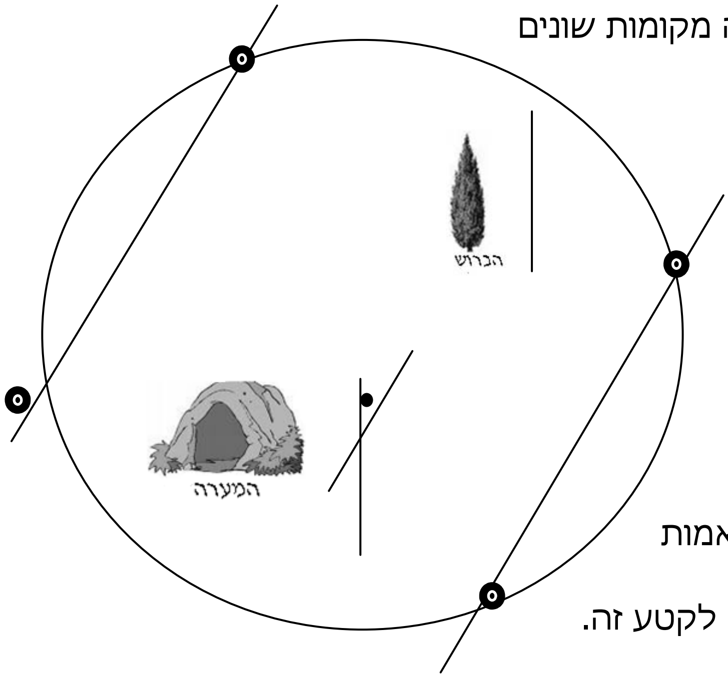
אוסף כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מן הברוש והאבן נמצא על האנך האמצעי לקטע המחבר בין הברוש והאבן.

אוסף כל הנקודות הנמצאות 200 אמה מהאלון מתאר מעגל ברדיוס 200 ומרכזו באלון.

לכן המטמון של תרומת המקדש עשוי להימצא באחד משתי נקודות החיתוך של שני המקומות הגאומטריים הללו, שתי נקודות החיתוך בין האנך האמצעי והמעגל.

ב. מטבעות הזהב כבדים מדי... נאלצנו להטמינם באדמה. מקום המטמון 200 אמות מהקטע המחבר את הכניסה למערה עם עץ הברוש התמיר ו-300 אמות מאמצע קטע זה.

הפעם יהיה עלינו לחפור בארבעה מקומות שונים בכדי לגלות את המטמון.



אוסף כל הנקודות הנמצאות 300 אמה מנקודת אמצע הקטע בין הברוש והמערה מתאר מעגל ברדיוס 300 ומרכזו בנקודה זו.

אוסף כל הנקודות הרחוקות 200 אמות מהקטע הם שני קווים המקבילים לקטע זה.

לכן המטמון של מטבעות הזהב עשוי להימצא בארבע נקודות החיתוך בין המעגל ושני הישרים המקבילים.

ג. אם תלך בדרך היין העתיקה, הישרה כמו סרגל, תראה בצידי הדרך עץ האלון זקן, עץ תמר גבוה ומערה נסתרת. מרחק האלון מן התמר 300 אמה והמערה מרוחקת מן התמר ב-400 אמה. כדי היין קבורים 100 אמה מהמערה ומעץ האלון העתיק כפליים מעץ התמר.

אוסף כל הנקודות הנמצאות 100 אמה מהמערה הוא מעגל ברדיוס 100 ומרכזו בנקודה זו.

אוסף כל הנקודות הרחוקות מעץ האלון פי שתיים מעץ התמר הוא מעגל הנקרא **מעגל אפולוניוס**.

נמצא את משוואת מעגל אפולוניוס בעזרת הנדסה אנליטית:

נמקם את התמר בראשית הצירים (0,0), ע"פ המרחקים הנתונים האלון נמצא ב- (300,0) והמערה נמצאת ב- (-400,0).

$$2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-300)^2+y^2}$$

$$4(x^2+y^2)=(x-300)^2+y^2$$

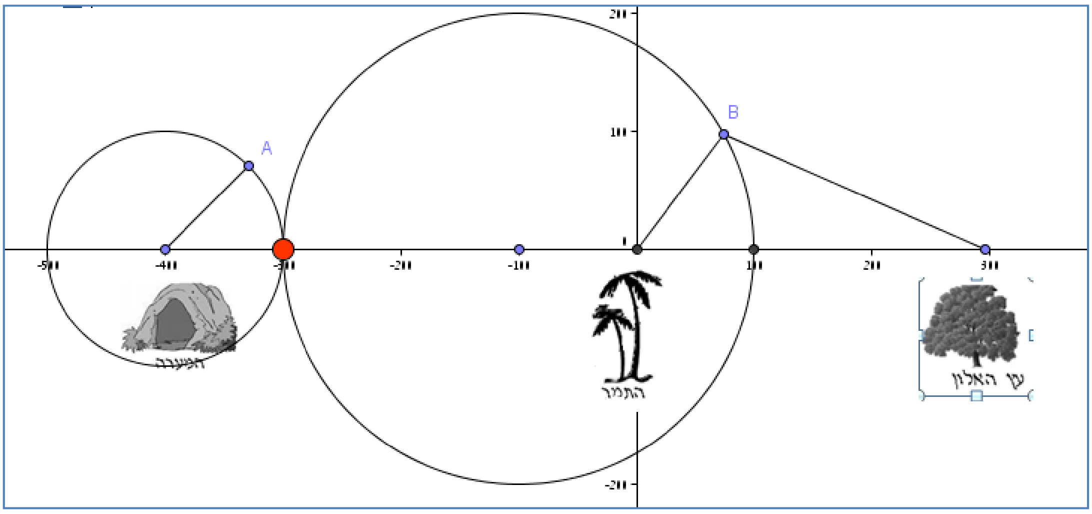
$$3x^2+600x+3y^2=90000$$

$$x^2+200x+y^2=30000$$

$$(x+100)^2+y^2=40000$$

קיבלנו מעגל שמרכזו ב- (-100,0) ורדיוסו 200.

שני המעגלים נחתכים בנקודה אחת בלבד, כלומר משיקים, בנקודה (-300,0) שם הוטמן המטמון!



תוכלו לחקור ולהתרשם מפתרון הבעיה ביישום: **מטמון כדי היין.**

מקורות

- Fishback, W.T.(1969). projective and Euclidean geometry, 2nd edition, New York: Wiley.
- Fred D. Aldrich. (1921). The Teaching Of Locus Problems In Elementary Geometry. *Mathematics Teacher*, 14(4), 200 - 205.
- Hawking, S. (1999). previous Quotes of the day, at http://www.skitman.org
- Moise, E.E. (1990). elementary Geometry from an Advaced Standpoint, 3rd edition, New York: Addison-Wesley
- Stols, G. (2006). Connecting loci with real life, center for improvement, science and Technology Education University of South Africa.
- ויניצקי ולייקין (1996). **על הגדרות (שקולות ולא שקולות) ומושג המשיק.** *על"ה*, מס' 19, עמ' 69 – 73.

רשימת קישורים

- **יישומון בניית בית חדש**

http://www.ngfl-ymru.org.uk/vtc/ngfl/maths/echalk/lociWeb/LociISM/lociISM.html

- **יישומון גבהים במשולש**

http://highmath.haifa.ac.il/Ogdan/mkomot_geometrim/gvahim_bmesolas.ggb

- **יישומון גבהים במקביל**

ggb.bmakbil_gvahim/geometrim_mkomot/Ogdan/il.ac.haifa.highmath//:http

- **יישומון מפת המטמון**

html.treasure/treasure/il.ac.haifa.multimedia//:http

- **יישומון מטמון כדי היין**

http://multimedia.haifa.ac.il/treasure/treasure.html

- **יישומון תיכונים במשולש**

http://highmath.haifa.ac.il/Ogdan/mkomot_geometrim/tihonim_bmesolas.ggb

- **פיתוח בעיה אחת בגאומטריה של המישור**

http://stwww.weizmann.ac.il/manor/sites-and-stories/index.html