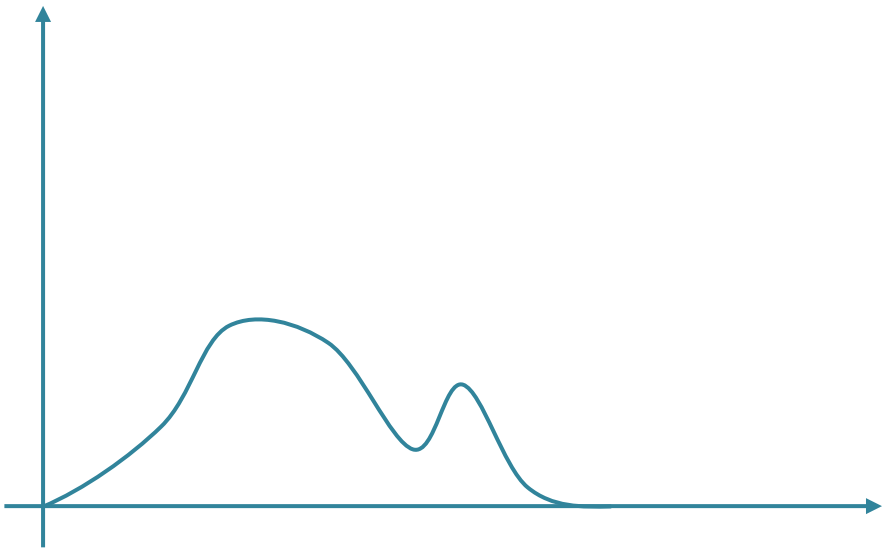
מבוא לפונקציות



מבוא לפונקציות

תוכן עניינים

הקדמה 4

הנושא בתוכנית הלימודים 4

רקע 7

רקע היסטורי ומתמטי 7

רקע דידקטי 12

סדנה 15

הנחיות למדריך 19

מקורות 31

רשימת קישורים 32

הקדמה

"מושג הפונקציה, מאפשר ארגון ומיזוג של רעיונות מתמטיים חשובים ובעלי משמעות עבור התלמידים" (מתוך תוכנית הלימודים של חטיבת הביניים).

יחידה זו מציגה מבוא כללי למושג הפונקציה שהוא מושג בסיסי בלימודי המתמטיקה ושזור לאורך כל תוכנית הלימודים בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה. יחידה זו כוללת רקע מתמטי, היסטורי ודידקטי הקשור גם ליחידות:

- פונקציה ריבועית
- טרנספורמציות ליניאריות

הנושא בתוכנית הלימודים

מושג הפונקציות אינו נלמד בכיתות היסוד אך ניתן למצוא לו ביטוי (או רמז) בתוך פרק הנקרא **חקר נתונים** (ראו **תוכנית הלימודים לבית הספר היסודי**). תחת נושא זה לומדים התלמידים (החל מכיתה ב') לחקור סיטואציות מחיי יום יום, לארגן ולהציג נתונים בטבלה (ייצוג מספרי) ואחר כך להציג אותם בדיאגרמת מקלות (ייצוג גרפי). עיקר השינוי בין המיומנויות הנדרשות בנושא חקר נתונים ניתן לראות בשינויים שבין סוגי המשתנים הנחקרים (משתנה איכותי ומשתנה כמותי, משתנה בדיד, משתנה רציף).

מושג הפונקציה
כיתות יסוד
▪ התלמיד ידע לשרטט (על החלק החיובי של הצירים) דיאגרמת עמודות עבור תופעות שחקר. לדוגמה: בנית דיאגרמה המראה כמה תלמידים בכיתה נולדו באותו חודש (כל עמודה מייצגת חודש והיא מורכבת מריבועים כך שכל ריבוע מתאר ילד שנולד באותו חודש), בניית דיאגרמה העוקבת אחר תופעה לאורך זמן (כמו השתנות הטמפרטורה לאורך היום). ▪ התלמיד יציג תופעות שחקר בייצוגים גרפים שונים (דיאגרמת עמודות כפולה או משולשת) וישתמש בהם לשם השוואה. ▪ התלמיד ידע לקרוא נתונים מתוך דיאגרמה נתונה.

כיתה ז'
▪ התלמיד ידע לסמן ולקרוא נקודה במערכת הצירים וישתמש בהם לצורך קריאת מידע מתוך גרף נתון. ▪ התלמיד יכיר את מושג "ההשתנות" וידע להבחין בין שינוי בקצב קבוע לבין שינוי בקצב לא קבוע בתופעות המוצגות באופן מילולי או גרפי. ▪ התלמיד ידע לבנות ייצוג מספרי לפונקציה בעזרת טבלת ערכים. ▪ התלמיד יכיר את הייצוג הסימבולי של הפונקציה (על-ידי נוסחה). ▪ התלמיד ילמד לזהות עלייה או ירידה של פונקציה (בדרך איכותנית על-ידי הסתכלות על מהלך של גרף). ▪ התלמיד יכיר את שלושת הייצוגים של הפונקציה הקווית וידע לשרטט גרף כאשר נתון הייצוג הסימבולי של הפונקציה. ▪ התלמיד יפתור משוואות קוויות ואי שוויונות בצורה אלגברית וגרפית ויקשר ביניהם.
כיתה ח'
▪ התלמיד ידע לקשר בין שלושת ההיבטים של הפונקציה הקווית: קצב השתנות קבוע, גרף שהוא קו ישר (ולא מקביל לציר ה- y), וייצוג סימבולי מהצורה: $y = mx + b$. ▪ התלמיד יכיר את משמעות השיפוע ויקשר אותו למקדם של x בייצוג הסימבולי. ▪ התלמיד ידע לקשר בין ערכי הפרמטרים m ו- b לבין הייצוג הגרפי של הפונקציה. ▪ התלמיד ידע למצוא הצגה סימבולית של פונקציה קווית לפי שתי נקודות או לעבור מייצוג גרפי להצגה סימבולית. ▪ התלמיד ידע לייצג תופעות באמצעות פונקציה קווית ויפתור בעזרת ייצוג זה בעיות מילוליות או בעיות המתארות תהליכי השתנות. ▪ התלמיד יכיר את הייצוג הסימבולי ($y = ax$) והגרפי של פונקציה קווית המתארת יחס ישר וידע לזהות תופעות וסיטואציות מחיי יום יום המתארים יחס ישר.

- התלמיד יכיר את הייצוג הסימבולי ($y=\frac{k}{x}$) והגרפי של פונקציה קווית המתארת יחס הפוך וידע לזהות תופעות וסיטואציות מחיי יום יום המתארים יחס הפוך.

כיתה ט'
▪ התלמיד ישרטט גרף של הפונקציה $y=x^2$ לפי נקודות המתקבלות מהצבת מספרים בביטויים של הפונקציות. ▪ התלמיד יכיר את הפרבולה $y=x^2$ וייצוגיה השונים (סימבולי, מספרי, גרפי). אפיוני הפרבולה: סימטריה, תחומי עליה וירידה, נקודת מינימום. ▪ התלמיד יכיר הזזות אנכיות: משפחת הפרבולות $y=x^2+c$ ואפיוניהן: סימטריה, תחומי עליה וירידה, נקודת מינימום, נקודות חיתוך עם הצירים (נקודות אפס ונקודת חיתוך עם ציר ה- y), תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות. ▪ התלמיד יכיר הזזות אופקיות: של משפחת הפרבולות $y=(x-p)^2$ ואת אפיוניהן: סימטריה, תחומי עליה וירידה, נקודת מינימום, נקודות חיתוך עם הצירים (נקודת אפס ונקודת חיתוך עם ציר ה- y. ▪ התלמיד יזהה את משפחת הפרבולות $y=(x-p)^2+k$ כשילוב בין הזזות אנכיות ואופקיות. ויכיר את אפיוניהן: סימטריה, תחומי עליה וירידה, נקודת מינימום, נקודות חיתוך עם הצירים (נקודות אפס ונקודת חיתוך עם ציר ה- y), תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות. הקשר של ציר הסימטריה עם נקודות האפס של הפרבולה.

מטרות היחידה

- הכרות עם הרקע ההיסטורי של מושג הפונקציה.
- העמקת הידע המתמטי בתכונות הפונקציה לצורך הוראת המושג.
- המלצות דידקטיות להוראת המושג.
- התנסות בשני היבטים מרכזיים: מהי פונקציה ושלושה ייצוגים של פונקציה: מספרי, סימבולי וגרפי.
- התנסות בסדנה העוסקת בתפיסות הלומד את מושג הפונקציה.

רקע

רקע היסטורי ומתמטי

על ההתפתחות המוקדמת של מושג הפונקציה ניתן ללמוד מפעילויות מתמטיות שהופיעו במתמטיקה של תרבויות קדומות. לדוגמה, בסביבות שנת 2000 לפנה"ס פיתחו המצרים הקדמונים טבלה שבעזרתה התאימו לכל מספר המופיע בטבלה, מספר הופכי, חזקה שנייה, שורש ריבועי, חזקה שלישית, שורש שלישי (Kleine, 1972). במהלך ימי הביניים השתמשו מתמטיקאים בייצוגים גיאומטריים או מילוליים לתאר במונחים כלליים תלות בין כמויות שונות (Youschkevtch, 1976). בשעה שסימנים אלה ואחרים מעידים על התפתחות מסוימת של מושג הפונקציה, רק בסוף המאה השש עשרה נלמדה הפונקציה כאובייקט בזכות עצמו. המונח המקובל לפונקציה לא הופיע במתמטיקה במקרה. בשלהי המאה ה- 16 תחילת המאה ה- 17 מדענים כמו גלילאו וקפלר עסקו בבעיות פיזיקאליות הקשורות לתנועה, ומתמטיקאים חיפשו כלים ליצירת מודלים שיתארו את התופעות בהן צפו. "לידת" החשבון הדיפרנציאלי נחשבת כמקבילה לתחילת ההתפתחות של הרעיון של הפונקציה כפי שמקובל כיום. ניוטון (Newton, 1643-1727) כתב על כמויות מתאימות וכמויות מותאמות בהתייחס למשתנה תלוי ובלתי תלוי, בהתאמה. לייבניץ (Leibniz, 1646-1716) היה הראשון שתבע את המונח פונקציה ב- 1673 והוא עשה זאת על מנת לסמן עקום. דוגמא לכך ניתן למצוא באחת מטענותיו כי "המשיק הוא פונקציה של עקום" (קליינר, 1994). ההתכתבות בין לייבניץ וברנולי (Bernoulli) בין השנים 1694 ל- 1698 מראה כי הם התייחסו לייצוג גדלים תלויים המוגדרים על-ידי ביטויים אלגבריים. מתמטיקאים במאה ה- 18 הגדירו פונקציה באמצעות ביטויים אלגבריים. ניתן ללמוד על כך מהגדרתו של ברנולי מ- 1718: **פונקציה של משתנה היא כמות המורכבת בדרך כלל מהמשתנה ומקבועים.** אוילר (Euler, 1707-1783) תלמידו של ברנולי החליף את המונח "כמות" במונח "ביטוי אנליטי". במהלך המאה ה- 19 התפתחה ההגדרה וכללה פונקציות שאינן בהכרח, רציפות, גזירות או כאלה שניתן להגדירן על-ידי ביטוי אנליטי. דיריכלה (Dirichlet, 1805-1859) היה בין המתמטיקאים שהרחיבו את מושג הפונקציה להתאמה שרירותית. רעיון זה בא לידי ביטוי בפונקציה המפורסמת שלו שנקראה "מלח ופלפל" ויצרה זוגות סדורים בין המספרים

הרציונאליים לאפס ובין המספרים האי רציונאליים ל- 1. במחצית הראשונה של המאה ה- 20 רוב המתמטיקאים חשבו על פונקציה כעל יחסי תלות או התאמה בין משתנים (קליינר, 1994). בהתאם לזאת נוסחה הגדרה באופן הבא: **y נקרא פונקציה של משתנה x, המוגדרת בקטע $a<x<b$, אם לכל ערך של המשתנה x בקטע, מתאים ערך מוגדר של המשתנה y.** בהתאם להגדרה זו חלוקה לזוגות בהן מתקיים קשר בין ערכים מקבוצת המשתנים השנייה לבין ערך אחד או יותר מקבוצת המשתנים הראשונה, נחשבת פונקציה. הדגש הושם על תלות של קבוצת המשתנים השנייה בקבוצת המשתנים הראשונה, כפי שניתן לראות בשימוש במונחים משתנה תלוי ומשתנה בלתי תלוי. למרות שעבודתו של דירכלה במחצית המאה ה- 19 ממחישה את רעיון הפונקציה כהתאמה שרירותית, מתמטיקאים בולטים בתחילת המאה ה- 20 (כמו: Lebesgue, Baire, Borel) תמכו בדרישה כי הגדרת הפונקציה תכלול "חוק" התאמה (Kleiner, 1989).

הרמלי (Hrmely, 1934) התייחס למושג הפונקציה במונחים של התאמה אך הבחין כי התאמה זו אינה חייבת לכלול רק מספרים אלא, יכולה לכלול יחסים בין אובייקטים שונים. במחצית המאה העשרים לוטשה במקצת ההגדרה של הפונקציה תוך שימת דגש על רעיון הקבוצה, שרירותיות ההתאמה והדרישה כי לכל ערך של משתנה בלתי תלוי תהייה תמונה יחידה. הרעיון של הקבוצה הפך לרעיון בסיסי במתמטיקה ולמעשה, נחשב על-ידי כמה מתמטיקאים כבסיסי יותר מזה של רעיון המספרים (May & Van Engen, 1959). בשעה שבדיונים קודמים בנושא הגדרת הפונקציה התרכזו בתלות והתאמה תוך מתן דגש על הקשר לנוסחה וגרף, דיונים מאוחרים יותר התייחסו אל הפונקציה כאל אוסף של זוגות סדורים. ב- 1939 הוצגה ההגדרה לפונקציה של בורבאקי (Nikolaos Bourbakis - שם עט שמאחוריו הסתתרה קבוצה של מתמטיקאים צרפתים במאה העשרים): **תהיינה E ו- F שתי קבוצות, זרות או לא. יחס בין איבר משתנה x של E ואיבר משתנה y של F ייקרא יחס פונקציונאלי ב- y, אם לכל $x \in E$ קיים $y \in F$ יחיד הנמצא ביחס הנתון עם x. ליחס זה (התאמה זו) קוראים פונקציה.**

May & Van Engen (1959), ראו את הגדרת הפונקציה במונחים של זוגות סדורים בתוספת מספר תנאים מספיקים. עוד הם טענו כי על אף שטבלה, גרף, כלל

התאמה או תאור מילולי יכולים לתאר פונקציה אין להתייחס אליהם כאל פונקציה. לדוגמה, פונקציה המתייחסת לאוסף של זוגות סדורים מהצורה (x,y) המקיימים את התנאי ש $y=3x$, או בכתיב המתמטי המקובל $\{(x,y)\mid y=3x\}$.

כיוון שהדיון על פונקציה (ויחסים) התרכז בקבוצות, היה זה טבעי להתייחס לקבוצת האלמנטים הראשונה של הפונקציה (תחום), ואל קבוצת כל האלמנטים בקבוצה השנייה (טווח). גרף ההתאמה הוגדר במונחים של מכפלה קרטזית. לדוגמה, $A\times B$ הוא אוסף כל הזוגות שניתן ליצור על-ידי בחירת רכיב ראשון מ- A ושני מ- B. ההגדרה החדשה של הפונקציה על-ידי זוגות סדורים והתאמה בין קבוצות הפכה את הגדרת הפונקציה למדויקת. המגדירה את הקשר ההפוך, האיחוד, החיתוך וההרכבה של פונקציות.

האופן שבו מתמטיקאים הגדירו פונקציה לא השתנה משמעותית במחצית המאה ה- 20. במספר דיונים שנערכו בין מתמטיקאים נעשה ניסיון להחליף את תיאורית הקבוצות בתיאורית הקטגוריות כיסוד של המתמטיקה. במהלך דיונים אלה הוצעו הגדרות שונות למושג הפונקציה. אך ההגדרה שהוצעה על-ידי בורבאקי נחשבת עדיין כהגדרה כללית והיא ההגדרה שמשתמשים בה במתמטיקה של היום.

על שרירותיות וחד ערכיות

מתוך הסקירה ההיסטורית על התפתחות מושג הפונקציה ניתן לעמוד על שני מאפיינים הכרחיים של הפונקציה: שרירותיות וחד ערכיות (אבן, 1995). האופי השרירותי של הפונקציה מתייחס לקשר שבין שתי הקבוצות עליהן מוגדרת הפונקציה וקובע כי הפונקציה לא חייבת להיות מתוארת על-ידי חוק או תאור גרפי. בנוסף הקבוצות לא חייבות להיות מוגדרות על מספרים.

בטבלה הבאה ניתן סיכום על ההתפתחות ההיסטורית של הגדרת הפונקציה.

רשימת הגדרות שניתנו למושג הפונקציה בנקודות זמן שונות לאורך ההיסטוריה:

שנה	מתמטיקאי	הגדרה
הגדרות המדגישות את מאפיין התלות		
1665	Newton	כל התאמה בין משתנים
1667	Gregory	כמויות המתקבלות מכמויות אחרות על-ידי רצף של פעולות אלגבריות או על-ידי כל פעולה אחרת שניתן לעלות על הדעת
1673	Leibniz	כל שינוי של כמות מנקודה לנקודה על העקום
1697	Bernoulli	כמויות שנוצרו משימוש בביטוי אלגברי או טרנסנדנטלי של משתנים וקבועים
1714	Leibniz	כמויות התלויות במשתנים
1718	Bernoulli	פונקציה של משתנה מסוים כמו כמות המורכבת בדרך כלשהי ממשתנים וקבועים
1748	Euler	נוסחה או ביטוי אנליטי המורכב באופן כלשהו מכמות משתנה ומכמויות מספריים או קבועים המיצגים את הקשר שבין המשתנים
1755	Euler	אם x מסמל כמות משתנה אז כל הכמויות, התלויות באופן כלשהו או נקבעות על-ידי x נקראות פונקציה שלו. אם שתי כמויות תלויות זו בזו בדרך כזו שאם האחרונות משתנות, הראשונות עוברות שינוי בעצמן, אז הכמויות הראשונות נקראות פונקציה של הכמויות האחרונות.
1797	Lagrange	כל ביטוי שימושי לחישוב שבו המשתנים האלה נכנסים בדרך כזו או אחרת.

שנה	מתמטיקאי	הגדרה
הגדרות המדגישות את המאפיינים שרירותיות וחד ערכיות		
1806	Lagrange	קומבינציה של פעולות שחייבת להתבצע על כמויות ידועות כדי לקבל ערכים של כמויות לא ידועות, האחרונים הם רק תכונה של התוצאה האחרונה של החישוב.
1829	Dirichlet	y נקרא פונקציה של משתנה x, המוגדרת בקטע $a < x < b$, אם לכל ערך של משתנה x בקטע, מתאים ערך מוגדר של המשתנה y. כמו כן, אין זה משנה באיזו דרך נוצרה ההתאמה
1917	Caratherdory	חוק התאמה בין קבוצה A למספרים הממשיים
1939	Bourbaki	חוק התאמה בין שתי קבוצות
1939	Bourbaki	תהיינה E ו- F שתי קבוצות, זרות או לא. יחס בין איבר משתנה x של E ואיבר משתנה y של F ייקרא יחס פונקציונאלי ב- y, אם לכל $x \in E$ קיים $y \in F$ יחיד הנמצא ביחס הנתון עם x. אנו נותנים את השם פונקציה לפעולה אשר בדרך זו קושרת לכל איבר $x \in E$ את האיבר $y \in F$ שהוא ביחס הנתון עם x.
1950	Dirichlet/ Bourbaki	כל התאמה בין שתי קבוצות שמתאימה לכל איבר בתחום בדיוק איבר אחד בטווח.

רקע דידקטי

הפונקציה משמשת לייצוג תופעות מחיי היום יום (real–world) ומהווה מבנה מתמטי חשוב (Cooney & Wilson, 1993). עוד, ניתן לעמוד על חשיבות מרכזיותו ודרכי הוראתו של מושג הפונקציה מתוך הסטנדרטים של ה- NCTM (1989), בהם מציגים, לאורך כל תוכנית הלימודים, את הפונקציות כהתאמות בין אלמנטים של שתי קבוצות מצויות, וטוענים כי "הוראת הפונקציות צריכה להתחיל בדוגמאות המצויות בעולמו של התלמיד. דרך פעילויות העוסקות בתיאור מצבים וקשרים מציאותיים אותם ניתן לשרטט בגרף, יקבל התלמיד הזדמנות דרכה יוכל להעריך, את חשיבותן של הפונקציות" (NCTM, 1989 P.154).

וינר (Vinner, 1991) טוען כי ההוראה של הגדרות במתמטיקה בכלל ושל הפונקציה בפרט יוצרות בעיות בלימוד ומייצגות יותר מכל דבר אחר את הקונפליקט בין מבנה המתמטיקה כפי שנתפס על-ידי המתמטיקאים לתהליך הקוגניטיבי. למרות הדגשת הצורך בלימוד ההגדרה המדויקת של הפונקציה, טוען וינר כי יש להיזהר משימוש בהגדרה מופשטת מדי בעת לימוד הנושא. שימוש במושג דינאמי כמו תלות לתיאור פונקציה עשויי לפתח הבנה טובה יותר של המושג. דגשים דומים ניתן למצוא גם בסטנדרטים של ה- NCTM (1989) ולפיהם: "יש לבסס את הרעיון היסודי של הפונקציה בטרם הצגת המונח הפורמאלי והשפה של הפונקציה. את החקירה הלא פורמאלית שהחלו התלמידים בכיתה ז'-ח' ימשיכו בכיתות י- י"ב".

חשיבות הוראת המושג מתוך עולם המושגים של התלמיד מוצאת את ביטויה גם בתוכנית הלימודים. הפונקציה והוראתה השזורה לאורך כל תוכנית הלימודים החל מכיתה ז' מוגדרת באופן הבא: **y היא פונקציה של x אם בחירת ערך מספרי אפשרי של x, קובעת ערך מספרי יחיד בשביל y.** לצד ההגדרה קיימת, **בתוכנית הלימודים**, המלצה ללמד את המושג באמצעות סידרה של דוגמאות המבנות את הנושא ולא להתרכז בלימוד ההגדרה.

המלצות פדגוגיות להוראת מושג הפונקציה

טול ווינר (Tall & Vinner, 1981) מתייחסים להבדל שבין דימוי המושג (concept image) להגדרת המושג (concept definition). הגדרת המושג היא ייצוג פורמאלי של המושג כפי שהוא מופיע בהגדרה, בעוד **שדימוי המושג** הוא הייצוג הקוגניטיבי בו מחזיק הלומד עבור מושג והוא כולל את כל התמונות. הייצוגים הויזואליים, האסוציאציות, הדוגמאות התכונות והתהליכים הקשורים למושג מסוים. לרוב דימוי המושג לא לובש צורה מילולית, אך עשוי להיות כזה כאשר שם המושג מתקשר אסוציאטיבית לביטויים או לרשמים מסוימים. לדעת וינר (Vinner, 1991) ידיעה עמוקה של הגדרת המושג אינה מבטיחה את הבנתו בעוד שיצירת דימוי המושג הינו שלב הכרחי המתפקד כמעין פיגום בדרך לרכישת המושג ועשוי להעיד על רמת ההבנה של התלמיד. דימוי מושג מפותח מכיל קשרים רבים בין מושג למושגים אחרים ונרכש תוך כדי התנסות של התלמיד בפיתרון בעיות ובמשימות קוגניטיביות (זיהוי או בניה). במשימות אלה על התלמיד להשתמש גם בדימוי המושג וגם בהגדרתו. הדרך הטבעית ביותר ללמוד על הגדרת המושג בה מחזיק התלמיד היא על-ידי הפנית שאלה ישירה כגון: מהי פונקציה? לעומת זאת אם נרצה ללמד על דימוי המושג פונקציה (כאמור מדובר בדימוי שאינו מילולי), נצטרך להפנות שאלות כאלה שתגובות הלומד אליהן יחשפו דימוי זה. להלן שתי שאלות לדוגמה שנלקחו ממחקרו של וינר(Vinner, 1991), אותו ערך על תלמידים בכיתות י'- י"א:

1. האם יש פונקציה בה כל מספר השונה מאפס מותאם לריבוע המספר ואפס מותאם ל- (-1)?
2. האם יש פונקציה בה כל מספר חיובי מותאם ל- 1, כל מספר שלילי מותאם ל- (-1) ואפס מותאם לאפס?

לסיכום: מושג הפונקציה הוא מושג מופשט, בעל ייצוגים רבים ובנוסף מאגד בתוכו רעיונות מתמטים רבים. המלצות החוקרים (Tall & Vinner, 1981, Vinner, 1991) לגבי הוראת ההגדרה הן:

- למידה מקושרת לחיי היום של התלמיד (ולא למידה טכנית).
- מודעות לקונפליקט שעשוי להיווצר בין דימוי המושג להגדרת המושג.
- התחלת הלימוד ממתן דוגמאות ודוגמאות נגדיות למושג.
- במידה וההגדרה מסובכת, יש לתת לתלמיד לנסות ולהגדירה.

השימוש בטכנולוגיה להוראת מושג הפונקציה

הטכנולוגיה הקיימת היום בבית הספר מאפשרת ייצוגים של מושגים מתמטיים ולימוד המתמטיקה בעזרת כלי חקירה ממוחשבים. חשיפת הלומד לייצוגים השונים של הפונקציה מהווה מרכיב חשוב בהמלצות הדידקטיות להוראת מושג זה. לדעת ירושלמי (1993) השימוש בכלים טכנולוגיים בלימודי המתמטיקה מאפשר:

- מיפוי וגישור נוח בין הייצוגים השונים של אותה בעיה (ריבוי דוגמאות).
- בכל מערכת רבת ייצוגים, בחירת הייצוג המוביל על-ידי המשתמש.
- עבודה בייצוגים מקבילים. שינוי בייצוג אחד גורר שינוי, בו זמנית, של שאר הייצוגים. למשל, הזזת הגרף משנה את הייצוג הסימבולי ואת טבלת הערכים.
- דילוג בין ייצוגים מקבילים.

המלצה לקריאה נוספת:

המאמר: **"קידום חשיבה רב ייצוגית בלימודי האלגברה"**, אלכס פרידלנדר ומיכל טבח, על"ה 27, תשס"ב 2001.

סדנה

1. לפניכם שני תיאורים של מושג הפונקציה (אין להתייחס אליהם כאל הגדרות מתמטיות מדויקות).
סמנו √ ליד התיאור שלדעתכם משקף טוב יותר את משמעות מושג הפונקציה:

א. פונקציה היא תהליך חישוב, שבו לכל מספר נתון x מתקבל ערך y מסוים.

ב. פונקציה היא מעין טבלה (לפעמים אין-סופית), שבה ליד כל ערך של x רשום ערך y מסוים (כלומר, זהו אוסף זוגות (x,y)).

---

2. כתבו "נכון" או "לא נכון" ליד ההיגדים הבאים:

א. כל פונקציה מבטאה חוקיות מתמטית מסוימת.

ב. כל פונקציה ניתן לבטא בעזרת משוואה.

---

3. האם בכל אחד מהתהליכים הבאים מתקבלת פונקציה? נמקו.

א. לכל מספר טבעי x מחשבים y בצורה זו:

אם x זוגי, אז $y=2x+5$

אם x אי-זוגי, אז $y=x^7+1$

ב. לכל מספר שלם אי-שלילי x מחשבים y בצורה זו:

אם $x=0$, אז $y=3$;

אם $x>0$, אז מוסיפים 2 ל- y שחושב עבור הערך הקודם של x.

ג. לכל מספר טבעי x מתאימים מספר y בצורה אקראית לגמרי (למשל על-ידי זריקת קובייה).

שאלות 1-3 נלקחו מתוך: אנה ספרד, תפיסה תהליכית ומבנית אצל תלמידי תיכון, על"ה 5, 1989, על"ה 6, 1990.

אפשרות נוספת לפעילות שמטרתה חידוד הגדרת הפונקציה, אשר יכולה להחליף את שאלות 1-3:

4. לפניכם תיאורים שונים של פונקציות. בחרו תיאור אחד (או יותר) שלדעתכם אינו מתאר את המושג "פונקציה".
נמקו את בחירתכם לשאר המורים בצוות.

1. פונקציה היא התאמה בין שתי קבוצות מספרים, כאשר לכל מספר מקבוצה אחת מתאים מספר אחד ויחיד מהקבוצה האחרת.

2. פונקציה היא תלות בין שני משתנים, שכאשר נתון ערך של משתנה אחד , מתקבל הערך של המשתנה האחר.

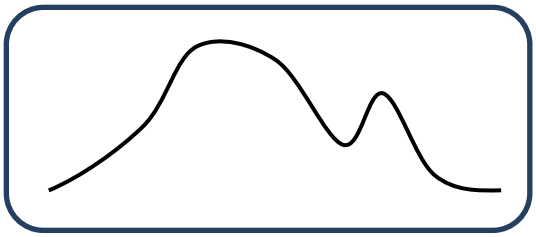
3. פונקציה היא קבוצה של זוגות סדורים (x,y), כאשר לכל ערך של x מתאים לא יותר מערך אחד של y.

4. פונקציה היא שלושה אובייקטים: כלל f ושתי קבוצות A, B, כאשר f מגדיר כיצד לכל איבר מ- A מתאימים איבר אחד ויחיד מ- B.

5. פונקציה היא אוסף של שלושה אובייקטים: כלל f וקבוצות A, B, כאשר כלל f מגדיר כיצד לכל איבר מ- A מתאימים איבר אחד ויחיד מ B וההיפך: כיצד לכל איבר מ- B מתאים איבר אחד ויחיד מ- A.

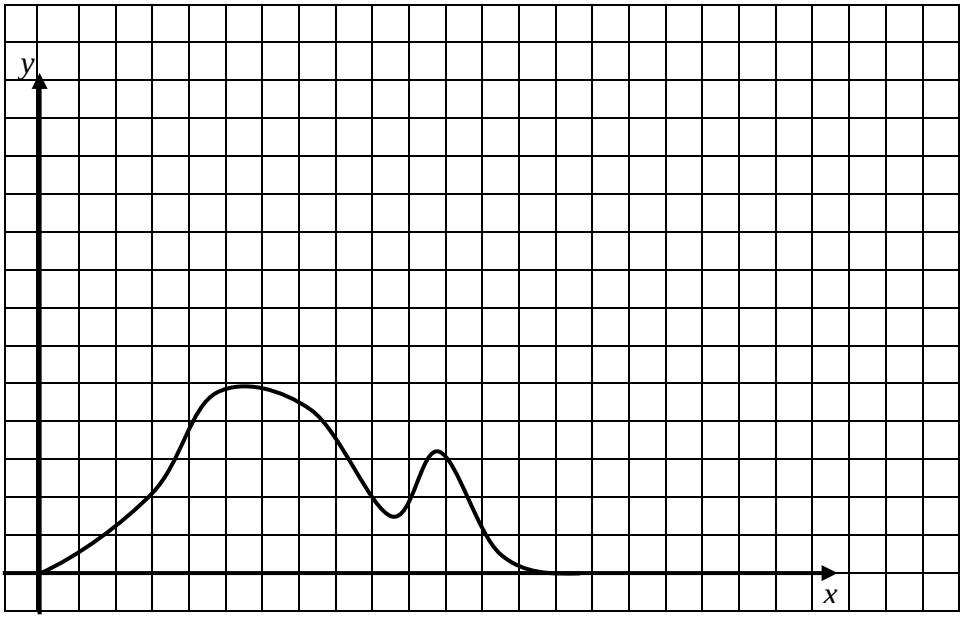
6. פונקציה f היא התאמה בין שני משתנים שאפשר לתאר אותה על ידי גרף רציף כלשהו.

5. הביטו בסרטוט:



א. האם תוכלו לדמיין, מה הוא מתאר?

ב. הסרטוט הוכנס למערכת צירים באופן הבא, האם תוכלו להוסיף ולתאר את משמעותו?



ג. רשמו מה מתאר ציר ה- x ומה מתאר ציר ה- y, לפי ראות עינכם.

ד. לפונקציה ארבעה ייצוגים אפשריים: ייצוג מילולי, ייצוג מספרי, ייצוג גרפי וייצוג סימבולי. נסו לתאר את הסרטוט על-ידי ייצוג מספרי, סימבולי ומילולי (הייצוג הגרפי כבר ניתן).

---

6. נתונה פונקציה המתאימה לכל מספר קודקודים של מצולע את מספר אלכסוניו.

א. מהו תחום ההגדרה של פונקציה זו?

ב. רשמו ייצוג מספרי, גרפי וסימבולי לפונקציה זו.

7. נתונה הטבלה הבאה:

X	0.292929...	1.33333...	1	$\sqrt{2}$	0.5	π	-2.25
y	1	1	1	0	1	0	1

א. האם התיאור המספרי בטבלה מייצג פונקציה? אם כן איזה?

ב. האם תוכלו לרשום התאמה זו בייצוגים השונים? אם כן רשמו.

---

8. איזה מהדוגמאות שהוצגו בשאלות 5-7 ניתן להציג בכיתה? נמקו.

הנחיות למדריך

המטרה של משימות 1-4, היא פיתוח מודעות להגדרות השונות של המושג פונקציה. בסוף היחידה, חשוב שכל מורה יבחר באופן מושכל את הגדרת הפונקציה אותה הוא רוצה להציג בפני תלמידיו, כמובן ברמה התואמת את גיל התלמידים והידע המתמטי שלהם.

1. לפניכם שני תיאורים של מושג הפונקציה (אין להתייחס אליהם כאל הגדרות מתמטיות מדויקות).
סמנו √ ליד התיאור שלדעתכם משקף טוב יותר את משמעות מושג הפונקציה:
א. פונקציה היא תהליך חישוב, שבו לכל מספר נתון x מתקבל ערך y מסוים.
ב. פונקציה היא מעין טבלה (לפעמים אין-סופית), שבה ליד כל ערך של x רשום ערך y מסוים (כלומר, זהו אוסף זוגות (x, y)).

תשובה

למעשה, אף אחד מהתיאורים אינו מתאר את מושג הפונקציה במלואו.

תיאור א' מתאר רק פונקציות אלגבריות, ואינו מאפשר קיום של פונקציות שהן לא אלגבריות, כמו למשל, התאמת צבע עיניים לכל אדם.

תיאור ב' אינו מדויק, למשל אין הקפדה על חד ערכיות.

---

2. כתבו "נכון" או "לא נכון" ליד ההיגדים הבאים:
א. כל פונקציה מבטאה חוקיות מתמטית מסוימת.
ב. כל פונקציה ניתן לבטא בעזרת משוואה.

תשובה

התשובה הנכונה לשני הסעיפים של שאלה זו היא: "לא נכון".

דוגמאות נגדיות:

א: התאמת צבע עיניים לכל אדם.

ב: פונקציה בדידה.

המלצות:

פעילויות אלה פורסמו במאמר של ספרד "תפיסה תהליכית ומבנית אצל תלמידי תיכון" (על"ה 5, 1989; על"ה 6, 1990). המאמר מתאר את הניסוי שהתמקד במושג הפונקציה.

בסדנה אנו ממליצים להציג למורים את שתי המשימות האלה, לאסוף את התשובות (מבלי לפרסם אותם בפומבי) ולאחר מכן להציג למורים את המאמר ואת הממצאים של ספרד. תוך כדי הצגת ממצאי המאמר, כדאי להעלות לדיון שאלות, המפורטות בעמוד הבא (תת-סעיף **שאלות לדיון**).

בחלק א' של המאמר (עמודים 24-28) ספרד מציינת כי בניסוי השתתפו תלמידי כיתה י' (S1, N=31), תלמידי כיתה י"ב (S2, N=29) ותלמידי המכינה באוניברסיטה העברית (S3, N=48). כל הנבחנים למדו מתמטיקה ברמה של 4 יחידות לימוד.

לשאלות אלה הנבחנים התבקשו להשיב בשלב הראשון של הניסוי.

להלן התפלגות התשובות של הנבחנים:

מספרי התשובות השונות שניתנו לכל שאלה

שאלה	תשובה	S1, N=31	S2, N=29	S3, N=48	סה"כ, N=108 %
	א	18	23	39	74%
1	ב	13	6	9	26%
2	<u>א</u> <u>ב</u>				
	כן כן	11	23	22	52%
	כן לא	14	---	13	25%
	לא כן	6	6	10	20%
	לא לא	---	---	3	3%

התשובות לשאלה 1 מראות, כי רוב התלמידים תופסים את מושג הפונקציה בצורה תהליכית: בעיני כשלושה רבעים מכלל המשיבים פונקציה אינה מבנה סטטי, אלא סדרה של פעולות חשבון. מן התשובות שניתנו לשאלה 2 עולה, כי התפיסה התהליכית מלווה בדרישות לקונסטרוקטיביות (כל הנבחנים, פרט לשלושה, השיבו ב"כן" לפחות באחד משני סעיפי השאלה). תוצאות אלה היו די צפויות, עקב העובדה שחישובים מספריים הם מטבעם תהליכים אלגוריתמיים, ובמסגרת בית הספר התלמידים נפגשים בדרך כלל רק עם פונקציות, שעבורן קיים ייצוג סימבולי.

ניתן לזהות אי-עקביות בתשובות לשאלה 2 (כפי שאפשר לראות בטבלה, כ- 45% מהנבחנים השיבו תשובות שונות לשני הסעיפים של שאלה) ספרד מייחסת את אי-העקביות הזו לאי-יכולתו של התלמיד לגשר בין שתי גישות סותרות – זאת... המוצגת על-ידי המורה, וזאת הנרכשת בפועל על-ידי הלומד עצמו. אחת הסיבות, לאי-עקביות, לפי ספרד, היא באי-בהירות המונח "חוקיות מתמטית".

שאלות לדיון:

- מדוע, לדעתכם, תלמידי תיכון תופסים את מושג הפונקציה באופן תהליכי בלבד?
- כיצד אפשר לשנות את תפיסת מושג הפונקציה שלהם?
- אילו סיבות יכולות להיות לאי-עקביות בתפיסת מושג הפונקציה אצל התלמידים?

3. האם בכל אחד מהתהליכים הבאים מתקבלת פונקציה? נמקו.

א. לכל מספר טבעי x מחשבים y בצורה זו:

אם x זוגי, אז $y=2x+5$

אם x אי-זוגי, אז $y=x^7-1$

ב. לכל מספר שלם אי-שלילי x מחשבים y בצורה זו:

אם $x=0$, אז $y=3$;

אם $x>0$, אז מוסיפים 2 ל- y שחישבנו בשביל הערך הקודם של x.

ג. לכל מספר טבעי x מתאימים מספר y בצורה אקראית לגמרי (למשל על-ידי זריקת קובייה).

תשובה:

בכל אחד משלושת התהליכים המתוארים במשימה מתקבלת פונקציה.

תוצאות המחקר: מהמאמר של ספרד (1990)

טבלה 1: תוצאות:

השאלה	מספר הנבחנים שהשיבו ב"לא"
א. לכל מספר טבעי x מחשבים y בצורה זו: אם x זוגי, אז $y=2x+5$ אם x אי-זוגי, אז $y=x^7-1$	24 (50%)
ב. לכל מספר שלם אי-שלילי x מחשבים y בצורה זו: אם $x=0$, אז $y=3$; אם $x>0$, אז מוסיפים 2 ל- y שחישבנו בשביל הערך הקודם של x.	13 (27%)
ג. לכל מספר טבעי x מתאימים מספר y בצורה אקראית לגמרי (למשל על-ידי זריקת קובייה).	40 (83%)

מספר הנבחנים שהשיבו ב"כן" לכל 3 השאלות: 4 (8%).

בטבלה הבאה מוצגים ממצאים של הנבחנים שהשיבו לשאלות בשלילה.

טבלה 2: נימוקים שנתנו על ידי הנבחנים

שאלה א	.1	פונקציה חייבת להיות נתונה על-ידי משוואה אחת (14 נבחנים). ("אלה שתי פונקציות, לא אחת", "פונקציה צריכה להתנהג לגבי ערכים שונים (זוגיים ואי-זוגיים) אותו דבר, ולא לפי משוואות שונות", "אין כאן רציפות");
	.2	לא מתקיימת כאן דרישת החד-ערכיות (8 נבחנים). ("עבור x=3 מקבלים גם y=9 וגם y=127 ", "ייתכנו 2 ערכים לאותו x") נבחנים אלה לא התייחסו להבדלים בין ארגומנטים זוגיים ואי-זוגיים ובצעו את שתי ההתאמות לאותו הארגומנט.
שאלה ב	.1	תהליך זה יוצר סדרה, לא פונקציה (4 נבחנים).
	.2	אין חוקיות מתמטית בתהליך זה (3 נבחנים).
	.3	לא מתקיימת כאן דרישת החד-ערכיות (2 נבחנים).
שאלה ג	.1	פונקציה חייבת לבטא חוקיות מסוימת (24 נבחנים). ("אין כאן כל חוקיות", "אין כלל התאמה", אין קשר הגיוני בין x ל y", "אומנם לכל x מתקבל y אחד, אבל לא בעזרת משוואה");
	.2	לאותו y ייתכנו ערכים שונים של x (בלבול בין דרישת החד-ערכיות לבין תכונת החד-חד-ערכיות) (8 נבחנים)
	.3	לא מתקיימת כאן דרישת החד-ערכית (3 נבחנים)

המלצות:

במהלך הסדנה יכול המדריך לבדוק את תשובות המורים לשתי המשימות הראשונות. בהתאם לתשובות המורים, אפשר להמשיך את הסדנה באחת משתי הדרכים:

א. כל המורים בצוות השיבו תשובות נכונות בשתי המשימות. במקרה זה, לאחר הצגת ממצאים מהמאמר, אפשר לבקש לענות על שאלה 3 בדיון קבוצתי וגם לנסות לשער, מה היו התשובות והנימוקים של הנבחנים בניסוי. לאחר מכן אפשר להציג את הממצאים של ספרד (ראו בהמשך).

ב. מקצת מהמורים בצוות השיבו תשובות לא נכונות לפחות לשאלה אחת בשתי המשימות.

במקרה זה אפשר לדחות את הדיון והצגת הממצאים המתאימים למשימות 1-2, להציג למורים את משימה 3 ושוב לאסוף את התשובות מבלי לפרסמן. לאחר מכן, להציג לצוות את הממצאים של המאמר (משימות 1-2), לבקש מהמורים להביא דוגמאות שידגישו את ההיבט הסטטי של מושג הפונקציה ואז להציג את הממצאים מהמאמר של ספרד (1990), הקשורים למשימה 3. משימה 3 היא למעשה השלב השני בניסוי של ספרד. בשלב זה נבחנו רק תלמידי המכינה (S3, N=48). בעזרת שאלות שבמשימה זו ספרד ניסתה לבדוק, כיצד נתפס המונח "כלל התאמה".

נימוקים שניתנו על-ידי הנבחנים לתשובות השליליות

בעקבות שני שלבי הניסוי, ספרד מסכמת כי לדעת רוב תלמידי התיכון, כלל ההתאמה חייב להינתן על-ידי תבנית מפורשת (משוואה מהצורה $y = f(x)$, כאשר $f(x)$ היא ביטוי אלגברי מסוים).

המספרים שבטבלה מראים כי רק מספר קטן של הנבחנים (8%) הסכימו, כי כל שלוש ההתאמות הן פונקציות. אחוזים גבוהים של תשובות שליליות (במיוחד בשאלות 1 ו- 3), המלוות לרוב בנימוק של חוסר "חוקיות מתמטית" או של העדר משוואה מתאימה, מצביעים פעם נוספת על תפיסה צרה למדי של מושג הפונקציה.

4. לפניכם תיאורים שונים של פונקציות. בחרו תיאור אחד (או יותר) שלדעתכם אינו מתאר את המושג "פונקציה".
נמקו את בחירתכם לשאר המורים בצוות.

הערה: כפי שמופיע ברקע התיאורטי והדידקטי של היחידה, מושג הפונקציה הוא מושג מורכב ומופשט. ההגדרה הפורמאלית (של ניקולה בורבקאי - שם עט שבו השתמשה קבוצת מתמטיקאים צרפתים במאה ה-20) המקובלת היום גם היא לא פשוטה. עם זאת אפשר לבחור להשתמש במהלך ההוראה בהגדרות שונות של הפונקציה. על הגדרה כזו להיות נכונה מתמטית אך מתחשבת גם בהיבטים דידקטיים. מטרת השאלה לעורר דיון בהיבטים מרכזיים של מושג הפונקציה ולנסות ליצור דימוי מושג הקרוב עד כמה שניתן למושג עצמו. עוד על הגדרות ושיקולים דידקטיים קראו ביחידה על מרובעים והגדרות.

1. פונקציה היא התאמה בין שתי קבוצות מספרים, כאשר לכל מספר מקבוצה אחת מתאים מספר אחד ויחיד מהקבוצה האחרת.

לא כל פונקציה מתאימה בין קבוצות מספרים. למשל:

- התאמה בין עיר בישראל ונקודה על מפת ישראל היא פונקציה.
- התאמה בין צורה גיאומטרית סגורה כלשהי לשטחה היא פונקציה.

כדאי לציין גם כי לא כל התאמה בין שתי קבוצות של מספרים היא פונקציה. למשל: התאמה בין הגיל של כל אחד מילדי חיפה למשקלו איננה פונקציה. סביר להניח כי יש בחיפה שני ילדים בני אותו הגיל שמשקלם שונה. הדוגמה לא נראה לי ברור.

2. פונקציה היא תלות בין שני משתנים, שכאשר נתון ערך של משתנה אחד , מתקבל הערך של המשתנה האחר.

טענה זו יכולה לשמש כהגדרה של פונקציה.

פונקציה היא התאמה שאפשר לתאר על ידי ביטוי סימבולי אחד ויחיד לא כל פונקציה אפשר לתאר על ידי נוסחה. למשל:

לכל אזרח ישראל מתאימים את מספר תעודת הזהות שלו. זאת פונקציה שאי אפשר לתאר על ידי ביטוי.

לא כל פונקציה אפשר לתאר על ידי ביטוי אחד ויחיד. למשל:

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x), x<0\\ x, x=0\\ -1, x>0\end{cases}$$

3. פונקציה היא קבוצה של זוגות סדורים (x,y), כאשר לכל ערך של x מתאים לא יותר מערך אחד של y.

טענה זו יכולה לשמש כהגדרה של פונקציה.

4. פונקציה היא שלושה אובייקטים: כלל f ושתי קבוצות A, B, כאשר f מגדיר כיצד לכל איבר מ- A מתאימים איבר אחד ויחיד מ- B.

טענה זו יכולה לשמש כהגדרה של פונקציה.

5. פונקציה היא אוסף של שלושה אובייקטים: כלל f וקבוצות A, B, כאשר כלל f מגדיר כיצד לכל איבר מ- A מתאימים איבר אחד ויחיד מ B וההיפך: כיצד לכל איבר מ- B מתאים איבר אחד ויחיד מ- A.

לא לכל פונקציה יש פונקציה הפוכה.

למשל, הכלל $f(x)=x^2$ מתאים לכל מספר ממשי (קבוצה A) את הריבוע שלו (קבוצה B). כך למספר 2 מתאים מספר 4, אך גם למספר (-2) מתאים מספר 4.

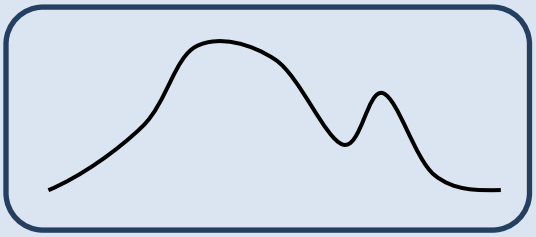
אז מהו המספר מקבוצה A המתאים למספר 4 מקבוצה B?

6. פונקציה f היא התאמה בין שני משתנים שאפשר לתאר אותה על ידי גרף רציף כלשהו.

לא כל פונקציה אפשר לתאר על ידי גרף. למשל, אי אפשר לתאר את הפונקציה "התאמה בין עיר בישראל ונקודה על מפת ישראל" על ידי גרף.

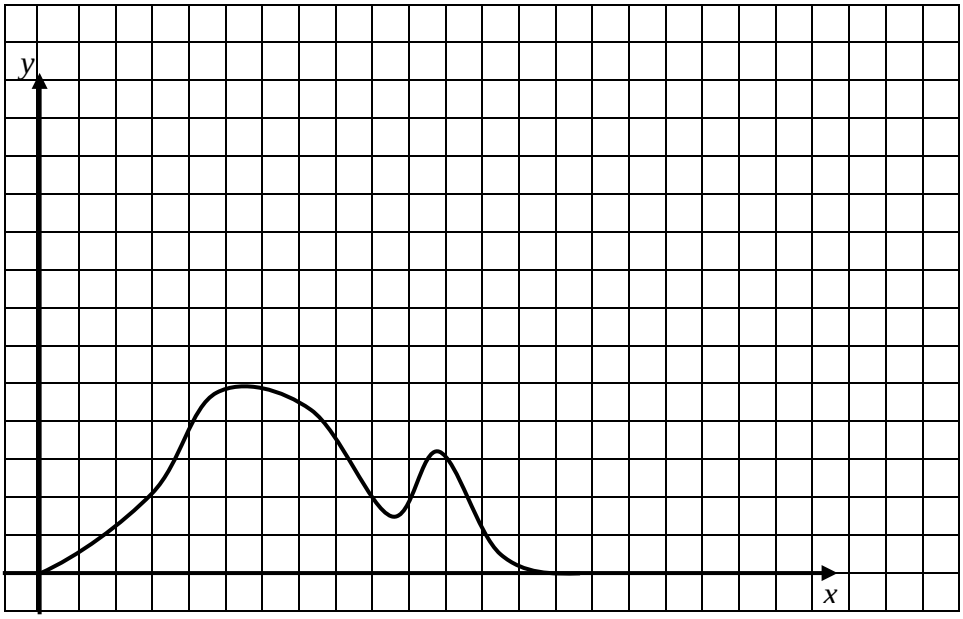
לא כל פונקציה אפשר לתאר על ידי גרף רציף. למשל, הגרף של פונקציה $f(x)=\tan(x)$ איננו רציף.

5. הביטו בסרטוט:



א. האם תוכלו לדמיין, מה הוא מתאר?

ב. הסרטוט הוכנס למערכת צירים באופן הבא, האם תוכלו להוסיף ולתאר את משמעותו?



ג. רשמו מה מתאר ציר ה- x ומה מתאר ציר ה- y, לפי ראות עינכם.
לפונקציה ארבעה ייצוגים אפשריים: ייצוג מילולי, ייצוג מספרי, ייצוג גרפי וייצוג סימבולי. נסו לתאר את הסרטוט על-ידי ייצוג מספרי, סימבולי ומילולי (הייצוג הגרפי כבר ניתן).

הצעה לפתרון:

מטרת פעילות זו והבאות אחריה לתאר פונקציות, שאינן בהכרח יכולות להיות מיוצגות במקביל על-ידי כל אחד מהייצוגים האפשריים לפונקציה: הסימבולי, המילולי, הגרפי והמספרי.

הציור הראשון, שאינו במערכת צירים מציין עקומה היכולה לתאר כל דבר העולה בדמיון המתבונן (סימון עקבות של זוחל, חבל, קונטור של פסגות הרים וכיד הדמיון הטובה).

כאשר אותה עקומה, משורטטת על מערכת צירים, זהו גרף רציף, שבו כל נקודה מייצגת קשר או התאמה בין שיעור ה- x של הנקודה לבין שיעור ה- y של הנקודה.

הגרף יכול לתאר מהירות של כלי תחבורה כלשהו, כאשר ציר ה- x יתאר זמן וציר ה- y יתאר מרחק מנקודת הזינוק של אותו כלי תחבורה.

התיאור המילולי לפונקציה זו, יתאר את מהלך הנסיעה, כאשר נוכל לתאר את השתנות המהירות בהתאם לזמן או למרחק.

התיאור האלגברי, אינו פשוט לשחזור מתוך הגרף. יש למצוא משוואה שתקשר בין הזמן למרחק.

התיאור המספרי, יכול להינתן על-ידי טבלה המתאימה לכל נקודת זמן, את המרחק מנקודת הזינוק.

6. נתונה פונקציה המתאימה לכל מספר קודקודים של מצולע את מספר אלכסוניו.

א. מהו תחום ההגדרה של פונקציה זו?

ב. רשמו ייצוג מספרי, גרפי וסימבולי לפונקציה זו.

הצעה לפתרון

א. תחום ההגדרה של הפונקציה $n \geq 3$.

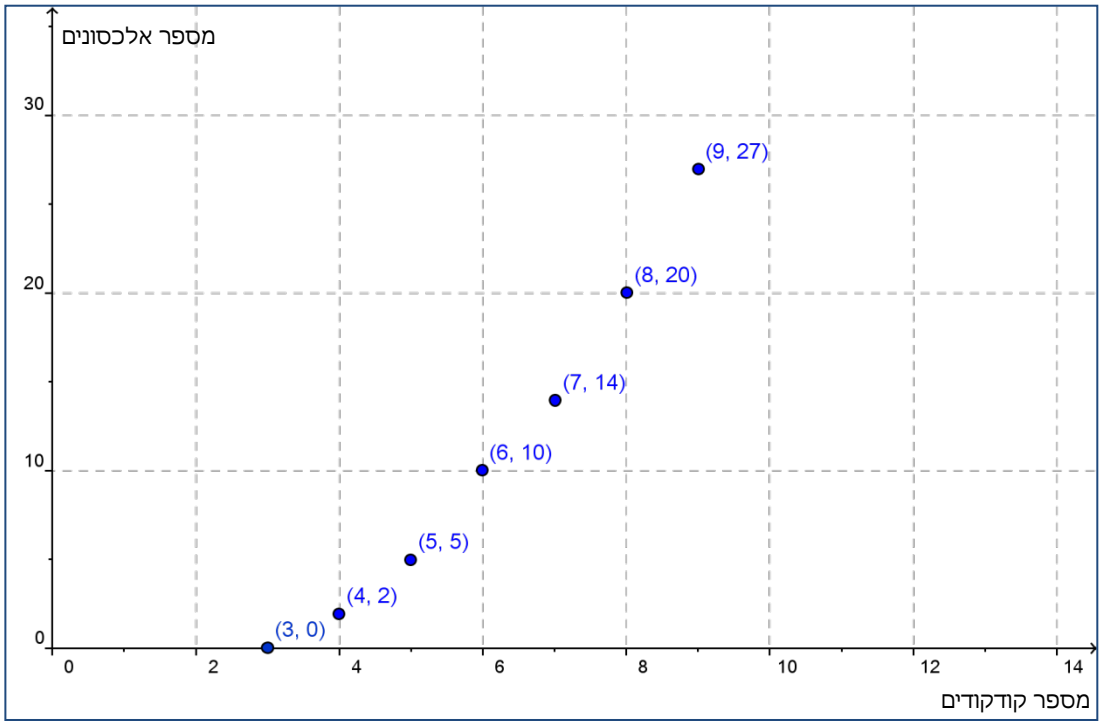
ב. **ייצוג סימבולי:** $f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.

n - מספר קודקודי המצולע. $f(n)$ - מספר אלכסוני המצולע.

ייצוג מספרי:

מספר קודקודים	3	4	5	6	7	8	9
מספר אלכסונים	0	2	5	9	14	20	27

ייצוג גרפי:



7. נתונה הטבלה הבאה:

א. האם התיאור המספרי בטבלה מייצג פונקציה? אם כן איזה?

ב. האם תוכלו לרשום התאמה זו בייצוגים השונים? אם כן רשמו.

הצעה לפתרון:

א. הייצוג המספרי מתאר פונקציה המתאימה למספרים רציונאליים את המספר 1 ולמספרים אי רציונאליים את המספר 0.

ב. ייצוג גרפי, אינו אפשרי כאן בגלל צפיפות ציר המספרים.

ייצוג מילולי ניתן בסעיף א'.

ייצוג סימבולי:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ רציונאלי}\\ 0 & x \text{ אי רציונאלי}\end{cases}$$

התאמה זו נקראת "התאמת דריכלה".

X	0.292929...	1.33333...	1	$\sqrt{2}$	0.5	π	-2.25
y	1	1	1	0	1	0	1

מקורות

- ירושלמי (1993) מחשוב בכיתת המתמטיקה: אפשרויות שבאות בחשבון. על"ה 12 1993, 7-12.
- ספרד.א, תפיסה תהליכית ומבנית אצל תלמידי תיכון, **על"ה 5**, 1989, **על"ה 6**, 1990
- קליינר י. (1994). *מאמרים נבחרים בהסטוריה של המתמטיקה*. בעריכת נ. מובשוביץ-הדר, קשר חם, הטכניון.

- Cooney, T.j. & Wilson, M.R. (1993). Teachers' thinking about function 1: Historical and reserarch perspectives. In: T. Romberg; E. Fennema & T. Carpenter (Eds.), *integrating research on the graphical representation of functions*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.
- National Council of Teacher of Mathematics. (1989). Curriculume and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.). *advanced mathematical thinking*. (pp. 56-81). Dordrecht, The Nrthrlands: Kluwer.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

רשימת קישורים

- **תוכנית הלימודים לבית הספר היסודי**

http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Tochniyot_Limudim/Math_Yesodi/PDF/Mavo.htm

- **תוכנית הלימודים לכיתה ז'**

http://cms.education.gov.il/NR/rdonlyres/99297CA5-D41B-45DB-A223-1AE4B97FFD01/117396/CitaZ.pdf

- אתר **MATHEMATICS FOR TEACHING**

http://math4teaching.com/2010/07/06/introducing-the-concept-of-function/