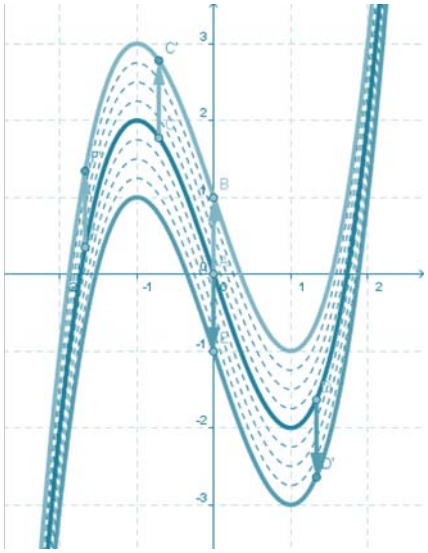
טרנספורמציות
של פונקציות



טרנספורמציות של פונקציות

תוכן עניינים

רקע 4

מהן טרנספורמציות של פונקציות? 5

היסטוריה של טרנספורמציות על קצה המזלג 14

קשיים בתפיסה של טרנספורמציות 15

סדנה 1: טרנספורמציות של פונקציות 21

הנחיות למדריך 25

נספח – דף עבודה 43

מקורות 46

רשימת קישורים 48

רקע

* הסקירה הבאה נשענת על עבודת התזה של גאולה סבר לקראת תואר M.A בהנחייתה של פרופ' מיכל ירושלמי, החוג לחינוך מתמטי, אוניברסיטת חיפה.

אחת המטרות בפיתוח חשיבה מתמטית בבית הספר העל יסודי היא להביא את התלמיד להבין פונקציות ולפעול על פונקציות באופן חופשי ואינטואיטיבי כך שיוכל להשתמש במושג הפונקציה בענפי המתמטיקה השונים. אייזנברג ודרייפוס (Eisenberg & Dreyfus, 1994) קוראים לאינטואיציות ולתובנות לגבי תכונות של פונקציות ופעולות עליהן. הם טוענים כי צריך וניתן לטפח "חוש לפונקציות" אצל תלמידים. חוש לפונקציות דורש, לדעתם, הבנה במספר היבטים:

- הבחנה בין משתנים תלויים ובלתי תלויים.
- השתנות (variation) והשתנות הדדית של שני משתנים (covariation).
- השתנות של השתנות (קצב גדילה).
- הבנה של האפקט של פעולות שונות על פונקציות.

טרנספורמציות הן כלי מתמטי ליצירת משפחה של פונקציות. הן מעודדות להסתכל על הפונקציה כדוגמה או כפרט במשפחה ומהוות כלי לנוע בין הפונקציות בתוך המשפחה.

"חוש לפונקציות" כולל את היכולת לשייך פונקציה למשפחה שלה ולזהות את התכונות המשותפות למשפחה (Confrey, 1994) והטרנספורמציות הן כלי לנוע בין הפונקציות בתוך המשפחה.

על התלמידים:

- להכיר מאגר של פונקציות בסיסיות, לדעת את הנוסחה האלגברית וצורת הגרף המתאימה להן.
- להיות בעלי יכולת להפעיל סדרה של טרנספורמציות על פונקצית הבסיס כדי ליצור פונקציה חדשה.

- להיות מסוגלים לנתח כל פונקציה, מורכבת ככל שתהיה. לזהות בה את פונקצית הבסיס ואת סידרת הטרנספורמציות שהופעלה עליה ובכך לשחזר את תהליך בנייתה.

תלמיד שפיתח יכולות להבין ולדמיין טרנספורמציות על פונקציות בייצוגן הגרפי והאלגברי ומזהה פונקציה כשייכת למשפחה, יוכל להשתמש בטרנספורמציות ככלי שימושי כמעט בכל נושא הנוגע לפונקציות, כגון הכרות עם משפחות שונות של פונקציות, נגזרות, מניפולציות אלגבריות ועוד.

מהן טרנספורמציות של פונקציות?

טרנספורמציות של פונקציות הן פעולות על פונקציות היוצרות משפחה של פונקציות בעלות תכונות משותפות שלא משתנות תחת הטרנספורמציה (invariant). כלומר הטרנספורמציה שומרת על תכונות מסוימות של הפונקציה, למשל, סוג הגידול של הפונקציה (ליניארי, ריבועי, טריגונומטרי וכד'), ובאותה עת משנה תכונות אחרות כגון קצב הגדילה, או ערכים מיוחדים.

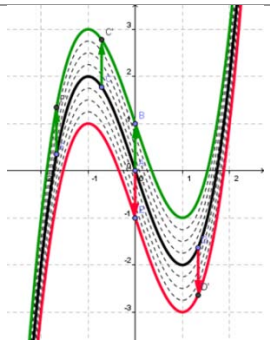
ביחידה זו נעסוק בטרנספורמציות ליניאריות, דהיינו הרכבה של פונקציות ליניאריות על התחום והטווח של פונקצית הבסיס $g(f(x)) = Af(Bx+C)+D$ כאשר A,B,C,D הם פרמטרים.

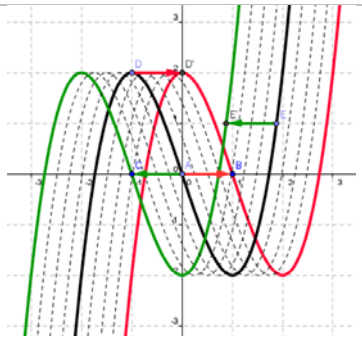
נעסוק כאן בארבעה סוגים יסודיים של טרנספורמציות לינאריות:

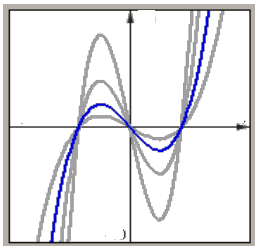
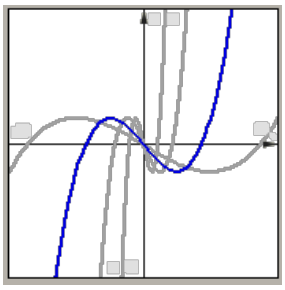
- הזזה אופקית
- מתיחה אופקית
- מתיחה אנכית
- הזזה אנכית

נזכיר את פעולת השיקוף, שהיא מתיחה בגורם שלילי. ובנוסף נעסוק בטרנספורמציות של הרכבת ערך מוחלט על הפונקציה כולה ו/או על חלקים שלה.

נציג כיצד באה לידי ביטוי כל אחת מהטרנספורמציות בייצוגים השונים ובפונקציה המורכבת.

הזזה אנכית		
הייצוג	**תיאור הזזה אנכית**	
סימבולי	תוספת של קבוע לאיבר החופשי של הפונקציה.	$g(x)=f(x)+k$
הגרף	צורת הגרף נשמרת ומוזזת באופן קשיח לאורך ציר ה-y, כך שנשמר מרחק אנכי קבוע בין הגרפים של הפונקציות. אם k>0 ההזזה היא כלפי מעלה, אם k<0 ההזזה היא כלפי מטה. מכאן שנקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר y היא: $(0,\ f(0)+k)$	
טבלת הערכים	תוספת של הקבוע לערך הפונקציה, בטור $f(x)$.	
נקודות	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- x נשאר קבוע ושיעור ה-y גדל/קטן בערך קבוע.	קבוע k - $(x,y)\to(x,\ y+k)$
$y=Af(Bx+C)+D$	D מבטא הזזה אנכית ב- D יחידות.	

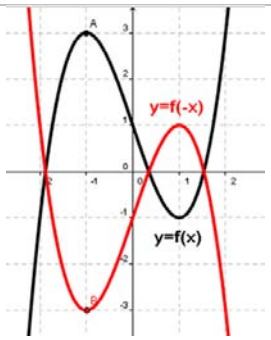
הזזה אופקית		
סימבולי	תוספת של קבוע לארגומנט של הפונקציה.	$g(x)=f(x+k)$
הגרף	צורת הגרף נשמרת ומוזזת באופן קשיח אופקית על ציר ה- x, כך שנשמר מרחק אופקי קבוע בין הפונקציות. אם $k>0$ ההזזה היא שמאלה, אם $k<0$ ההזזה היא ימינה. הזזה אופקית ב-$(-k)$ יחידות. מכאן שנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא $(-k,0)$ (בהנחה שנקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x $((0,0))$).	
טבלת הערכים	תוספת של קבוע למקור, תוספת בטור של ה- x, והפעלת הפונקציה על המקור החדש.	
נקודות	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- y נשאר קבוע, ושיעור ה- x גדל, קטן בערך קבוע.	קבוע k - $(x,y)\to(x-k,\ y)$
$y=Af(Bx+C)+D$	C אחראי על הזזה אופקית אבל לא לבדו, אלא תלוי גם ב-B. גורם ההזזה האופקית הוא: $\left(\frac{-C}{B}\right)$ יחידות.	

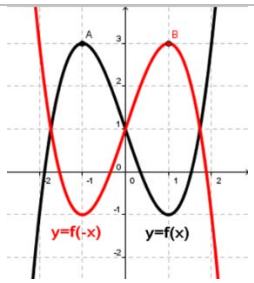
מתיחה אנכית		
סימבולי	הכפלת הפונקציה בקבוע.	$g(x)=k\cdot f(x)$
הגרף	צורת הגרף של הפונקציה המקורית נמתחת או מתכווצת לגובה לאורך ציר y. ככל שערכי $\lvert k\rvert$ גדולים יותר הגרף נראה "גבוה וצר" יותר. עבור $0<\lvert k\rvert<1$ הגרף מתכווץ לאורך ציר y. k שלילי גורם בנוסף למתיחה/כיווץ גם לשיקוף ביחס לציר ה- x.	
טבלת הערכים	ערך הפונקציה מוכפל בקבוע בטור $f(x)$.	
נקודות	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- x נשאר קבוע, ושיעור ה- y גדל/קטן פי הערך של הקבוע.	קבוע k: $(x,y)\to(x,\ ky)$
$y=Af(Bx+C)+D$	A מבטא מתיחה אנכית.	
מתיחה אופקית		
סימבולי	הכפלה של ארגומנט הפונקציה בקבוע.	$g(x)=f(kx)$
הגרף	צורת הגרף נמתחת או מתכווצת לרוחב לאורך ציר x. ככל שערכי $\lvert k\rvert$ גדולים יותר הגרף מתכווץ. כלומר נראה "צר" יותר. עבור $0<\lvert k\rvert<1$ הגרף נמתח לאורך ציר x, מתרחב. k שלילי גורם בנוסף למתיחה גם לשיקוף ביחס לציר ה- y.	
טבלת הערכים	הכפלת הקבוע היא לארגומנט הפונקציה, בטור של ה-x ורק אחר-כך מופעלת הפונקציה.	
נקודות	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- y נשאר קבוע, ושיעור ה-x גדל/קטן פי הערך של הקבוע.	קבוע k- $(x,y)\to\left(\frac{x}{k},\ y\right)$
$y=Af(Bx+C)+D$	B מבטא את המתיחה האופקית, כאשר גורם המתיחה הוא $\frac{1}{B}$.	

שני מקרים פרטיים של מתיחות:

גורם המתיחה (-1)

כפי שצוין קודם, גורם מתיחה שלילי מפעיל גם טרנספורמציית שיקוף כאשר ציר השיקוף הינו אחד מצירי המערכת. גורם המתיחה השלילי השונה מ- (-1) "מסתיר" את העובדה הזו. לכן מעניין לבדוק שני מקרים פרטיים של מתיחות, בהם גורם המתיחה שווה ל- (-1).

מתיחה אנכית – הכפלת פונקציה ב- (-1)		
סימבולי	כפל הפונקציה ב - (-1).	$g(x)=-f(x)$ $g(x)=-1f(x)$
הגרף	צורת הגרף נשמרת, אך הגרף משתקף ביחס לציר ה-x. תחומי עליה וירידה של הפונקציה מתחלפות.	
טבלת הערכים	ערך הפונקציה מוכפל ב- (-1) בטור $f(x)$.	
נקודות	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה-x נשאר קבוע, ושיעור ה- y מתחלף לנגדי שלו.	קבוע 1- יוצר העתקה $(x,y)\to(x,-y)$
$y=Af(Bx+C)+D$ $y=-f(Bx+C)+D$	$A=-1$ מבטא את השיקוף ביחס לציר השיקוף $y=0$.	

מתיחה אופקית – הכפלת הארגומנט ב- (-1)		
סימבולי	הכפלת ארגומנט הפונקציה ב- (-1).	$g(x)=f(-x)$ $g(x)=f(-1x)$
הגרף	צורת הגרף נשמרת והגרף משתקף ביחס לציר ה- y. תחומי עליה וירידה של הפונקציה מתחלפים.	
טבלת הערכים	הכפלה ב- (-1) היא לארגומנט הפונקציה, בטור של ה-x ורק אחר-כך מופעלת הפונקציה.	
נקודות	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה-x מתחלף בנגדי שלו. שיעור ה-y נשאר קבוע.	קבוע -1 יוצר העתקה $(x,y)\to(-x,\ y)$
$y=Af(Bx+C)+D$ $y=Af(-x+C)+D$	$B=-1$ מבטא את השיקוף ביחס לציר השיקוף $x=0$.	

החשיבות בסדר הפעלה של מספר טרנספורמציות

כאמור יש להבחין בין הפעולות החיבוריות הגורמות להזזת גרף הפונקציה ולפעולות הכפליות שגורמות למתיחתו. כמו כן יש משמעות האם הפעולה נעשית על הארגומנט (מקור הפונקציה, שיעור ה- x) אז הפעולה על הגרף היא אופקית, או על ערכה (שיעור ה- y) אז הפעולה על הגרף היא אנכית.

כאשר אנו מפעילים מספר טרנספורמציות בזו אחר זו, יש להפעיל קודם את הטרנספורמציות האופקיות (המופעלות על הארגונט) ורק אחר כך את הטרנספורמציות האנכיות. מבחינת סדר הפעולות, קודם מזיזים אופקית ואחר-כך מכווצים/מותחים אופקית. רק לאחר מכן מותחים אנכית, ובסוף מזיזים אנכית.

	טרנספורמציה אופקית	טרנספורמציה אנכית
הזזה	1	4
מתיחה	2	3

כך לדוגמה, בהעתקה של גרף הפונקציה $f(x)$ ל- $g(x)=2f(3x+1)+5$ יש לבצע את סדרת הטרנספורמציות בסדר הבא:

1. הזזה אופקית 1 שמאלה.
2. מתיחה אופקית בגורם של 3, כלומר כיווץ הפונקציה (פי $\frac{1}{3}$).
3. מתיחה אנכית פי 2.
4. הזזה אנכית ב- 5.

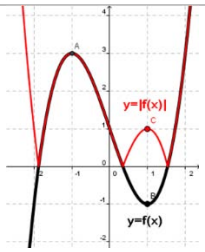
יש לעודד את התלמידים לבצע הצבות בפונקציה כזו ולבחון את סדר החישוב שלמעשה קובע את סדר הפעלת הטרנספורמציות (או סדר הרכבת הפונקציות).

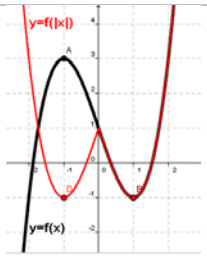
ערך מוחלט וטרנספורמציות של פונקציה

למרות שהנושא לא נמצא בתכנית הלימודים של חטיבת הביניים, נבדוק את השפעת הפעולה "ערך מוחלט" על גרף הפונקציה. נדגיש כי הפעלת ערך מוחלט אינה טרנספורמציה לינארית שתיארנו קודם.

נבדיל בין שני מצבים בסיסיים:

- הפעלת ערך המוחלט על הפונקציה (שיקוף החלק השלילי של הגרף ביחס לציר x).
- הפעלת ערך המוחלט על הארגומנט של הפונקציה (שיקוף החלק השלילי של הגרף ביחס לציר y).

הפעלת ערך מוחלט על כל הפונקציה		
סימבולי	הפעלת ערך מוחלט על ערך הפונקציה.	$g(x)=\lvert f(x)\rvert$
הגרף	עבור הערכים החיוביים של הפונקציה צורת הגרף נשמרת. עבור הערכים השליליים של הפונקציה הגרף משתקף ביחס לציר ה- x.	
טבלת הערכים	הערכים החיוביים של הפונקציה נשארים ללא שינוי, הערכים השליליים של הפונקציה מתחלפים בנגדיים שלהם בטור ה- y.	
נקודות	כל נקודה עבורה ערך הפונקציה חיובי, כלומר נמצאת מעל ציר ה- x ונשארת במקומה. כל נקודה עבורה ערך הפונקציה שלילי, כלומר נמצאת מתחת לציר ה- x ומחליפה את שיעור ה- y שלה בערך הנגדי.	$(x,y)\to\begin{cases}(x,y), & if\ \ y\ge 0\\(x,-y), & if\ \ y<0\end{cases}$
$y=\lvert f(x)\rvert$	בתחומי חיוביות הפונקציה, הפונקציה זהה לפונקציה המקורית. בתחומי שליליות הפונקציה נגדית לפונקציה המקורית.	$\lvert f(x)\rvert\to\begin{cases}f(x), & if\ \ f(x)\ge 0\\-f(x), & if\ \ f(x)<0\end{cases}$

הפעלת ערך מוחלט על הארגומנט של הפונקציה		
סימבולי	הפעלת ערך מוחלט על הארגומנט ורק לאחר מכן – הפעלת הפונקציה	$g(x)=f(\lvert x\rvert)$
הגרף	עבור $x>0$ צורת הגרף נשמרת. עבור $x<0$ הגרף מתקבל על ידי שיקוף של הענף החיובי ביחס לציר השיקוף $x=0$ (ציר ה- y). נוצרת פונקציה זוגית.	
טבלת הערכים	הערכים של הפונקציה עבור $x>0$ נשמרים. הערכים של הפונקציה עבור $x<0$ מתקבלים על ידי הכפלת ארגומנט הפונקציה ב- (-1).	
נקודות	כל נקודה, אשר שיעור ה-x שלה חיובי נשמרת. כל נקודה אשר שיעור ה-x שלה שלילי מתקבלת כשיקוף של ה"מתאימה החיובית" שלה.	$(x,y)\to\begin{cases}(x,y), & if\ x\ge 0\\(x,f(-x)), & if\ x<0\end{cases}$
$y=f(\lvert x\rvert)$	עבור $x>0$ הפונקציה זהה לפונקציה המקורית. עבור $x<0$ ערכי הפונקציה המתקבלים על ידי הכפלת הארגומנט שלה ב- (-1) ולאחר מכן מפעילים את הפונקציה.	$f(\lvert x\rvert)\to\begin{cases}f(x), & if\ x\ge 0\\f(-x), & if\ x<0\end{cases}$

היסטוריה של טרנספורמציות על קצה המזלג

לפני המאה ה- 17 שלטו במתמטיקה שני תחומים נרחבים ונפרדים: הגיאומטריה הסינטטית שמקורה אצל היוונים והאלגברה שמקורה אצל הערבים. דקארט (1596-1650), היה החלוץ שהציע לקשר בין בעיות גיאומטריות עם משוואות אלגבריות באמצעות הצגה של קואורדינאטות. יחד עם התפתחות מושג הפונקציה במאה ה- 17 וה- 18 התרחב השימוש בגיאומטריה של טרנספורמציות. טרנספורמציה הוגדרה כפונקציה, העתקה מקבוצה לעצמה. טרנספורמציה של פונקציות תוארה כהתאמה בין נקודות שעל פונקצית המקור לבין נקודות על הפונקציה המועתקת. כלומר, התאמה בין זוגות סדורים המציינים את הקואורדינאטות של הנקודות. באותה עת חקרו את קבוצת הטרנספורמציות אשר שומרות על הצורה. קבוצות של טרנספורמציות שונות הביאו לפיתוח גיאומטריות נוספות מעבר לגיאומטריה האוקלידית כמו הגיאומטריה ההיפרבולית והגיאומטריה הפרויקטיבית.

הקשר בין גיאומטריה, תורת הקבוצות ופונקציות הוכרז בתוכנית ארלנגן של פליקס קליין (1849-1925). הגיאומטריה הוגדרה כחקר של תכונות המרחב שלא משתנות (invariant) תחת קבוצה של טרנספורמציות. תוכנית ארלנגן שינתה את פני הגיאומטריה מתפיסה בה העצמים בגיאומטריה (כמו נקודות, קווים, משולשים מעגלים וכו') מציינים מקום או צורה, לעיסוק בתורת הקבוצות ובמושגים של העתקות ו"בלתי משתנה" (invariance) תחת טרנספורמציה.

תוכנית ארלנגן הולידה בין היתר את הגדרת הגיאומטריות תחת הטרנספורמציות הבאות:

טרנספורמציה אוקלידית כוללת הזזה, סיבוב ושיקוף. טרנספורמציה אוקלידית משנה את המיקום והכיוון של העצם המשתנה. הצורה אינה משתנה, הזוויות והאורכים נשמרים. ישר מועתק לישר, מעגל מועתק למעגל.

טרנספורמציה אפינית (Affine) מכלילה את הטרנספורמציה האוקלידית. תחת טרנספורמציה אפינית ישרים מועתקים לישרים אך מעגל מועתק לאליפסה. היא שומרת את כל הנקודות המועתקות על אותו ישר ועל אותו יחס של המרחקים בין הנקודות. האורך והזווית של העצם אינם נשמרים.

בתכנית הלימודים לכיתה ט' מטפלים בטרנספורמציות האפיניות **הזזה ומתיחה** של פונקציות בלבד ומבחינים בין טרנספורמציות אופקיות ואנכיות. ישנן טרנספורמציות בגיאומטריות אחרות המתנהגות אחרת, למשל: **טרנספורמציה פרויקטיבית** היא כללית יותר. יכולה להעתיק מספר סופי של נקודות לאינסוף ולהפך. בטרנספורמציה זו צורת העצם מתעוותת ואינה נשמרת. ישנן גם טרנספורמציות של פונקציות שאינן גיאומטריות, שבהן לא נעסוק כאן כגון: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

קשיים בתפיסה של טרנספורמציות

לימוד הטרנספורמציות של פונקציות נועד לפתח אצל התלמיד את החוש לפונקציות ולאפשר לו פתרון בעיות בתחומים שונים. עם זאת נסקור כעת מספר קשיים שהוצגו בספרות. הכרת הקשיים תהווה בסיס ליצירת מערך הוראה מתאים.

תנאי מקדים להבנת הטרנספורמציות:

קושי אחד בלימוד נושא הטרנספורמציות של פונקציות עולה כאשר נשוא הפעולה, מושג הפונקציה, אינו מופנם כראוי. אייזנברג ודרייפוס (Eisenberg & Dreyfus, 1994) טוענים שלתלמידים צריכה להיות התנסות מוקדמת עם סוג הפונקציות עליהן הם מפעילים את הטרנספורמציות והכרות עם תכונותיהן בייצוג הגרפי ובייצוג הסימבולי כמו גם היכולת לקשר בין הייצוגים. לראיה, הם מצאו שתלמידים שלמדו את הפונקציה הריבועית בהרחבה, הצליחו לבנות את התבנית $g(x)=a(x-d)^2+e$ ולנתח את השפעת הפרמטרים על הגרף, אך לא הצליחו לזהות ולבנות טרנספורמציות של פונקציות מסוגים אחרים.

Baker, Hemenway & Trigueros (2000) בדקו אצל תלמידיהם את רמת ההבנה של מושג הפונקציה לפי הגישה של APOS (Action-Process-Object-Schema). על-פי גישת APOS בתחילה התלמיד תופס את המושג כפעולה, בהמשך כתהליך המתאר את הפעולה, וברמה הגבוהה תופס את המושג כאובייקט העומד בפני עצמו. הם מצאו שהתלמידים הצליחו יותר בטרנספורמציות על פונקציות ליניאריות וריבועיות מאשר על פונקציות אחרות. הסיבה לכך, לדבריהם, שהתלמידים למדו בעבר פונקציות אלו בהרחבה ורמת הבנתם את פונקצית הישר והפרבולה הייתה ברמת תהליך-אובייקט. לעומת זאת, עבור פונקציות אחרות, התלמידים גילו קשיים בזיהוי הפונקציה שהופעלה

עליה טרנספורמציה. הלומדים הסתכלו על הפונקציה המועתקת כעל פונקציה חדשה לגמרי. הם מצאו כי תלמידים שאינם תופסים את מושג הפונקציה כאובייקט, לא הצליחו לזהות טרנספורמציות על פונקציות גם לאחר שלמדו במפורש את הנושא. התלמידים לא הצליחו לזהות את התכונה הקבועה (invariance) של הטרנספורמציה. גם אם הכירו את סוגי הטרנספורמציות, לא השתמשו בכך לשם פתרון בעיות.

ראיה סטטית מול ראיה דינאמית:

אייזנברג ודרייפוס (Eisenberg & Dreyfus, 1994) מבחינים בין ראיה סטטית וראיה דינאמית של טרנספורמציות. ראיה סטטית של טרנספורמציות משווה בין שני מצבים קפואים, הישן והחדש, הפונקציה המקורית והפונקציה שהיא התוצר של הטרנספורמציות שהופעלו על פונקצית המקור. ראיה דינאמית של טרנספורמציות מדמה את התהליך בו הועתקה הפונקציה המקורית, תוך מעבר בין מצבי הביניים של סדרת הטרנספורמציות שהופעלה. בראיה דינאמית אפשר לבצע ממש (בדמיון או באמצעות כלים טכנולוגיים) הדמיה רציפה של הזזות, מתיחות וכיווצים המשנים את פונקצית המקור לפונקציה החדשה. ראיה סטטית מעידה על תפיסה של הטרנספורמציה כפעולה ואילו ראיה דינאמית מעודדת להסתכל על הטרנספורמציה כתהליך.

Goldenberg (1988) תוהה מה תלמידים רואים כאשר הם מסתכלים על גרפים של פונקציות וטוען כי הסתכלות סטטית על תמונת הגרפים עשויה לגרום לאשליה ולבלבול אצל תלמיד.

אייזנברג ודרייפוס (Eisenberg & Dreyfus) הראו גם כי תלמידים הנוטים להסתכל על טרנספורמציות באופן סטטי, כטרנספורמציה של גרף ממיקומו התחלתי למיקומו הסופי, גילו קושי לזהות טרנספורמציות כאשר נתקלו בהן. הם הסתכלו על הגרף שהתקבל במצב הסופי, כתוצר של הטרנספורמציה עצמה, ולא של התהליך בו נבנה הגרף. לפיכך יש לעודד אצל התלמידים ראיה של הטרנספורמציות כתהליך דינאמי, המשנה כל נקודה למיקומה החדש דרך סידרה של מצבי ביניים.

Baker et el. (2000) מצאו כי תלמידים בעלי הבנה של פונקציות ברמה גבוהה של תהליך או אובייקט, היו מסוגלים להבין את רעיון הטרנספורמציות באופן דינאמי. הם יכלו לדמיין כיצד ישתנה העקום או מיקומו כאשר מפעילים עליו טרנספורמציה, דבר המעיד לדבריהם על הבנה ברמה של תהליך את רעיון הטרנספורמציות.

Borba (1993) מוסיף וטוען שהגישה בה חוקרים את התבנית האלגברית והשפעתה על הגרף (אלגברה ← גרפים) מעודדת ראיה סטטית של טרנספורמציות. והסתכלות על ההשוואה בין שני מצבים לפני ואחרי הטרנספורמציה, כלומר עבור כל שינוי של הפרמטר מסתכלים על התוצאה המתקבלת. ואילו הגישה בה חוקרים טרנספורמציות ישירות על הגרפים (גרפים ← אלגברה) מעודדת ראיה של הטרנספורמציות כתהליך דינאמי.

טרנספורמציות של עצם גיאומטרי

טרנספורמציות של גרפים הן טרנספורמציות גיאומטריות של המישור כולו על עצמו, כלומר כל נקודות המישור מועתקות על נקודות המישור והאפקט הנראה לעין הוא של נקודות הגרף בלבד. מחקרה של Edwards (2002) בנושא טרנספורמציות גיאומטריות הראה שתפיסה מתמטית זו שונה מאד מתפיסתם האינטואיטיבית של התלמידים.

מחקרים מראים כי תלמידים נוטים לתפוס את הגרף כעצם גיאומטרי שלם המונח על המישור הקרטזי (Yerushalmy, 1993, עמוד 55) ומשום כך נוטים גם לראות את הזזתו כהזזת עצם קשיח על פני המישור. גם עבור מתיחות התלמידים עשויים לאמץ דימוי מחיי היום יום. Goldenberg and Kilman (1990) ניתחו תפיסות של תלמידים את הגרף ותיארו כיצד תלמידים מתייחסים לגרף כעצם פיסי ובעזרת זכוכית מגדלת מטפורית, מותחים (או משנים קנה מידה) של גרפים ומוצאים תכונות "פיסיות" של הגרף. לפיכך, הזזות ומתיחות של גרפים עשויות להיתפס כפעולה על עצמים פיסיים גיאומטריים.

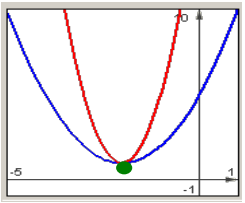
Edwards (2002) דיווחה במחקרה כי תלמידים שהפעילו טרנספורמציות באופן ישיר על עצמים גיאומטריים באמצעות כלים ממוחשבים (microworlds) התייחסו לצורות הגיאומטריות מתוך הבנות חושיות ואינטואיטיביות שלהם את המרחב. היא מצאה שתפיסתו של התלמיד דומה לתפיסת הגיאומטריה המסורתית שרווחה לפני המאה ה-19 לפיה הצורה הגיאומטרית היא עצם פיסי המונח על המישור, וטרנספורמציה שלה משמעה תנועה של הצורה על פני המישור. השוואה בין תפיסת התלמידים ותפיסת המתמטיקאים המודרניים מתוארת בטבלה הבאה:

טרנספורמציות בעיני התלמיד	טרנספורמציות בעיני המתמטיקאי
המישור ריק, בלתי נראה ומשמש כרקע.	המישור הוא קבוצה של נקודות.
צורות גיאומטריות מונחות על המישור.	צורות גיאומטריות הן תת קבוצות של נקודות במישור.
טרנספורמציות הן תנועות פיסיות של צורות גיאומטריות על פני המישור.	טרנספורמציות הן מיפוי של כל נקודות המישור (האפקט הנראה על תת הקבוצה).
ה"עצמים" הגאומטרים הם נקודות, קווים, מעגלים, משולשים וכו'. כמו גם גרפים.	ה"עצמים" הגיאומטריים הם קבוצות של טרנספורמציות.

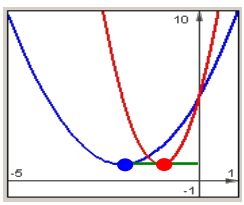
טבלה: השוואה בתפיסת הטרנספורמציות אצל התלמיד ואצל המתמטיקאי

לדעת Edwards "מיס-קונספציות" שגילו התלמידים בנושא נעוצות בשוני בין המתמטיקה המודרנית שלפיה מעוצב הכלי הממוחשב לבין תפיסתו החושית של התלמיד. כדוגמה למיסקונספציה כזו, היא הביאה את הקושי של תלמידים ומומחים גם יחד לתפוס סיבוב של צורה גיאומטרית סביב נקודת מרכז שרירותית המרוחקת מהצורה עצמה, דבר המנוגד להתנסויות החושיות מחיי היום יום.

במחקר ההוראה של Borba (1993) בנושא תפיסת הטרנספורמציות התקשו התלמידים להבין את אופן פעולת המתיחה כאשר הכלי הממוחשב דרש קביעה שרירותית של קו עוגן. קו העוגן הוא הקו (שאינו בהכרח חלק מהגרף) שנשאר קבוע במתיחה ושאר נקודות המישור נמתחות במרחק פרופורציוני ממנו. התלמידים התקשו למצוא היכן למקם את קו העוגן כך שהגרף יתקבל במקום הרצוי ולקשר לתבנית האלגברית המורכבת. הסבר אפשרי לקשיי התלמידים בהבנת קו העוגן, דומה לזה שנתנה Edwards לגבי טרנספורמציות גיאומטריות, קו העוגן אמנם הולם את ההגדרה המתמטית המודרנית אך מנוגד לתפיסה החושית של הלומד.



צפיית התלמיד



מתיחה כאשר העוגן הוא ציר y.

בכלים הממוחשבים בספר האלקטרוני (Yerushalmy, Katriel & Shternberg 2003) קו העוגן נקבע להיות ציר ה- y. גם אז נוצרת הפתעה כאשר מתיחה של פרבולה מזיזה את הקודקוד בניגוד לציפייה האינטואיטיבית שמתיחת הפרבולה תהיה דרך הקודקוד.

יתרונה של הצגה זו (מתיחה בעוגן קבוע בציר y) הוא בכך שהתבנית האלגברית המתארת את הטרנספורמציות ($y = Af(Bx + C) + D$) נוחה יותר לניתוח ומעודדת לראות את האבחנה בין טרנספורמציות אופקיות לאנכיות.

Edwards טוענת שיש לתת תשומת לב לפער ההבנות בין המתמטיקה המודרנית ותפיסות התלמיד הן בעיצוב הכלים הטכנולוגיים והן בשיטות ההוראה. Borba (1993) סובר שבגישה שהוא מציע לעידוד יכולות הוויזואליזציה של הטרנספורמציות (גרפים ← אלגברה), התלמידים מסוגלים להתמודד עם העיוות של הגרף שנוצר מטרנספורמציה של המישור כולו (כמו שינוי קנה המידה). יתרה מכך, הם גם עשויים להשתחרר מהדימוי של הגרף כעצם קשיח, ובאופן זה יראו את הגרף כתופעה התלויה ביחידות ובקנה המידה של מערכת הצירים.

מה קשה יותר?

חוקרים שעסקו בהוראת טרנספורמציות של פונקציות עסקו בשאלה איזו טרנספורמציה יותר קשה להבנה וניסו לנתח את מקורות הקושי.

Eisenberg & Dreyfus (1994) בנו היררכיה של הטרנספורמציות לפי דרגות קושי, לפיה טרנספורמציות אנכיות הן הקלות ביותר להבנה, אחריהן טרנספורמציות אופקיות ולבסוף השילוב ביניהן. הם טוענים שדרגות הקושי נובעות ממורכבות התהליכים הויזואליים של הטרנספורמציות.

Baker et al. (2000) טוענים כי טרנספורמציות אנכיות קלות יותר עבור התלמידים כי הן פעולות המופעלות ישירות על פונקצית הבסיס. לעומת זאת, הטרנספורמציות האופקיות הן פעולות מסובכות להבנה עבור התלמידים, כי הן מורכבות מפעולות על המשתנה הבלתי תלוי של הפונקציה, ועל התוצאה מפעילים את פונקצית הבסיס, ורק אז מתקבלת תוצאת הטרנספורמציה.

Confrey (1994) עסקה במחקרה בחקירה של טרנספורמציות מתוך המבט הוויזואלי, מצאה כי בדרך כלל תלמידים מצליחים לתפוס הזזות באופן אינטואיטיבי, אך מתקשים

להתמודד עם מתיחות. מבחינת הגרפים הזזות שומרות על צורת הגרפים כמות שהיא, רק משנה את מיקומם במערכת הצירים. לעומת זאת במתיחות צורת הגרף משתנה יחד עם מיקומה.

האפקט של הזזה אופקית $g(x)=f(x+k)$ מפתיע רבים, תלמידים ומורים גם יחד. הם מצפים שכאשר k חיובי, התזוזה של הגרף בהזזה האופקית תהיה בכוון החיובי, באופן דומה למתרחש בהזזה אנכית. האינטואיציה הרווחת היא, שהגרף $f(x+3)$ אמור היה לזוז 3 יחידות ימינה בכוון החיובי, ולא להפך (Zazkis 2003, Borba 1993). גם כיוון המתיחה האופקית יוצר בלבול: האם מתיחה אופקית בגורם 2, $g(x)=f(2x)$, תרחיב את גרף הפונקציה או תכווץ אותו? (Confrey 1994).

סדנה 1: טרנספורמציות של פונקציות

1. נתונה הפונקציה $f(x)$ כלשהי.

הפונקציה $g(x)$ נוצרה על ידי טרנספורמציות ליניאריות על $f(x)$:

$$g(x)=a\cdot f(bx+c)+d$$

היעזרו **ביישום הדינאמי** וענו עבור כל פונקציה על השאלות הבאות:

א. שרטטו במערכת צירים אחת את הגרף של $f(x)$ והפונקציה המועתקת $g(x)$.

ב. עקבו אחר הנקודה $(0,0)$ לאיזו נקודה היא מועתקת?

ג. עקבו אחר נקודה (x,y) כלשהי, ורשמו את שיעורי הנקודה המועתקת באופן כללי.

1) $g(x)=f(x)+1$ 2) $g(x)=f(x+1)$ 3) $g(x)=2f(x)$

4) $g(x)=f(2x)$ 5) $g(x)=f(-x)$ 6) $g(x)=-f(x)$

ד. שנו ביישום הדינאמי את הפונקציה ובדקו את מסקנותיכם עבור פונקציות שונות.

---

2. בכל סעיף מוצג שינוי של ערכי הנקודות.

1) $(x,y)\to(x+1,\ y)$ 4) $(x,y)\to(2x,\ y)$

2) $(x,y)\to(x,\ y-2)$ 5) $(x,y)\to(x,\ 0.25y)$

3) $(x,y)\to(x-2,\ y+3)$ 6) $(x,y)\to(3x,\ y-1)$

א. האם השינוי המוצג מהווה טרנספורמציה ליניארית של פונקציה?

ב. אם כן – איזו טרנספורמציה. רשמו את הביטוי האלגברי המתאים לטרנספורמציה זו.

---

3. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע הסגור [-1, 2].

מצאו את תחומי ההגדרה של הפונקציות הבאות ונמקו את תשובתכם:

1) $g(x)=f(x)+1$ 2) $g(x)=f(x+1)$ 3) $g(x)=2f(x)$

4) $g(x)=f(2x)$ 5) $g(x)=f(-x)$ 6) $g(x)=-f(x)$

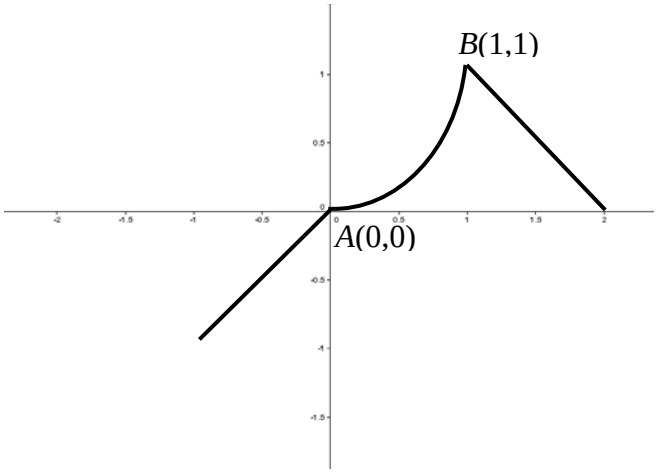
7) $g(x)=|f(x)|$ 8) $g(x)=f(|x|)$ 9) $g(x)=f(1-x)$

10) $g(x)=f(1-2x)$ 11) $g(x)=2f(1-2x)$ 12) $g(x)=f(1-|x|)$

---

4. נתון גרף הפונקציה $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[-1;0) \\ x^2, & x\in[0;1) \\ 2-x, & x\in[1,2] \end{cases}$$



כתבו בכל סעיף לאן יועתקו הנקודות A ו- B, ובנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

1) $g(x)=f(x)-1$ 2) $g(x)=-f(x)$ 3) $g(x)=|f(x)|$

4) $g(x)=f(x-2)$ 5) $g(x)=f(2x)$ 6) $g(x)=f(-x)$

7) $g(x)=2f(x)$ 8) $g(x)=f(|x|)$ 9) $g(x)=f(1-x)$

.5

א. הוכיחו כי גרף של כל פונקציה רציונאלית $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, $(c\neq 0)$ חופף לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{k}{x}$, כאשר $k=\frac{bc-ad}{c^2}$ ומתקבל ממנו על-ידי הזזה.

ב. שרטטו גרפים של הפונקציות הבאות בעזרת טרנספורמציות:

1) $g(x)=\frac{x}{x-1}$

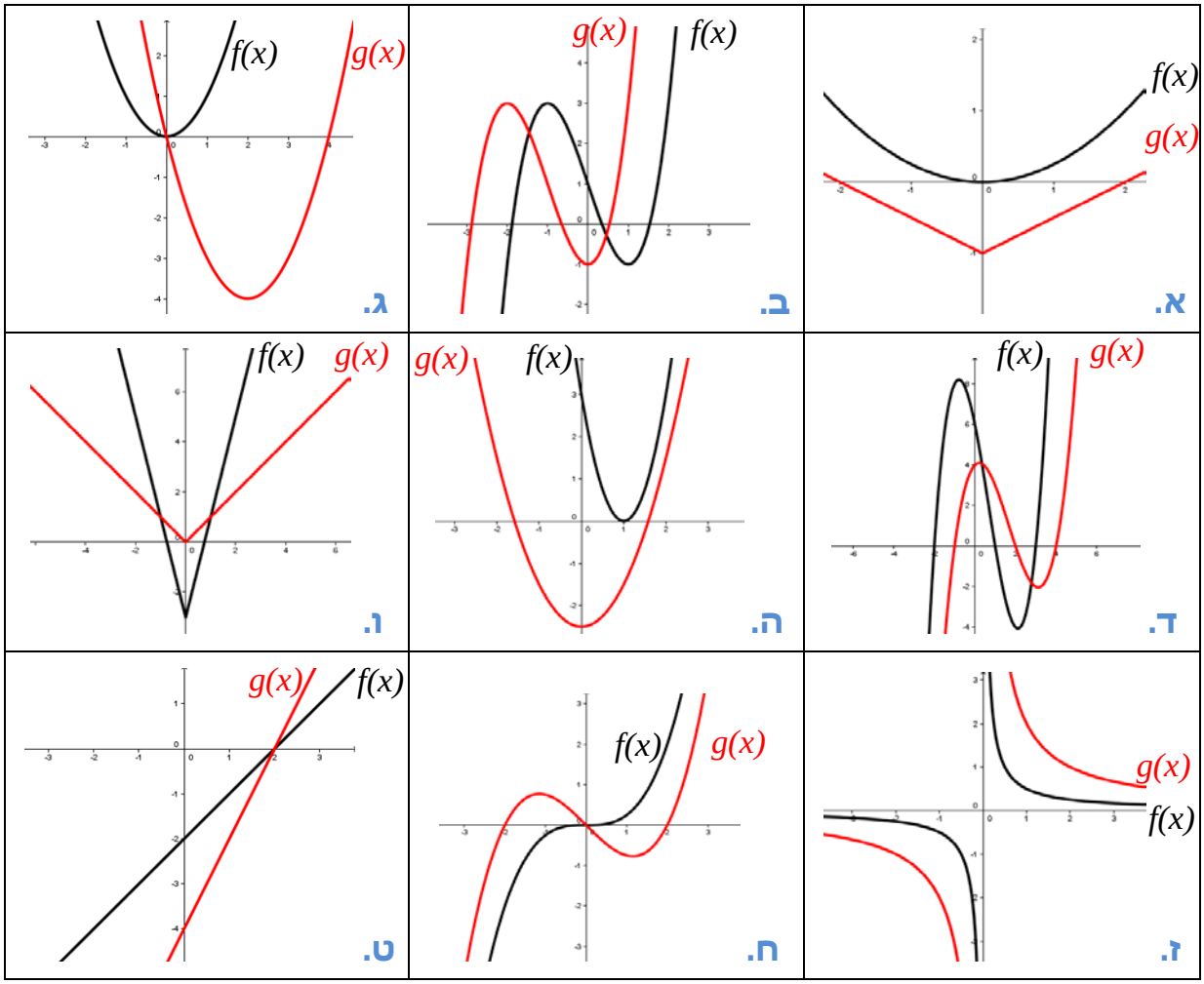
2) $h(x)=\frac{2x}{x+1}$

3) $m(x)=\frac{3x+2}{x+3}$

6. לסיכום:

לפניכם זוגות של גרפים. האם ניתן להתאים באמצעות הזזות ומתיחות בין שני הגרפים?

אם כן – כיצד? אם לא – מדוע?



* אתם יכולים להיעזר גם בתוכנה דינמית, כמו למשל הגאוגברה.

דוגמאות לפעילויות נוספות תמצאו באתר **לראות מתמטיקה** של מט"ח.

הנחיות למדריך

1. נתונה הפונקציה $f(x)$ כלשהי.

הפונקציה $g(x)$ נוצרה על ידי טרנספורמציות ליניאריות על $f(x)$:

$$g(x)=af(bx+c)+d$$

היעזרו **ביישום הדינאמי** וענו עבור כל פונקציה על השאלות הבאות:

א. שרטטו במערכת צירים אחת את הגרף של $f(x)$ והפונקציה המועתקת $g(x)$.

ב. עקבו אחר הנקודה $(0,0)$ לאיזו נקודה היא מועתקת?

ג. עקבו אחר נקודה (x,y) כלשהי, ורשמו את שיעורי הנקודה המועתקת באופן כללי.

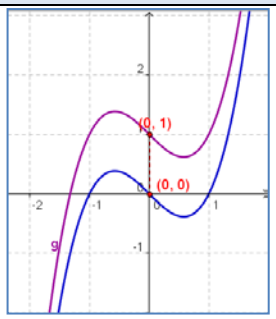
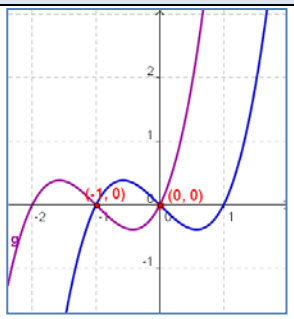
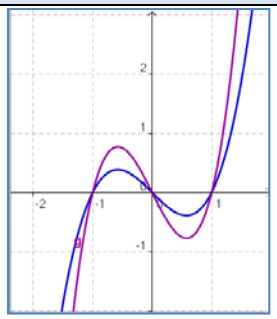
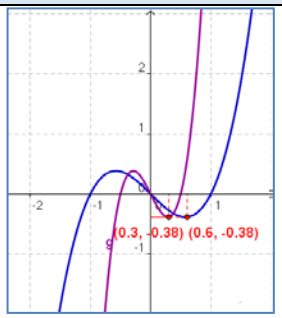
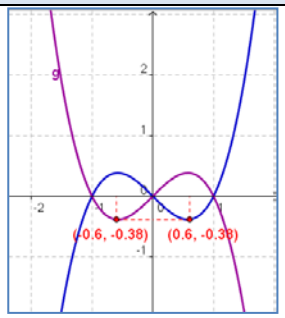
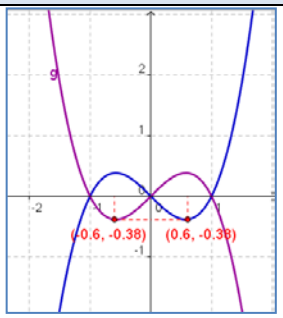
1) $g(x)=f(x)+1$ 2) $g(x)=f(x+1)$ 3) $g(x)=2f(x)$

4) $g(x)=f(2x)$ 5) $g(x)=f(-x)$ 6) $g(x)=-f(x)$

ד. שנו ביישום הדינאמי את הפונקציה ובדקו את מסקנותיכם עבור פונקציות שונות.

פתרון:

מטרת הפעילות היא לבסס את הבנת הפעולות של הזזות ומתיחות של פונקציות בייצוג הגרפי, האלגברי והמספרי. יש להבחין בין הפעולות החיבוריות הגורמות להזזת גרף הפונקציה ולפעולות הכפליות שגורמות למתיחתו. כמו כן יש משמעות האם הפעולה נעשית על הארגומנט (מקור הפונקציה, שיעור ה- x) אז הפעולה על הגרף היא אופקית, או על ערכה (שיעור ה - y) אז הפעולה על הגרף היא אנכית.

1) $g(x)=f(x)+1$	**2)** $g(x)=f(x+1)$	**3)** $g(x)=2f(x)$
		
$(0,0)\to(0,1)$ $(x,y)\to(x,y+1)$	$(0,0)\to(-1,0)$ $(x,y)\to(x-1,y)$	$(0,0)\to(0,0)$ $(x,y)\to(x,2y)$
4) $g(x)=f(2x)$	**5)** $g(x)=f(-x)$	**6)** $g(x)=-f(x)$
		
$(0,0)\to(0,0)$ $(x,y)\to(\frac{1}{2}x,y)$	$(0,0)\to(0,0)$ $(x,y)\to(-x,y)$ שיקוף לציר y	$(0,0)\to(0,0)$ $(x,y)\to(x,-y)$ שיקוף לציר x

הגרף הכחול מייצג את $f(x)$ והגרף האדום מייצג את $g(x)$.

2. בכל סעיף מוצג שינוי של ערכי הנקודות.

א. האם השינוי המוצג מהווה טרנספורמציה ליניארית של פונקציה?

ב. אם כן – איזו טרנספורמציה. רשמו את הביטוי האלגברי המתאים לטרנספורמציה זו.

פתרון:

1) $(x,y)\to(x+1,\ y)$	**4)** $(x,y)\to(2x,\ y)$
$f(x)\to g(x)=f(x-1)$	$f(x)\to g(x)=f(0.5x)$
2) $(x,y)\to(x,\ y-2)$	**5)** $(x,\ y)\to(x,\ 0.25y)$
$f(x)\to g(x)=f(x)-2$	$f(x)\to g(x)=0.25f(x)$
3) $(x,y)\to(x-2,\ y+3)$	**6)** $(x,y)\to(4x,\ y-1)$
$f(x)\to g(x)=f(x+2)+3$	$f(x)\to g(x)=f(0.25x)-1$

המלצות:

מטרת הפעילות היא להזכיר למורים את החוקים הבסיסיים של הזזות ומתיחות של פונקציות. בחרנו להציג את החוקים דרך הסתכלות על השינוי העובר על נקודה בודדת כלשהי של פונקציה. הסתכלות כזאת עשויה לחזק אצל המורים את העובדה שטרנספורמציה ליניארית פועלת על כל נקודה ונקודה ובדרך זאת, למעשה, משפיעה על כל הפונקציה.

שאלות לדיון:

- אפשר למיין את התרגילים שבמשימה לפי קריטריונים שונים. קבעו את הקריטריונים למיון התרגילים ומיינו אותם לפיהם. נסו מיונים שונים.
- במשימה זו התבוננו בטרנספורמציות של פונקציות דרך שינוי הקואורדינאטות של נקודה בודדת. מהן היתרונות והחסרונות של התבוננות כזאת?
- אחד המיונים האפשריים של התרגילים האלה הוא לפי כיוון ההזזה/המתיחה: האופקי או האנכי. איזה כיוון לדעתכם קל יותר לתלמידים? מדוע?

3. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע הסגור [-1, 2].

מצאו את תחומי ההגדרה של הפונקציות הבאות ונמקו את תשובתכם:

תשובה

1) $g(x)=f(x)+1$	**2)** $g(x)=f(x+1)$	**3)** $g(x)=2f(x)$
[-1, 2]	[-2, 1]	[-1, 2]
4) $g(x)=f(2x)$	**5)** $g(x)=f(-x)$	**6)** $g(x)=-f(x)$
[-0.5, 1]	[-2, 1]	[-1, 2]
7) $g(x)=\lvert f(x)\rvert$	**8)** $g(x)=f(\lvert x\rvert)$	**9)** $g(x)=f(1-x)$
[-1, 2]	[-2, 2]	[-1, 2]
10) $g(x)=f(1-2x)$	**11)** $g(x)=2f(1-2x)$	**12)** $g(x)=f(1-\lvert x\rvert)$
[-0.5, 1]	[-0.5, 1]	[-2, 2]

המלצות:

משימה זו עשויה למקד אצל מורים את התובנות בנושא טרנספורמציות של פונקציות. משימה 1 עיקרה שינוי שיעוריה של נקודה מסוימת בגרף הפונקציה ובמשימה זו המורים מתבקשים לתת את הדעת על השינויים המתרחשים בתחום ההגדרה של פונקציה כתוצאה מטרנספורמציה. התבוננות כזאת תאפשר לשים דגש על ה"תנועה" של הפונקציה ועל השינויים של הגרף שלה במערכת הצירים.

בתכנית הלימודים של כיתה ט' התלמידים עוסקים בטרנספורמציות של פונקציות קוויות וריבועיות, כאשר תחום ההגדרה שלהן – כל מספר ממשי. כאן בחרנו להתעסק עם פונקציות בתחום הגדרה סגור, על מנת להדגיש את השינויים העוברים על הפונקציות בהזזות ובמתיחות אופקיות, שהן פחות ברורות.

במשימה זו בנוסף להזזות ומתיחות אנו עוסקים גם בטרנספורמציות של ערך מוחלט, למרות שנושא זה לא נמצא בתכנית הלימודים של כיתה ט'.

אחת הדרכים לפתור את המשימה היא לבדוק, מה יקרה לנקודות קצה של תחום ההגדרה בעקבות טרנספורמציה כזו או אחרת (בדומה למה שעשינו במשימה הראשונה).

בתרגילים 1 – 8 של המשימה מבצעים טרנספורמציה אחת כל פעם, ואילו בתרגילים 9 – 12 יש לבצע סדרה של טרנספורמציות.

מבחינת סדר הפעולות, קודם מזיזים אופקית ואחר-כך מכווצים/ מותחים אופקית. רק לאחר מכן מותחים אנכית, ובסוף מזיזים אנכית.

כך לדוגמה, בתרגיל 11 $g(x)=2f(1-2x)$ תחילה יש לבצע הזזה אופקית ב- 1 שמאלה לאחר מכן למתוח אופקית בגורם (-2), כלומר כיווץ הפונקציה ושיקוף שלה לפי ציר ה-x. לבסוף – מתיחה אנכית ב- 2. יש לשים לב שמתיחה אנכית אינה משפיעה על תחום ההגדרה.

התחום המקורי הוא $[-1,2]$, נבצע הזזה אופקית ב- 1 שמאלה ונקבל $[-2,1]$ עתה נכווץ ב- $-\frac{1}{2}$, ונקבל $\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

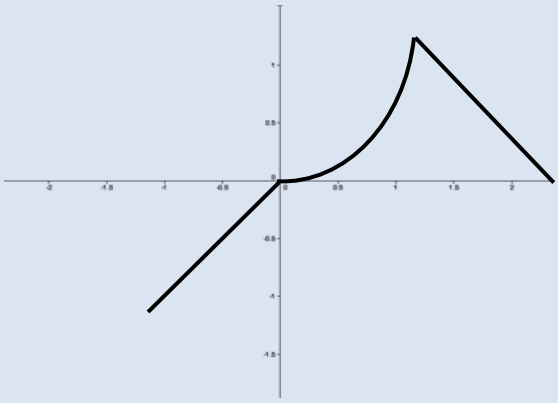
שאלות לדיון:

- מהן הטרנספורמציות השומרות על תחום ההגדרה של הפונקציה המקורית? מהן הטרנספורמציות המשנות את תחום ההגדרה של הפונקציה המקורית? נסחו את ההכללה.

בתרגיל 9 של המשימה מבצעים טרנספורמציות אופקיות שאמורות לשנות את תחום ההגדרה של הפונקציה המקורית, אך בפועל, תחום ההגדרה כאן לא השתנה. הסבירו מדוע. הביאו דוגמה לפונקציה המתאימה (באופן טבעי) לתחום ההגדרה הנתון. בצעו עליה את הטרנספורמציות המתוארות בתרגיל 9 ובדקו את מסקנתכם.

4. נתון גרף הפונקציה $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[-1;0) \\ x^2, & x\in[0;1) \\ 2-x, & x\in[1,2] \end{cases}$$



לפי הגרף הנתון בנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

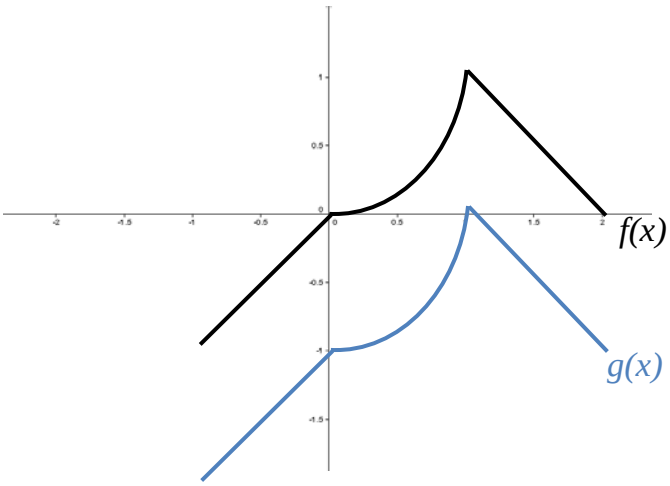
1) $g(x)=f(x)-1$
2) $g(x)=-f(x)$
3) $g(x)=|f(x)|$
4) $g(x)=f(x-2)$
5) $g(x)=f(2x)$
6) $g(x)=f(-x)$
7) $g(x)=2f(x)$
8) $g(x)=f(|x|)$
9) $g(x)=f(1-x)$

תשובה:

הגרף השחור מייצג את $f(x)$ הגרף הכחול מייצג את הפונקציה המוזזת.

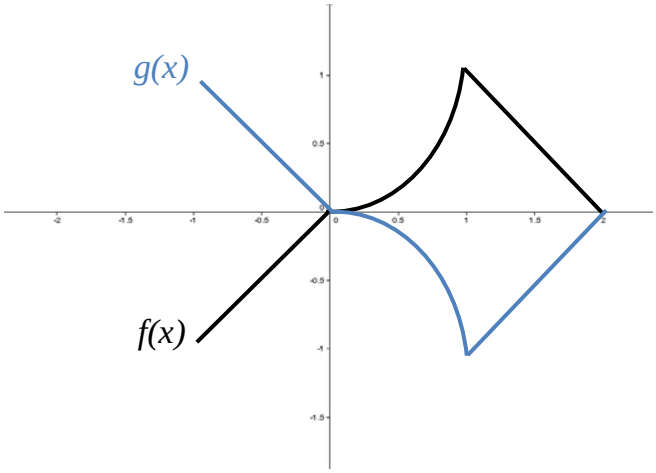
1) $g(x)=f(x)-1$

הגרף של $g(x)$ מתקבל על-ידי הזזה של הגרף של $f(x)$ ביחידה אחת למטה.



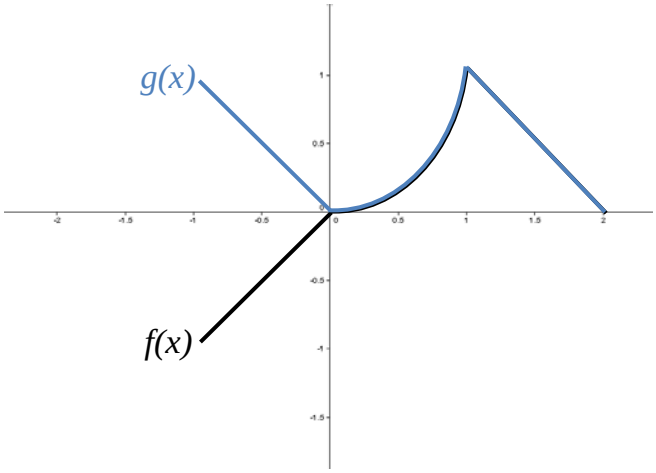
2) $g(x) = -f(x)$

$g(x)$ מתקבלת מ- $f(x)$ על-ידי שיקוף ביחס לציר ה- x.



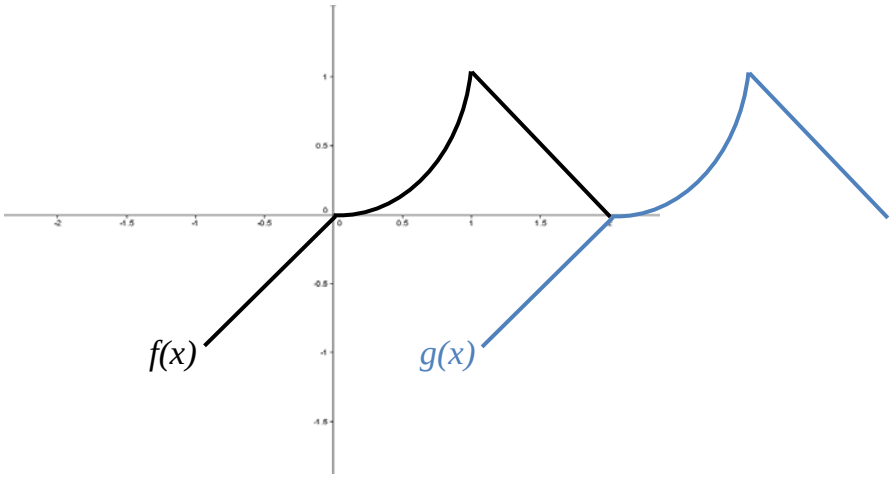
3) $g(x) = |f(x)|$

הגרף של הפונקציה $g(x)$ זהה לגרף הפונקציה $f(x)$ כאשר $f(x)$ חיובית, וכאשר $f(x)$ שלילית הגרף מתקבל על-ידי שיקוף ביחס לציר ה- x.



4) $g(x)=f(x-2)$

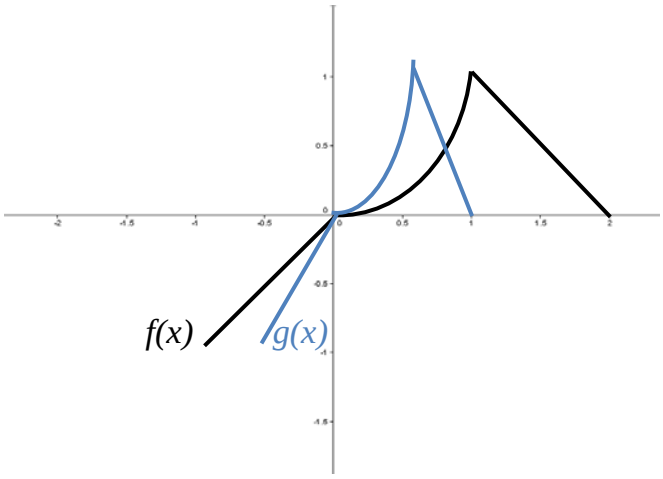
הגרף של $g(x)$ מתקבל על-ידי הזזה של $f(x)$ שתי יחידות ימינה.



5) $g(x)=f(2x)$

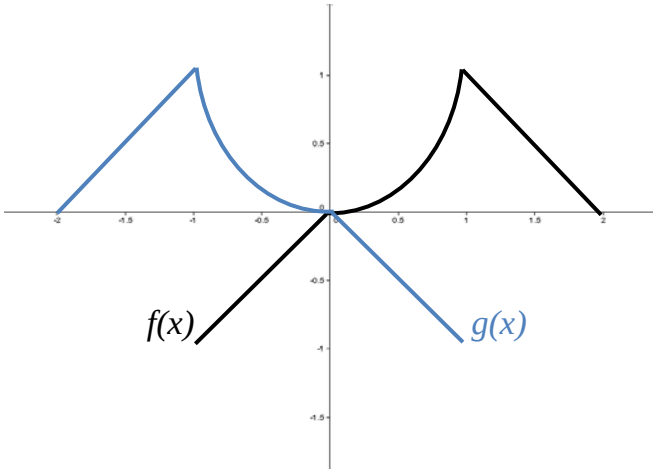
הגרף של $g(x)$ מתקבל על-ידי כיווץ אופקי של $f(x)$ פי 2.

לדוגמה: $f(1)=g(0.5)=1$.



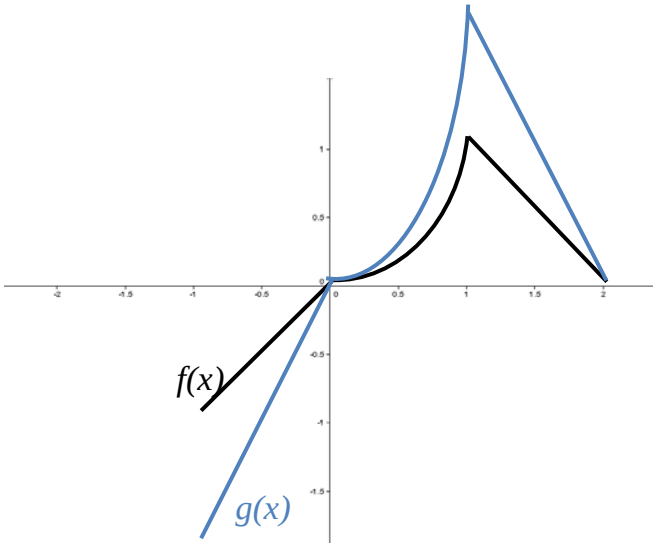
6) $g(x)=f(-x)$

הגרף של $g(x)$ מתקבל משיקוף של הגרף של $f(x)$ ביחס לציר ה- y.



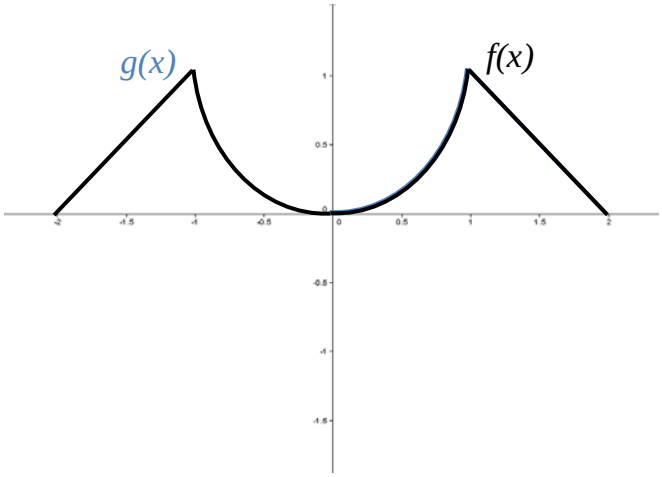
7) $g(x)=2f(x)$

הגרף של $g(x)$ מתקבל משיקוף של הגרף של $f(x)$ מתיחה אנכית פי 2. לדוגמה $f(1)=2\cdot f(1)=2$.



8) $g(x) = f(|x|)$

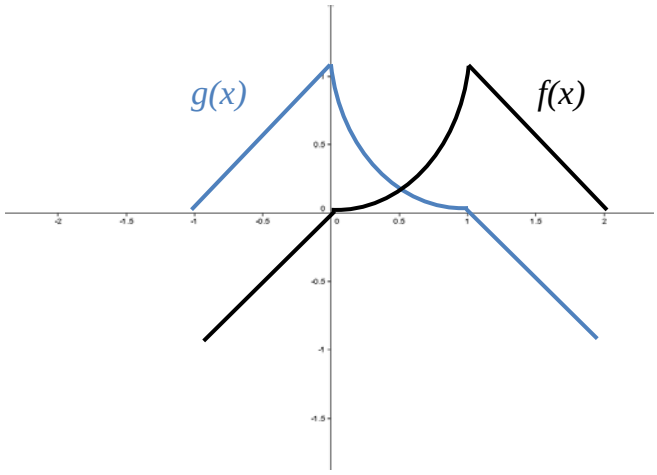
הגרף של $g(x)$ זהה לגרף של $f(x)$ עבור ערכי x חיוביים ועבור ערכי x שליליים הוא מהווה שיקוף בציר y של $f(x)$ שעבור ערכי x חיוביים.



9) $g(x) = f(1-x)$

הגרף של $h(x)$ מתקבל מגרף של $f(x)$ על-ידי הזזה ביחידה אחת ימינה.

הגרף של $g(x)$ מתקבל מהגרף של $h(x)$ על-ידי שיקוף ביחס לציר ה- y.



המלצות:

משימה זו למעשה מסכמת את שתי המשימות הראשונות: היא מציגה טרנספורמציות של פונקציה כללית בתחום הגדרה סגור (בדומה למשימה 2) וגם מאפשרת התבוננות בשינוי מקומן של נקודות מסוימות של הפונקציות – כאן מומלץ להסב את תשומת הלב של המורים לנקודות, בהן הפונקציה משנה את התנהגותה. סרטוט גרף התוצאה ממחיש את הקשר שבין השינוי בייצוג הסימבולי של הפונקציה לבין "תנועת" גרף הפונקציה במערכת הצירים.

בתשובות הבאנו פתרונות, בהן מערכת הצירים נשארת קבועה והטרנספורמציה באה לידי ביטוי בשינוי בגרף של הפונקציה המקורית. דרך זו אוניברסאלית ומתאימה לכל סוגי הטרנספורמציות. אך בתרגילים כמו 1 ו- 4, בהן מתבצעות הזזות בלבד (ללא מתיחות וללא שיקופים), מורים אחדים יעדיפו להשאיר את הגרף של הפונקציה קבוע ולשנות את מקומם של צירי מערכת הצירים. דרך זו מאפשרת לשמור על צורה הויזואלית של הגרף (שהוא למעשה – קו עקום). במקרה כזה חשוב לדון בשאלות: "לאיזה כיוון מזיזים את צירי המערכת בהזזה אנכית ובהזזה אופקית? האם רמות הקושי של ההזזות נשארות או משתנות? באיזו מידה כדאי לחשוף את התלמידים לדרך זו של פתרון?". אם תנאים בבית הספר מאפשרים זאת, רצוי לתת למורים אפשרות לביצוע טרנספורמציות של הפונקציה באמצעות מחשב. לאוגדן זה מצורף נספח, בו בצבע שחור מסורטט מספר פעמים הגרף המקורי ובצבע כחול – תבנית של אותה הפונקציה שאפשר למקם אותה בהתאם לטרנספורמציה הנדרשת. לביצוע מתיחות ושיקופים יש לפרק את הקיבוץ של הגרף הכחול.

.5

א. הוכיחו כי גרף של כל פונקציה רציונאלית $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, $(c\neq 0)$ חופף לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{k}{x}$, כאשר $k=\frac{bc-ad}{c^2}$ ומתקבל ממנו על-ידי הזזה.

פתרון:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{c(ax+b)}{c(cx+d)}=\frac{acx+bc}{c(cx+d)}=\frac{acx+bc+ad-ad}{c(cx+d)}=\frac{(acx+ad)+(cb-ad)}{c(cx+d)}=$$

$$=\frac{acx+ad}{c(cx+d)}+\frac{cb-ad}{c(cx+d)}=\frac{a(cx+d)}{c(cx+d)}+\frac{c\left(b-\frac{ad}{c}\right)}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$$

נסמן: $b-\frac{ad}{c}=t$ ונקבל:

$$\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{t}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{t}{c}}{\frac{cx+d}{c}}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{t}{c}}{x+\frac{d}{c}}$$

על סמך הנתון: $\frac{t}{c}=k$ ונקבל כעת: $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{k}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$.

ייצוג זה של הפונקציה המקורית מראה כי אפשר לקבל אותה מהפונקציה $y=\frac{k}{x}$ על ידי שתי הזזות: הזזה אופקית ב- $-\frac{d}{c}$ והזזה אנכית ב- $\frac{a}{c}$.

שאלה לדיון:

- כיצד יראה הגרף במקרה ש: $bc-ad=0$?

ב. שרטטו גרפים של הפונקציות הבאות בעזרת טרנספורמציות:

1) $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$

2) $h(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

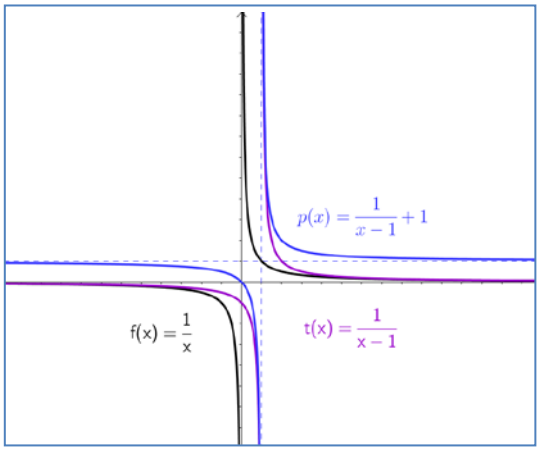
3) $m(x)=\dfrac{3x+2}{x+3}$

פתרון:

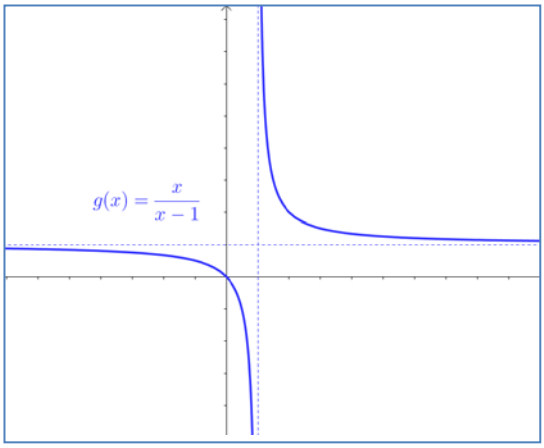
כדי לבנות גרפים של הפונקציות האלה, נבצע בהם מספר שינויים תוך כדי שמירה על שקילות:

1) $g(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x-1+1}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$

בסרטוט 1 נבחר כפונקציה מקורית את הפונקציה: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (הגרף השחור) נגיע לגרף הפונקציה $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ על ידי סידרה של טרנספורמציות, הבאות לידי ביטוי בייצוג $p(x)=f(x-1)+1$ (הגרף הכחול). הטרנספורמציות מתוארות על-ידי שתי הזזות: אחת אופקית ביחידה ימינה ואחת אנכית ביחידה למעלה. וכמו שנראה $g(x)$ (סרטוט 2) מתלכדת עם $p(x)$ (סרטוט 1).



סרטוט 1

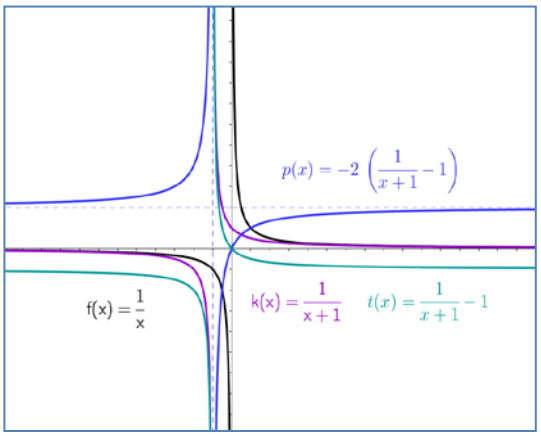


סרטוט 2

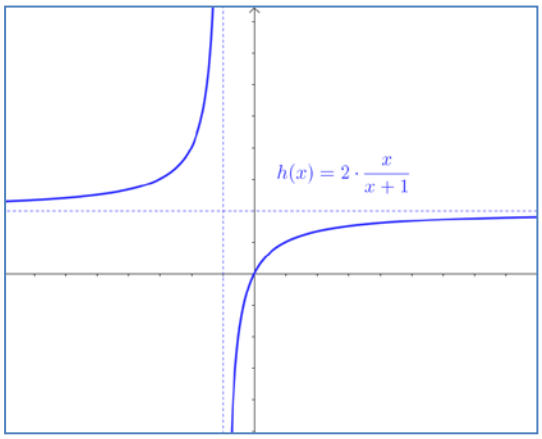
2) $h(x)=\frac{2x}{x+1}=2\frac{x}{x+1}=2\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)=2\left(\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=$

$=-2\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$

בסרטוט 1 נבחר כפונקציה מקורית את הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}$ (הגרף השחור) נגיע לגרף הפונקציה $h(x)=\frac{2x}{x+1}$ על ידי סידרה של טרנספורמציות, הבאות לידי ביטוי בייצוג $p(x)=-2(f(x+1)-1)$ (הגרף הכחול). הטרנספורמציות מתוארות על-ידי הזזה אופקית ביחידה שמאלה, הזזה אנכית ב-(1-) ומתיחה ב- (2-). וכמו שנראה $h(x)$ (סרטוט 2) מתלכדת עם $p(x)$ (סרטוט 1).



סרטוט 1

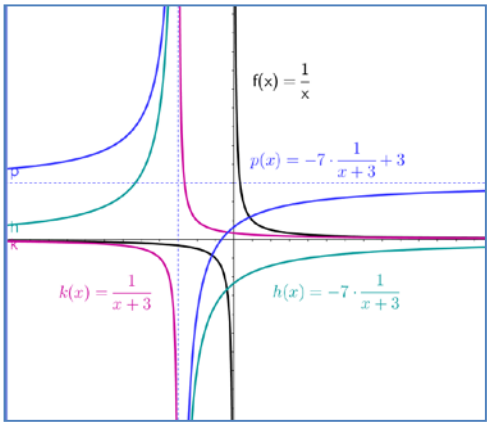


סרטוט 2

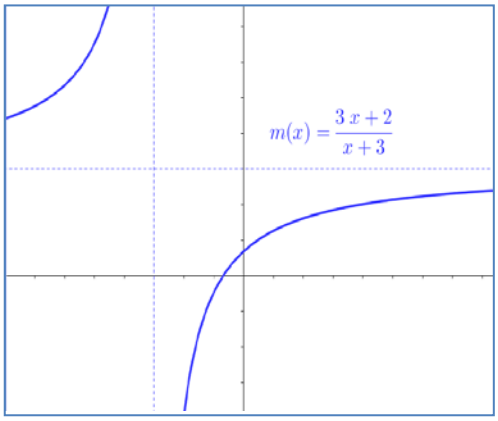
3) $m(x)=\frac{3x+2}{x+3}=\frac{3x}{x+3}+\frac{2}{x+3}=3\left(\frac{x+3-3}{x+3}\right)+\frac{2}{x+3}=3-\frac{9}{x+3}+\frac{2}{x+3}=$

$=\frac{-7}{x+3}+3$

בסרטוט 1 נבחר כפונקציה מקורית את הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}$ (הגרף השחור) נגיע לגרף הפונקציה $m(x)=\frac{3x+2}{x+3}$ על ידי סידרה של טרנספורמציות, הבאות לידי ביטוי בייצוג $m(x)=-7f(x+3)+3$ (הגרף הכחול). הטרנספורמציות מתוארות על-ידי הזזה אופקית ב-3 יחידות שמאלה מתיחה אנכית ב-(7-) ולבסוף הזזה אנכית ב-3 יחידות למעלה. וכמו שנראה $m(x)$ (סרטוט 2) מתלכדת עם $p(x)$ (סרטוט 1).



סרטוט 1



סרטוט 2

המלצות:

מטרת משימה זו – להדגים את הדרך למציאת הקשר בין הפונקציה הנתונה לפונקציה הבסיסית. בייצוג הסימבולי של הפונקציות הנתונות אי-אפשר לזהות, מה הן הטרנספורמציות שבעזרתן הן מתקבלות מהפונקציה הבסיסית $f(x)=\frac{1}{x}$.

סדרה של פעולות בייצוג הסימבולי של הפונקציה מאפשר בקלות לזהות את הטרנספורמציות הנ"ל ולבנות גרף של הפונקציה ללא שום ניתוח אנליטי.

תהליך דומה יתרחש כאשר בכיתות המורים יצטרכו להציג דרכים המובילות מהייצוג הטרינומי של פרבולה לייצוג המאפשר לבנותה על ידי הטרנספורמציות.

במהלך הסדנה, לאחר ביצוע שינויים בפונקציה, כדאי שהמורים יבנו תחילה סקיצה של הגרף ביד חופשית ויסבירו (או יסמנו) את ההזזות והמתיחות שבצעו. לאחר מכן, אם "תנאי השטח" מאפשרים זאת, מאוד מומלץ לבנות את כל סדרת הגרפים באמצעות גיאוגברה או כל תוכנה אחרת ולהשוות את הגרף המתקבל על ידי טרנספורמציות עם הגרף שיבנה ישירות מהייצוג המקורי של הפונקציה.

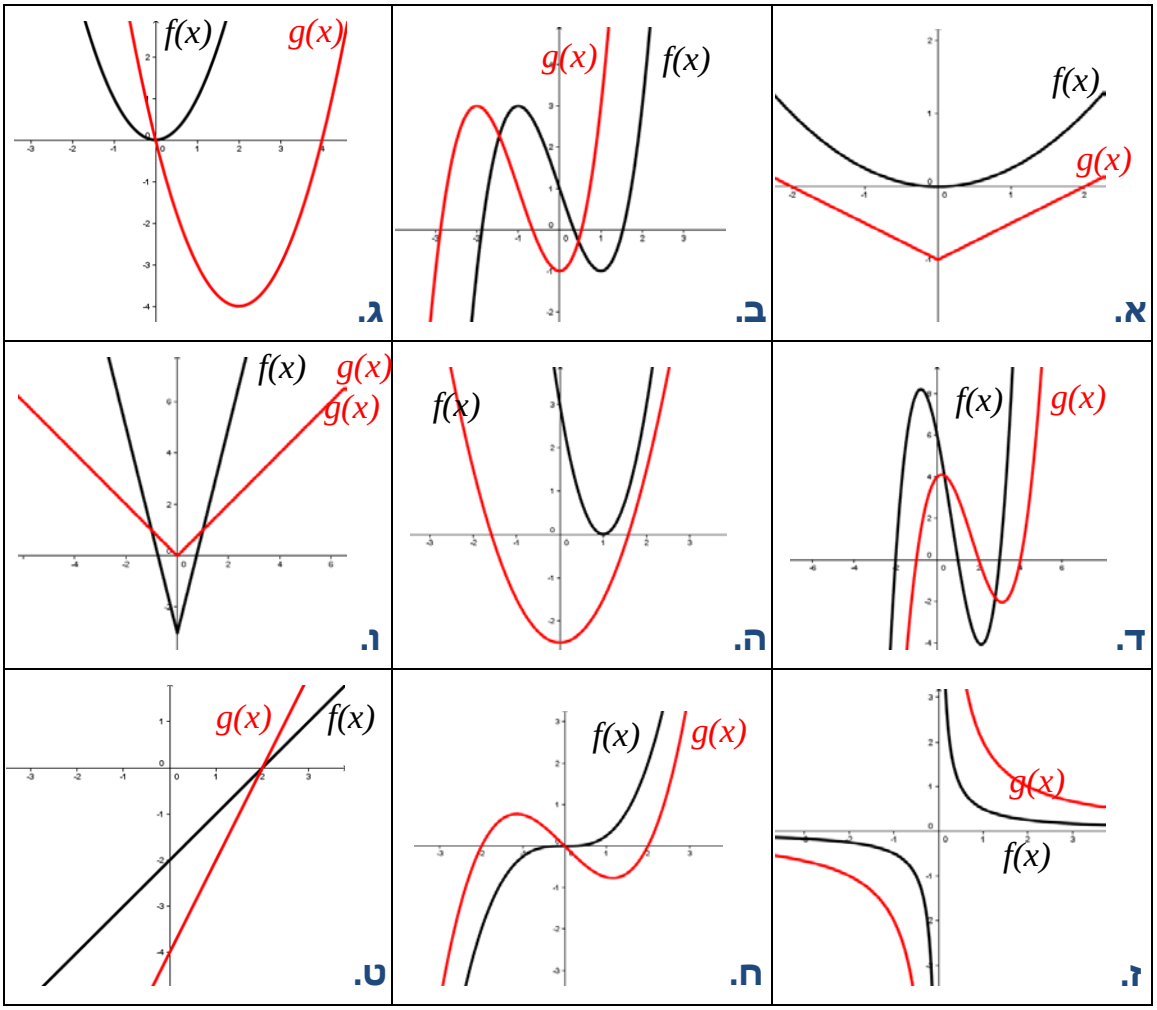
שאלות לדיון:

- באילו טכניקות של הזזות ומתיחות השתמשתם בבניית הגרפים? (הכוונה לשינויים של הגרף או שינויים של מערכת הצירים).
- באיזה טרנספורמציות עדיף לבצע שינוי על גרף הפונקציה ובאיזה על מערכת הצירים?
- איזה מיומנויות ויכולות דרושות, כדי שהלומד יצליח במשימות כאלה?

6. משימת סיכום:

לפניכם זוגות של גרפים. האם ניתן להתאים באמצעות הזזות ומתיחות בין שני הגרפים?

אם כן – כיצד? אם לא – מדוע?



פתרון:

א. אי-אפשר- $f(x)$ גזירה בכל נקודה בתחום, ו- $g(x)$ לא גזירה בנקודת הקיצון.	**ב. אפשר** – הזזה אופקית	**ג. אפשר** – הזזה אופקית והזזה אנכית
ד. אפשר – הזזה אופקית ומתיחה אנכית (כיווץ)	**ה. אפשר** – הזזה אופקית, מתיחה אנכית והזזה אנכית	**ו. אפשר** – מתיחה אנכית והזזה אנכית
ז. אפשר – מתיחה אנכית	**ח. אי-אפשר** – יש הבדל במספר נקודות קיצון של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.	**ט. אפשר** – מתיחה אנכית

המלצות:

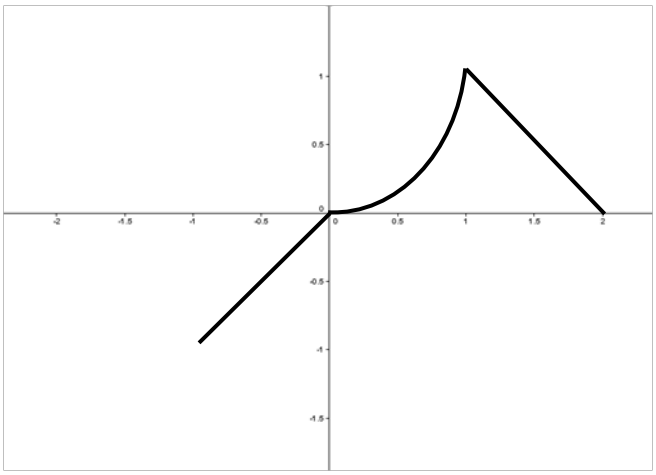
אפשר להציג את המשימה על כרטיסיות נפרדות, כסוג של משחק – כל מורה לוקח כרטיס אחד, עונה עליו, מנמק את תשובתו. אם הקבוצה מסכימה – מקבל נקודה, אם לא – מפסיד נקודה. כך אפשר להדגים לצוות עוד דרך מתודית לעבודה עם התלמידים.

שאלות לדיון:

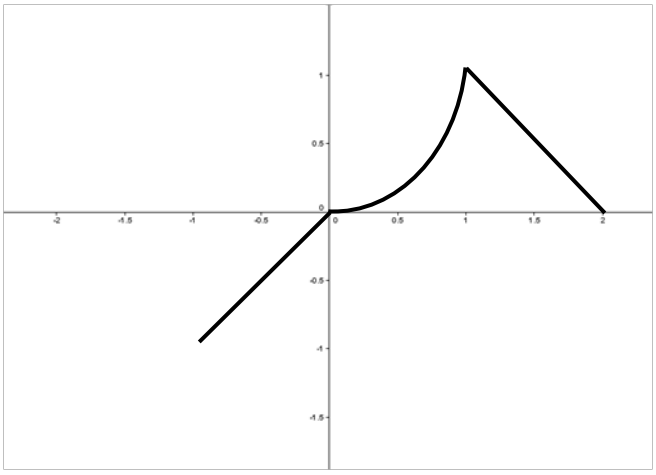
- האם לפי הצגת השינוי בגרף של הפונקציה תמיד ניתן לזהות, אילו טרנספורמציות בוצעו עליה (אם בכלל)?
- מהם הסעיפים בהם האינטואיציה שלכם הפריעה למציאת התשובה הנכונה?
- מה מיוחד בגרפים שבסעיפים אלה?

נספח – דף עבודה

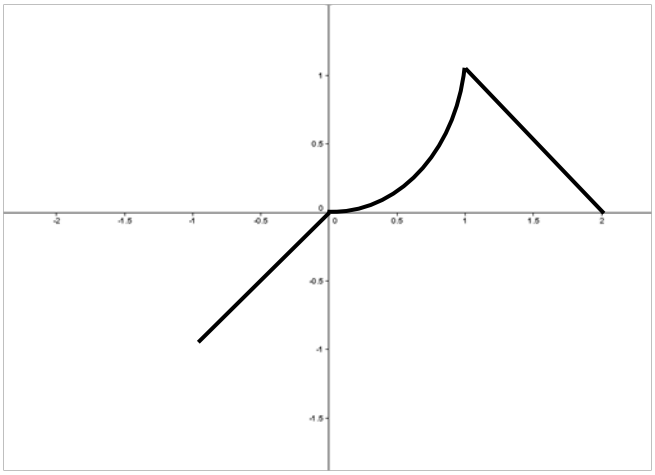
1) $g(x) = f(x) - 1$



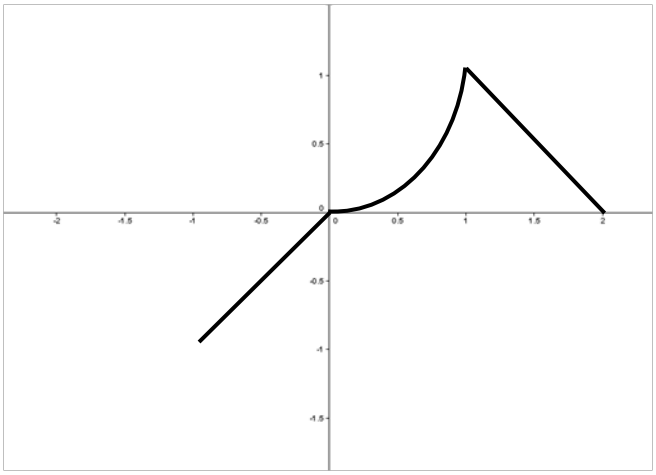
2) $g(x) = -f(x)$



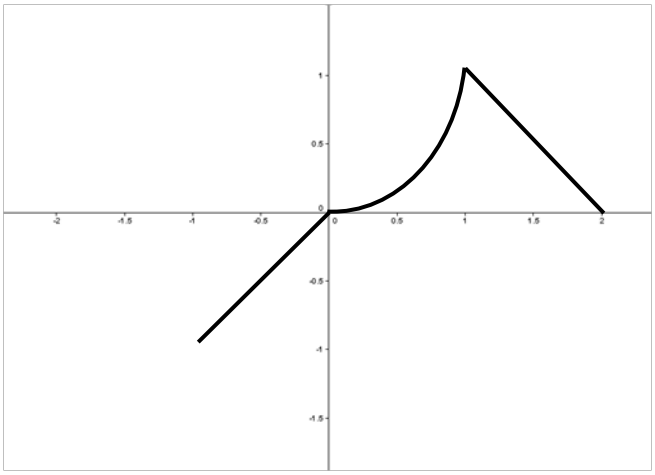
3) $g(x) = |f(x)|$



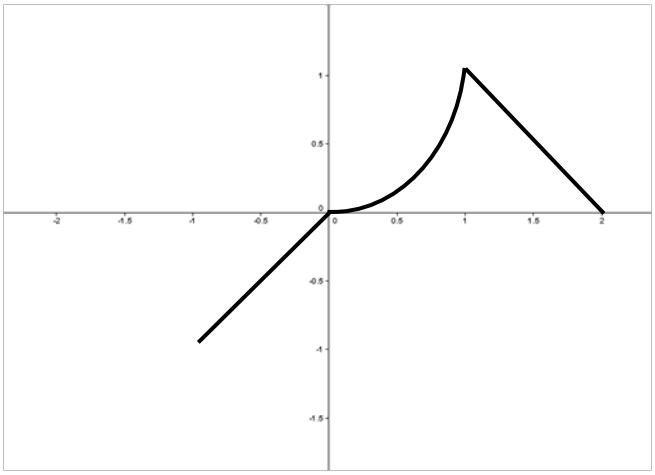
4) $g(x) = f(x-2)$



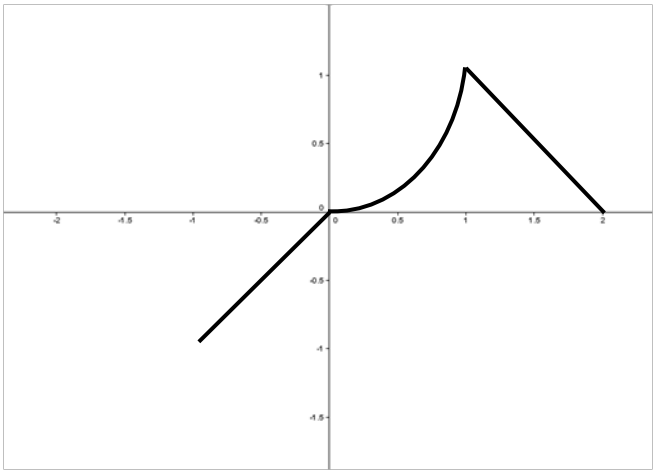
5) $g(x) = f(2x)$



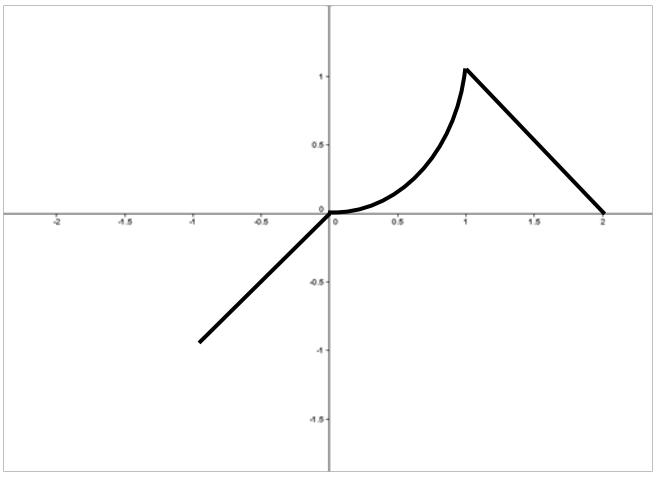
6) $g(x) = f(-x)$



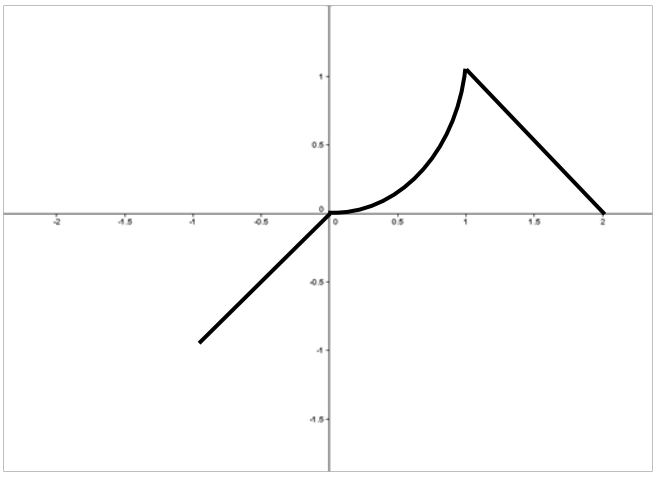
7) $g(x) = 2f(x)$



8) $g(x) = f(|x|)$



9) $g(x) = f(1-x)$



מקורות

- Baker, B., Hemenway, C., & Trigueros, M. (2000). On transformations of basic functions. In: H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Vol. 1, pp. 41–47). University of Melbourne.
- Borba, M. C. (1993). Students' Understanding of Transformations of Functions Using Multirepresentational Software. *Unpublished Dissertation*, Cornel University.
- Confrey, J. (1994). Six approaches to transformation of functions using multirepresentational software. Paper presented at the Proceedings of the Eighteenth International Conference for *the Psychology of Mathematics Education*, Lisbon, Portugal.
- Edwards L. D.(2002) The nature of mathematics as viewed from cognitive science, in *Proceedings of CERME 3*.
- Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1994). On understanding how students learn to visualize function transformations. In: E. Dubinsky, A. Schoenfeld,&J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education,* 1,. 45–68. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Goldenberg P., Kilman (1990). What you see is what you see. *Unpublished Manuscript, Newton, MA, USA*: Educational Technology center.
- Goldenberg P. (1988). Mathematics, Metaphors, and Human Factors. *Journal of Mathematical Behavior 7*, 135-173.
- Pierpont J. (1904). *The History of Mathematics in the Nineteenth Century*, Bulletin of the American Mathematical Society 11 (1904), 136-159.
- Ponte J.P. (1990). The history of the concept of function and some educational implications, *The Mathematics Educator*, No 3.

- Kisil V. (2002) Meeting Descartes and Klein somewhere in a noncommutative space. In A. Fokas, J. Halliwell, T. Kibble, and B. Zegarlinski (editors), Highlights of Mathematical Physics, pages 165–189. AMS, 2002. 9.
- Yerushalmy, M., Katriel, H. & Shternberg, B. (2003) *The Function Web-book*.
- Yerushalmy, M. & Schwartz, J.L. (1993). Seizing the Opportunity to Make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting. In Romberg, T. A., Fennema, E., and Carpenter, T. P. (Eds.), Integrating Research on the Graphical Representation of Functions 41-68. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Zazkis, R., Liljedahl, P. & Gadowsky, K. (2003). Conceptions of function translation: obstacles, intuitions, and rerouting. *Journal of Mathematical Behavior* 22 , 437–450.

רשימת קישורים

- **יישום דינאמי**

html.transformation/Applets/Ogdan/il.ac.haifa.highmath//:http

- **לראות מתמטיקה**

www.cet.ac.il/math/function