"קשר-חם": ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תימטי

נגריה מתמטית - בעיית החודש מס' 7

הוכן ע"י: **"קשר חם"**, המרכז הארצי ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי, שנה"ל תשנ"ד.

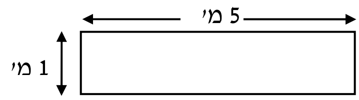
תקציר: בחומר מוצגת בעיה העוסקת בבניית ריבוע ששטחו שווה לשטח מלבן נתון. הבניה מתבססת על משפט פיתגורס, ומובילה להוכחתו בדרך גיאומטרית. מצורף פתרון לבעיה.

מלות מפתח: הנדסה, גיאומטריה, גיאומטרית המישור, שטח, ריבוע, הוכחה, משפט פיתגורס, מספר אי רציונלי, היסטוריה של המתמטיקה, בסקרה.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

נגריה מתמטית

לפניכם קורת עץ מלבנית שמידותיה 5מ׳ x 1מ׳ כמתואר בשרטוט:



מקורה זו עליכם לבנות שולחן שצורתו ריבוע. לשם כך עליכם לחתוך אותה למספר חלקים ולהדביק אותם מחדש.

יש להשתמש בכל החלקים ולהניח שבתהליך הניסור אין איבוד של חומר.

איך כדאי לחתוך את הקורה?

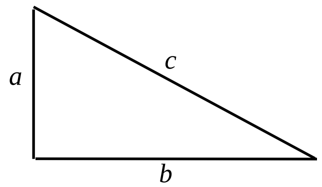
פרטו תשובתכם.

נגריה מתמטית - פתרון

שטח הקורה הנתונה הוא 5 מ״ר (5מ׳ x 1מ׳).
כאשר יוצרים מחלקי הקורה שולחן שצורתו ריבוע, יהיה שטחו אף הוא 5 מ״ר ואפשר אם כן לחשב את אורך צלע הריבוע.

אם צלע הריבוע היא a מ׳ אז $a^2=5$ כלומר, $a=\sqrt{5}$.

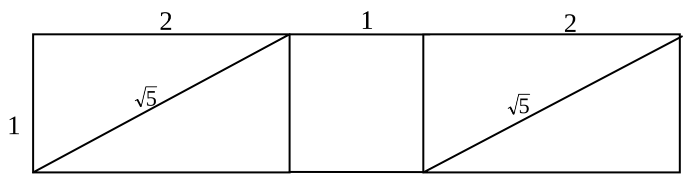
לפיכך, כדי לבנות שולחן ריבועי, יש לחתוך את הקורה כך שנקבל צלע באורך $\sqrt{5}$ מ׳.
לפי משפט פיתגורס, שטח הריבוע הבנוי על היתר של משולש ישר זווית, שווה לסכום שטחי הריבועים הבנויים על ניצביו:



$$a^2+b^2=c^2$$

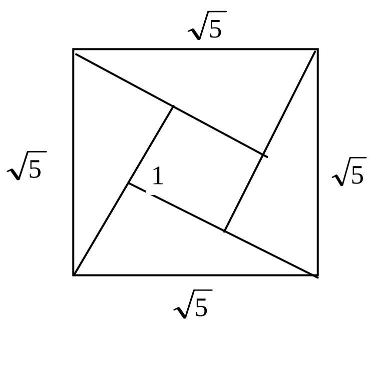
משפט זה והעובדה כי: 5 = 22 + 12, מביאים לרעיון חיתוך הקורה באופן הבא:

החיתוך:



את ארבעה המשולשים ישרי הזוית שאורך היתר שלהם $\sqrt{5}$ נערוך בריבוע, כך שהצלעות שאורכן $\sqrt{5}$ תהיינה ארבע צלעות הריבוע, כמתואר בדף הבא.

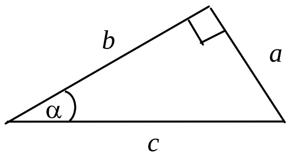
הריבוע:



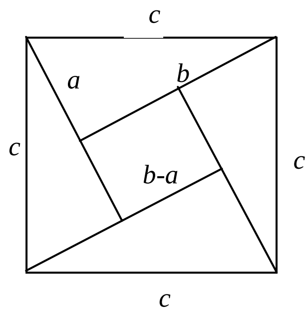
"החור" שנותר בתוך הריבוע, גם הוא ריבוע (למה?) ואורך צלעו 1 מ'. שם נשבץ את החלק שנותר מחיתוך הקורה, שגם הוא ריבוע שצלעו 1 מ', ונקבל שולחן ששטחו 5 מ"ר. הצורה שנוצרה, היא אכן ריבוע, כי זהו מרובע שווה צלעות $\left(\sqrt{5}\right)$ בעל ארבע זוויות ישרות. (מדוע) ?

הערה: נוכל להכליל את הפתרון.

נקח ארבעה משולשים החופפים כולם למשולש ישר זווית כלשהו :



ונסדרם באותו אופן :



שוב נקבל ריבוע (למה?) ובתוכו "חור". "החור" הוא ריבוע שצלעו *b-a*.

נסמן ב- S את שטח הריבוע (הגדול) ונחשב אותו בשני אופנים :

א. לפי צלעו : $S = c^2$

ב. לפי סכום שטחי החלקים המרכיבים אותו : $S = (b-a)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = a^2 + b^2$

היות ומדובר באותו שטח, נוכל להסיק כי : $a^2 + b^2 = c^2$

וזו אחת מההוכחות לנכונותו של משפט פיתגורס.

לתשומת לבך : הוכחה זו מיוחסת למתמטיקאי ההודי בסקרה (אשר חי במאה ה- 12).