

הנושא: חדו"א את היצירה (חלק א)

הוכן ע"י: עופר ליבה.

תקציר: המאמר הוא חלקה הראשון של סקירת הספר: A Tour Of Calculus מאת David Berlinski, 1995. הטיול בארץ החדו"א לוקח את הקורא לעיון בהתפתחות ההיסטורית של הגדרת קבוצות המספרים, מושג הגבול, מושג הפונקציה ומושג הגבול. מאמר ההמשך מתייחס למושגים נוספים.

מילות מפתח: היסטוריה של המתמטיקה, חדו"א, חשבון דיפרנציאלי, אינפיניטסימלי, אנליזה, מספרים, קבוצה צפופה, צפיפות, פונקציה, קצב שינוי, מהירות רגעית, גבול, שאיפה, התכנסות, רציפות, ספרים, לייבניץ.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 23, תשרי תשנ"ט, אוקטובר 1998, עמודים 88-91.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.



עורך המדור עופר ליבה

חדו"את היצירה (חלק א')

עופר ליבה

האוניברסיטה העברית בירושלים

David Berlinski *A Tour of the Calculus Pantheon* Pantheon Books, 1995

מבוא

התנסותנו היום-יומית רוויה בתנועה ובשינוי רציפים, במרחב ובזמן החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (חדו"א) הוא הנס המתמטי אשר מאפשר למספרים, שהם לכשעצמם סטטיים ודיסקרטיים, לתאר נאמנה את תופעת הרציפות של הווייתנו אשר על כן, נוכל לאמר שהחדו"א היא אחת מפריצות הדרך הגדולות ביותר של המוח האנושי

הסיוור בארץ החדו"א, כאשר הספר של ברלינסקי משמש אותנו כמדריך טיולים, מתחיל ברעיון המבריק שהזכרנו קודם, דהיינו שהמספרים מסוגלים לתאר נאמנה את העולם שמסביבנו, ודרך תחנות הביניים החשובות – הגדרת המושג 'פונקציה', המושג 'גבולי', תכונות הרציפות ומשפט ערך הביניים – מוביל אותנו אל גולת הכותרת המשפט היסודי של החדו"א

עוד במאה ה-16, האפשרות של תיאור העולם באמצעות כלים מתמטיים לא יושבה כלל בתודעה אך בסוף המאה ה-17 המלאכה הייתה גמורה, על אף שנדרשו כ-150 שנה נוספות כדי להניח יסודות לוגיים איתנים, בתהליך מייסר למדי

המספרים 'מצטופפים'

כל ילד קטן, שסקרנותו לגבי העולם הסובב אותו אינה יודעת גבולות, רוכש בקלות יחסית את הכלי המאפשר לו לענות על השאלה כמה [עפרונות, כדורים, כפיות, בננות, ...] אני רואה מול עיניי כלי זה נקרא 'המספרים הטבעיים' הם מאפשרים לו לספור. לספור הוא לסווג, ולסווג הוא להבחין ולהפריד, כאשר העצמים הנתפשים על ידי החושים כלואים בתוך גבולותיהם, וגבולות אלה מפרידים בינם לבין העצמים האחרים

לעומתם, המספרים הרציונליים משמשים גם למדידה, דהיינו עונים על השאלה מהו הגודל (אורך, שטח, משקל, טמפרטורה, עצמת הזרם וכיו"ב), וככל שנרצה לדייק, נוכל להיעזר הן במכשירים רגישים יותר והן בשברים קטנים יותר, כדי לקבל תשובה אשר עונה לדרישות הדיוק שלנו.

עם החדרת המספרים הרציונליים הלא-שלמים, אנו עדים לשינוי דרמטי בתצורה של המספרים הרי נוכל תמיד לשבץ מספר יחזשי בין שני מספרים נתונים, וחוזר חלילה עד איך קץ, דבר שלא מתאפשר בקבוצת המספרים הטבעיים. קבוצת הרציונליים היא צפופה – בין כל שני מספרים רציונליים יש אינסוף מספרים רציונליים נוספים

עושה רושם, אם כך, שהם 'ממלאים' את ציר המספרים כולו אך מה עם $\sqrt{2}$, אשר קיומו מובטח על-ידי משפט פיתגורס? היצור המוזר הזה, $\sqrt{2}$, שכבר היוונים ראו שאי אפשר לבטאו כמנה בין שני שלמים, העסיק והטריד דורות של מתמטיקאים איך הדבר מתיישב עם התחושה הוודאית שקיים קשר חד-משמעי, אינטימי, בין המספרים לבין ציר המספרים?

רוח חיים א: שינוי

במת ההצגה מוכנה, והיא נקראת מערכת צירים קרטזית זמן ומרחב ניתנים לתיאור באמצעותה אך הבמה ריקה, היא דומה למסילת רכבת אשר דבר אינו מתרחש עליה דממה קיפאון אך בעולמנו יש גם **מאורעות**, ואנו עדים לתחילתם, לסופם, ולכל מה שקורה ביניהם המושג 'שינוי' העסיק דורות של פילוסופים, עוד מימי היוונים המתמטיקאים התחילו להתייחס ברצינות למושג קשה הגדרה זה אך במאה ה-17 השינוי הוא מושאה של החדו"א, הוא זה המפיח רוח חיים במערכת הצירים

המתמטיקה איננה מגדירה מה זה 'שינוי', אך היא מצליחה לתאר ולאפיין אותו נאמנה, על שני היבטים שינוי במקום ושינוי בזמן. הכלי המרכזי שמבצע את המלאכה הוא **הפונקציה**, מושג כללי מאוד, מופשט מאוד, המצאה אינטלקטואלית טהורה, והיא המפתח של החדו"א ולמעשה המפתח של המתמטיקה כולה הפונקציה מתארת **קשר**, על משמעותותיו המקובלות תלות, זיווג, ברית, סיבה-מסובב וכיו"ב. ספרי הלימוד מציעים גרסה 'רשמית' – **פונקציה היא כלל אשר מתאים לכל איבר בקבוצה A איבר אחד ויחיד בקבוצה B** – ובאופן ציורי מצד שמאל נמצאים איברי A ומצד ימין איברי B, – והפונקציה 'קוטפת' איבר בקבוצה הראשונה ומשדכת לו איבר בקבוצה השנייה 'א', אתה תרקוד עם y, אומרת הפונקציה f אשר משמשת מעין מדריכת ריקודים. הקשר האינטימי הנוצר בין השניים על-ידי הפונקציה נרשם במשוואה $y = f(x)$.

רוח חיים ב: קצב השינוי

מהירות קשורה באופן הדוק לחוויית השינוי שאנו עוברים מדי יום ביומו אנו הולכים, רצים, נוסעים, טסים אך מהי המשמעות של נסיעה במהירות של 100 קילומטרים לשעה איך השעות 'מתערבות' בענייני הקילומטרים מהי המשמעות של הקביעה שנסעתי במהירות של 100 קילומטרים לשעה, אם נסיעתי כלל לא ארכה שעה, אלא יותר או פחות? (אפילו דקה?)

עצם הנמצא בתנועה מחליף את מקומו כרגע הוא נמצא

פה, כעבור זמן-מה הוא יהיה שם. חושינו מספרים לנו ששינוי המקום קשור באופן בלתי נמנע לשינוי בזמן **אני הולך מפה לשם, והזמן 'עובר'**. במקום לומר שהחלפת המקום מתרחשת בתוך מרחב הזמן, החדו"א אומרת שהמקום תלוי בזמן, ותלות זו מתוארת על-ידי פונקציה

אך כאן בא 'אבלי' אחד גדול אם עברתי נאמר 70 קילומטרים בזמן כולל של שעה, האם זה אומר שנסעתי כל הזמן באותה מהירות זו אחת האפשרויות כמובן, אך היא לא היחידה ויתכן שהדרך בחלקה הייתה משובשת ונסעתי בה לאט, ובחלקה הנותר יכולתי לנסוע יותר מהר, אך בסך הכול עברתי 70 קילומטרים במשך שעה או אולי אפילו טסתי במהירות גבוהה באמצעות מסוק למשך כעשר דקות, ובזמן הנותר הלכתי ברגל, אך בסך הכול עברתי 70 קילומטרים במשך שעה בכל האפשרויות שתוארו נאמר שהמהירות **הממוצעת** הייתה 70 קילומטרים לשעה אך יש הבדל גדול בין מתכונות הנסיעה שתוארו. כיצד נוכל לתאר את ההבדלים המשמעותיים ביניהן? הרי אם שוטר יעצור אותי בגין מהירות מופרזת, כלל לא יעזור הסבירי על המהירות הממוצעת 'אינני מתעניין במרחק שעברת או שתכננת לעבור במשך שעה אחת לפי הרישום על המכמנות נסעת במהירות של 135 קילומטרים לשעה, ועל זאת אני רושם לך דו"ח וגם תקבל זימון לבית משפט לתעבורה'

כך זה במציאות אין כמעט משמעות מעשית למהירות שאנו מכנים ממוצעת המהירות הרלוונטית היא **המהירות הרגעית**. והנה, לא רק המקום תלוי בזמן אלא גם המהירות, ואיך החדו"א מתארת אותה? כמובן, שוב על-ידי פונקציה

'קטן עד בלי די'

לייבניץ (Gottfried Wilhelm von Leibnitz) יושב בחדר העבודה שלו סמוך לחצות, מעביר את ידו באוויר משמאל לימין ואומר לעצמו ברור שמהירות מערבת שינוי במקום ושינוי בזמן, אך מהי המהירות **עכשיו** הרי היד שלי עברה מרחק מסוים, בזמן מסוים לכמה קטן אוכל לצמצם את משך הזמן כדי להגיע לעכשיו? זמן 'קטן מאוד' 'קטן עד אינסוף' מהי המשמעות של המילים הללו? משך הזמן, קטן ככל שיהיה, חייב להיות מיוצג על-ידי מספר האם זהו אפסי? בוודאי שלא, הרי לא נוכל לחלק

באפס, זוהי פעולה חסרת משמעות 'קטן יותר מכל מספר, אך עדיין גדול מאפס' מעניין מאוד: מספר קטן עד אין-סוף-אשר-מודד-זמן-קצר-עד-אין-סוף-ודרך-קטנה-עד-אין-סוף בעצם למה לא?

לייבניץ רושם t , זהו הזמן עכשיו, ואז הוא רושם dt , וזהו משך הזמן האינפיניטסימלי, ההפרש בין הזמן עכשיו לזה שבא ימידי אחריו. כעת, אומר לייבניץ, אם dt מייצג הפרש זמנים אינפיניטסימלי ואם y (הדרך) היא פונקציה של t , כי אז dy מייצג הפרש מרחקים אינפיניטסימלי, שאותו עובר העצם הנ"ל במשך הזמן dt .

הצעד הבא מתבקש, ולייבניץ רושם dy/dt , שהיא המנה בין המרחק שעבר העצם הנדון במשך זמן אינפיניטסימלי לבין הזמן האינפיניטסימלי, וזוהי בדיוק המהירות של העצם ברגע הנדון t . כך נולד אחד הסמלים המפורסמים של החדו"א

אינפיניטסימל! אין דבר כזה!

במאמר שכתב בשנת 1734, תקף הפילוסוף בישוף ברקלי (Bishop Berkeley) את המושג 'אינפיניטסימלי' אם האינפיניטסימל (או זעירון, בעברית) גדול מאפס, אז ההגדרה של מהירות רגעית לא יכולה להגדיר משהו רגעי, ואם הוא אפס, אז ההגדרה לא יכולה להגדיר שום מהירות שימושי ככל שיהיה, ואין ספק שהמושג היה שימושי מאוד מהרגע הראשון, המשמעות שלו מעורפלת עד מאוד.

אחד האפיונים המרכזיים של קבוצת המספרים הממשיים הוא שלכל מספר ממשי r יש מספר טבעי n אשר מקיים $r < n$ זהו העיקרון הארכימדי המסקנה המיידית היא שלכל מספר ממשי r יש מספר טבעי m המקיים $1/m < r$ עובדה זו משאירה את המספרים הקטנים עד בלי די, הזעירונים, מחוץ למגרש המשחקים צריך לחפש ולמצוא מושגים יותר 'סולידיים' (בניסיון להחזיר לאינפיניטסימלים את 'כבודם האבוד', פיתח אברהם רובינסון (Abraham Robinson) בשנות השישים של המאה הנוכחית את האנליזה הלא-סטנדרטית, שבה העיקרון הארכימדי איננו חל על קבוצת המספרים הממשיים אך הווייתו על העיקרון מחייב תשלום גבוה במאמר זה לא נעסוק באנליסה לא-סטנדרטית¹)

קושי צועד אל הגבול

הניסיון להגדיר היטב את המהירות 'הרגעית' העסיק את מיטב המוחות המתמטיים במשך עשרות שנים הראשון שהצליח להניח יסודות משביע-רצון ואשר השפעתו ניכרת היטב אף בספרי האנליזה של המאה העשרים, היה המתמטיקאי הצרפתי קושי (Augustin-Louis Cauchy) קושי הפנה עורף לאינפיניטסימלים וחוליד את המושג 'גבול'. זהו מושג מבריק, אשר אם יוגדר היטב, יענה לכל דרישות הלוגיקה והפורמליזם. זהו מושג קל לתפישה אך קשה מאוד להגדרה.

אם נחשב את איברי הסדרה $S_n = 1/n$, נבחן בבירור שיש "התקרבות", "שאיפה", "התכנסות" של איברי הסדרה "לקראת" האפס הרעיון ברור ברמה האינטואיטיבית, אך הביטויים שהשתמשנו בהם לא יכולים להוות תחליף להגדרה מסודרת, כי הם מתארים באופן ציורי ודינאמי את מה שקורה במונחים ובמובנים של חוויותינו היום-יומיות כאן באה לידי ביטוי גאוויותו של קושי ההגדרה המדויקת של מושג הגבול היא אחת ההגשמות הגדולות של המתמטיקה

לסדרה S_n יש גבול L ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$), אם ככל 'שנתקדם' בה, איבריה יהיו 'קרובים' יותר ויותר למספר L עד כמה קרובים קרובים 'כרצוננו' מה זה קרובים כרצוננו (רוח הרפאים של האינפיניטסימל מנסה לרגע לפתות אותנו מחדש, אך ההגדרה של הגבול תשאיר אותה מחוץ לגדר) ובכן, בהינתן מספר חיובי ε (כלשהו), נוכל למצוא איבר בסדרה שהוא וכל הבאים אחריו קרובים למספר L עד כדי כך, שמרחקם L קטן מהמספר הנתון ε

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n (n \geq N \Rightarrow |S_n - L| < \varepsilon)$$

אכן הגדרה מסובכת – מעורבים בה שלושה כמתים ושני אי-שוויונים הקשורים ביניהם קשר הדוק – אך היא עונה על כל הצרכים וההסתעפויות

1. בנושא זה ראה את מאמרו של ויקטור הרניק 'להורות חשבון אינפיניטסימלי בעזרת אינפיניטסימלים', עליה 4, 5

מה לגבי פונקציה המוגדרת על הממשיים ובכן, לפונקציה יש גבול L בנקודה $x = a$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$), אם

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \forall x, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

המחסום הראשון והקשה ביותר מאחורינו, וכך נפתחת הדרך אל מחוזות חדשים

רצף רצף תרדוף

רעיון הרציפות מבקש לבטא התנהגות 'יפה', 'חלקה', 'לא משובשת', של פונקציה בנקודה מסוימת $x = a$ ובסביבתה הדרישה נראית לכאורה פשוטה ונרשמת מיד כך

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

אם נסתכל על ההגדרה של הרציפות מקרוב, נוכל לראות שהיא מהווה הצהרה בשלושה חלקים

א. $f(a)$ חייבת להיות מוגדרת, כלומר הנקודה a שייכת לתחום ההגדרה של הפונקציה

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ קיים}$$

$$L = f(a) \text{ ג}$$

ברגע שפונקציה f איננה מקיימת את אחד משלושת התנאים (לפחות) בנקודה $x = a$, היא אינה רציפה באותה נקודה

כעיקרון, הרציפות היא תכונה מקומית (פונקציה f רציפה בנקודה $x = a$), אך אם היא רציפה בכל נקודה של הקטע

$[a, b]$ (או אינטרוול כלשהו), נאמר שהיא רציפה על הקטע (על האינטרוול). כך מקבלת הרציפות גם משמעות גלובלית

את המשמעות הגלובלית של הרציפות יחזקו שלושה משפטים אשר יתארו את ההתנהגות של פונקציה בכל הקטע שבו היא רציפה

• הראשון שבהם הוא משפט החסימות אם f רציפה על הקטע $[a, b]$, אז היא חסומה בקטע

$$\exists N, \forall x (x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \leq N)$$

• השני הוא משפט ערך הביניים הבסיסי הרעיון ברור מבחינה אינטואיטיבית אם בין החדר שאני נמצא בו עכשיו לבין החדר שאליו אני הולך מפרידה דלת, אני חייב לעבור דרך הדלת בלשון מתמטית אם f רציפה על הקטע $[a, b]$ ואם $f(a) < 0 < f(b)$, אזי קיים מספר c בקטע שעבורו $f(c) = 0$

• השלישי הוא משפט הערך הקיצון אם f רציפה על הקטע $[a, b]$, אז קיים מספר y בקטע שעבורו $f(y) \geq f(x)$ לכל x בקטע אומרים, שהפונקציה f מקבלת את ערכה הגבוה ביותר בקטע

מצוידים בכלים משוכללים לתפארת, נוכל כעת לצעוד בבטחה אל המקדשים והאוצרות היפים ביותר של ארץ החדו"א, ועל כך בחלק השני של המאמר



כך זה התחילי