

הנושא: שינויים שמביאים טכנולוגיית CAS לסביבה המתמטית של מורים

הוכן ע"י: נורית זהבי וג'ורא מן.

תקציר: במאמר מוצגות דוגמאות לשילוב השימוש בתכנות CAS – Computer Algebra Systems בהוראה ומודגשים היתרונות הדידקטיים של השילוב: מעבר לחשיבה אסטרטגית במקום עיסוק בטקטיקה; בניית קישור משמעותי בין אלגברה וגיאומטריה. הדוגמאות לקוחות מקורסים למורים ומתפרסות על תחומים מתמטיים מגוונים: תורת המספרים, פיסיקה, בעיית ערך קיצון, חתכי חרוט, מערכות משוואות.

מילות מפתח: מחשב, טכנולוגיית CAS, גיאומטריה המרחב, הנדסת המרחב, הנדסה אנליטית, גיאומטריה אנליטית, אוקלידס, מספרים ראשוניים, גורמים, חוק ארכימדס, כוח העילוי, בעיית מינימום, פונקצית המטרה, חתכי החרוט, מודל מתמטי, התוכנה: Derive, ייצוג גרפי, ייצוג סימבולי, מניפולציות סימבוליות, משוואות חשבוניות, קורס למורים, וקטורים, שילוב המחשב בהוראה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 23, תשרי תשנ"ט, אוקטובר 1998, עמודים 15-26.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

שינויים שמביאה טכנולוגיית CAS לסביבה המתמטית של מורים

נורית זהבי, מכון ויצמן למדע
גיוורא מן, מכללת לוינסקי

תקציר

תכנות CAS (Computer Algebra Systems) פותחו כדי לסייע למתמטיקאים ולמהנדסים לפתור בעיות במתמטיקה באמצעות מנגנונים שונים נומריים, סימבוליים, גרפיים דר-ממדיים, גרפיים תלת-ממדיים ותכנותיים הופעת גרסאות של CAS למחשבים אישיים עודדה אנשי חינוך מתמטי לחקור את התרומה האפשרית של תכנות אלו להוראה ולמידה הנחת היסוד לעבודה שנטאר כאן היא כי טכנולוגיית CAS מאפשרת קפיצת מדרגה באופן שאנו יכולים ללמוד וללמד מתמטיקה הרקע המתמטי שיש לנו כמורים מאפשר להעריך את הכלים שמערכת כזו מעמידה לרשותנו ולעשות שימוש מושכל במנגנונים השונים ובשילוביהם המאמר מביא מספר דוגמאות שנוסו בקורסים למורים. הדוגמאות מתארות רצף של מנגנונים ממוחשבים ומדגישות יתרונות דידקטיים של השימוש בטכנולוגיה זו בחינוך.

מטרות ומאפיינים של קורסים למורים עם טכנולוגיית CAS

מערכות אלגברה ממוחשבות פותחו לראשונה בראשית שנות השישים תכנות אלו יודעות בעיקר לעשות חישובים סימבוליים בביטויים אלגבריים, לבצע פעולות בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, לטפל באלגברה של מטריצות ולחשב פונקציות שימושיות במתמטיקה הגרסאות הקיימות כיום מכילות גם אפשרויות גרפיות מרשימות ויכולת תכנות

מרבית מורי המתמטיקה העוסקים כיום בפועל בהוראה, פתרו בעיות בעזרת נייר ועיפרון בזמן לימודיהם הכלי

• בצוות הקורס משתתפת שרה עומר ואביטל אלבוים-כהן

הטכנולוגי שעמד לרשותם היה לוח הלוגריתמים ולאחר מכן סרגל החישוב המחשבון המדעי היה קפיצת מדרגה גדולה מבחינה טכנולוגית, והמחשבון הגרפי גרם לקפיצה גדולה עוד יותר טכנולוגיית CAS, בעלת היכולת לבצע מניפולציות סימבוליות, היא המשך טבעי של ההתפתחות הטכנולוגית בסביבה המתמטית שימוש מושכל במנגנונים השונים ובשילוביהם משחרר את הלומד ממשמעות טכניות כמו חישוב וסרטוט ומאפשר השקעה ומיקוד של אנרגיית הלומד במשמעות המתמטית, בשיטות מתמטיות ובהסברים

אנשי חינוך מאמינים כי שילוב תכנות מסוג זה בהוראה יגרום לשינויים בהוראת מתמטיקה ורואים בכך את האתגר הגדול ביותר של החינוך המתמטי בשנים הבאות גם אם כיום שאלות המחקר לגבי מהות השינויים הצפויים הן עדיין שאלות פתוחות (Hillel 1993), חשוב לשתף את קהיליית מורי המתמטיקה ופרחי ההוראה בהכנה לקראת העתיד העומד בפתח Zehavi 1996, Lachambre & Abboud-Blanchard (1996) במציאות, מרבית המורים עדיין אינם יודעים כלל על קיומן של תכנות CAS לפיכך, תוכנן ומופעל במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן קורס למורים אשר לו המטרות הבאות

- התנסות עצמית בפתרון בעיות באמצעות שילוב המנגנונים השונים של CAS
 - רכישת עצמאות בעבודה עם CAS כמרכיב אינטגרלי בסביבה המתמטית של מורים
 - יצירת מוטיבציה לשימוש בטכנולוגיה זו בהוראה.
- לאור המטרות הללו זוהו והוגדרו ארבעת המאפיינים העיקריים של הקורס

1. בחירת הנושאים המתמטיים להדגמת השימוש ב-CAS לפתרון בעיות נבחרו בעיות המתאייסות לרעיונות מתמטיים חשובים. חלקם בנושאים

שהלומד יתמקד בן אחד של גידול הידע, בעוד שהמחשב מבצע את השאר את הפן שאותו מתבקש התלמיד להטמיע אפשר לשנות לפי העניין הבניה בררנית כזו מתאפשרת כאשר עומדת לרשותנו מערכת מתמטית ממוחשבת מקיפה

להבהרת המאפיינים של הקורס נביא חמש דוגמאות מייצגות תחילה נסקור בקצרה את הדוגמאות שנביא

נפתח בהוכחה הידועה של אוקלידס לקיום אינסוף מספרים ראשוניים. נראה כיצד המנגנון הנומרי החזק של Derive מאפשר להתמקד בקשיים הבסיסיים של ההוכחה. הצגה ברורה של העוקב של מכפלת המספרים הראשוניים הראשונים כמכפלת ראשוניים, מפזרת את הערפל סביב השאלה אם אלה תמיד מספרים ראשוניים על-ידי כך נוצרת מסגרת להוכחה שמאפשרת ניסוח ברור ונכון, הפעם על-ידי סמלים

נעבור לחישובים הקשורים בחוק ארכימדס (כוח העילוי הפועל על גוף השקוע במים שווה למשקל המים שהוא דוחה) כאן נראה כיצד הכלים הסימבוליים של Derive באלגברה ובחזויא משרתים את הלומד המתפנה להחלטות האסטרטגיות המבוצעות לאחר מכן על-ידי המערכת

הדוגמה השלישית משלבת בעיית מינימום עם גיאומטריה אנליטית נוסף על הטיפול המסורתי, על-ידי בניית פונקציית מטרה וחקירת הנגזרת הראשונה והשנייה, אפשר לפתור בעיות מינימום על-ידי מתן הוראה לתכנה למצוא את האפסים של הנגזרת של פונקציית המטרה, בלי לדעת אפילו את הנוסחה המפורשת של פונקציית המטרה או נגזרתה.

הדוגמה הרביעית עוסקת בהצגת חתכי החרוט מתברר ש-Derive מאפשרת לכתוב משוואה המבטאת בצורה 'קריאה' את הגדרת חתך החרוט כתנאי על מרחקים המנגנון הגרפי מאפשר מעבר אוטומטי מן המשוואה לתיאור הגרפי (בלי מניפולציות סימבוליות) המנגנונים הממוחשבים המשחררים אותנו מכבלי הטיפול הקלאסי בגיאומטריה אנליטית מאפשרים לנו לעסוק בחתכי חרוט שאינם בהכרח בעלי צורה קונית.

מקובלים וחלקם בנושאים חדשים שהכללתם במסגרת הקורס התאפשרה רק כעת בסביבת CAS הפתרונות לבעיות מדגימים גם את היתרונות של השימוש בתוכנה וגם שיקולים דידקטיים מועילים הנובעים ממחלך הפתרון

2. הכרת המנגנונים השונים של CAS

סדר הצגת הבעיות נקבע כך שייווצר רצף בחשיפת הכלים השונים של התכנה. מתחילים מניצול המנגנון הנומרי לטיפול בדוגמאות מתורת המספרים, מוסיפים בהדרגה את הייצוגים הסימבולי והגרפי ומשלבים אותם, ומסיימים בשילוב כל המנגנונים לתכנות 'קובצי תכלית' לביצוע והדגמה של תחליכים איטרטיביים

3. ההיבטים הטכנולוגיים של CAS

כמו בכל שילוב של כלי טכנולוגי, חשוב לרכוש מיומנויות טכניות בסיסיות להפעלתו מבחינה זו התכנה Derive (Soft Warehouse, 1990) היא הקלה והידידותית ביותר, ולכן בחרנו בה. קיים היבט נוסף שיש להתייחס אליו לאחר ההתפעלות הראשונית של מורים ותלמידים מיהקסם שבתכנה מתעוררות שאלות כיצד פועלת מערכת אלגברה ממוחשבת או, למה המחשב רק פותר ולא מסבירי חשוב שמורים ידעו כי CAS מתוכננת לפתור משפחות שלמות של בעיות ולכן דרך הפתרון שונה מזו שאנו מפעילים באנלוגיה לידע שיש למורה לנהיגה לגבי מערכות כלי רכב, רצוי מאוד שמורים ירכשו הבנה תיאורטית מינימלית על חישוב סימבולי, מבני נתונים ואלגוריתמים של CAS

(למתעניינים, Harper, Wooff & Hodgkinson 1991) הוא ספר הדרכה בסיסי.

4. השלכות לביתה

ברור מאליו כי כדי לעודד מורים להשתמש בטכנולוגיית CAS עליהם להיות מעורבים בבניית דרכי הוראה מתאימות אפשר להשיג מעורבות כזו על-ידי לימוד על אודות טכנולוגיות חינוכיות, חיכרות עם ניסויים לשילוב CAS בהוראה, ויצירת בעיות עבור תלמידים המסגרת התיאורטית שחודגשה בקורס הוצעה על-ידי החוקר והמפתח טול (Tall 1993) בתור עקרון ההבניה הברריתית לפי עיקרון זה יש לעצב פעילויות לימוד כך

$$\text{נפרק לגורמים את האיבר הבא בסדרה} \\ \text{FACTOR}(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1) = 19 \cdot 97 \\ 277$$

בסך הכול, נקבל אחרי עוד כמה חישובים את הפירוק לגורמים של האיברים הבאים

$$n_6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = \\ = 59 \cdot 509$$

$$n_7 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510511 = \\ = 19 \cdot 97 \cdot 277$$

$$n_8 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 1 = 9699691 = \\ = 347 \cdot 27953$$

$$n_9 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 + 1 = \\ = 223092871 = 317 \cdot 703763$$

$$n_{10} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 + 1 = \\ = 6469693231 = 331 \cdot 571 \cdot 34231$$

$$n_{11} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 + 1 = \\ = 200560490131$$

מהו הקשר בין המחלקים הראשוניים של n_k והמספרים הראשוניים הבונים אותו? עיון ב-11 הדוגמאות (שלא היינו יכולים להגיע אליהן ללא האלגוריתמים החישוביים PRIME ו-FACTOR) מלמד שהמחלקים הראשוניים של n_k גדולים תמיד מן המספרים הראשוניים הבונים אותו. האם אפשר להוכיח השערה זו? כן, n_k אינו מתחלק באף אחד מן המספרים הראשוניים הבונים אותו, כי הוא משאיר שארית 1 אחרי חילוק בכל אחד מהם כך למשל $n_4 = (2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 3 + 1$

כלומר n_4 אינו מתחלק ב-3 (והשארית היא 1).

לאחר שהכרנו באמצעות Derive את התכונה האחרונה של הסדרה (והוכחנו אותה בדרך הקלסית), אנו מוכנים לשאלה האם קיים מספר ראשוני גדול ביותר? נניח שהמספר הראשוני ה- w הוא הגדול ביותר במקרה זה נתבונן ב-

שילוב המנגנונים הסימבולי והגרפי התלת-ממדי של Derive מאפשר חקירת משוואות חשבוניות (כך נקרא למשוואות ליניאריות בעלות מקדמים המהווים איברים מתוך סדרה חשבונית), וגילוי ישר מיוחד במרחב המשותף לכל המישורים המתקבלים ממשוואות כאלה יתרונות ומגבלות הייצוג הגרפי התלת-ממדי של התכנה פותחים כיוון לא שגרתי לטיפול בנושא חקירת מקרים שונים מאפשרת לימוד, רענון והעשרה של נושאים מתורת הווקטורים

אינסוף מספרים ראשוניים

בתחילת ההיכרות עם טכנולוגיית CAS נטעם מעט מן הכוח הנומרי של Derive בדוגמה זו נשתמש ביכולתה של התכנה לבדוק ראשוניות של מספר וגם לפרקו לגורמים, כדי להציע מהלך דידקטי להוכחת משפט אוקלידס

נתבונן בחמשת האיברים הראשוניים בסדרה הבאה

$$n_1 = 2 + 1 = 3$$

$$n_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$n_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$$

$$n_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$$

$$n_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$$

קל לראות שהאיבר ה- n של הסדרה הוא העוקב של מכפלת n המספרים הראשוניים הראשונים כמו כן, שלושת האיברים הראשונים של הסדרה הם לבטח ראשוניים מה לגבי 211 או לגבי 2311? כאן נפנה ל-Derive ונקבל $\text{PRIME}(211) = \text{True}$ וגם $\text{PRIME}(2311) = \text{True}$

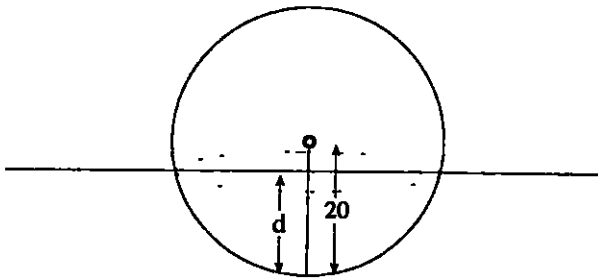
האם כל איברי הסדרה הם מספרים ראשוניים? האיבר הבא הוא

$$n_6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$$

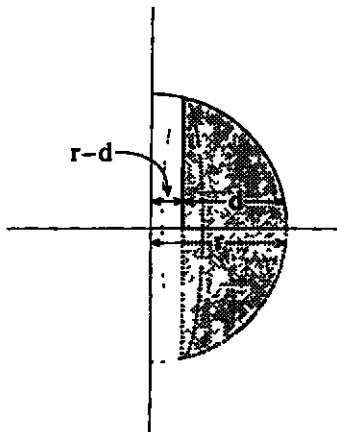
נבדוק ראשוניות: $\text{PRIME}(30031) = \text{False}$

טבעי בשלב זה לברר מדוע 30031 אינו ראשוני נפרק לגורמים, ואמנם $\text{FACTOR}(30031) = 59 \cdot 509$

הכדורי (ראה איור 1)



איור 1



איור 2

נבטא תחילה את משקלו של כדור שהרדיוס שלו r ומשקלו הסגולי σ עתה עלינו לבטא את נפח חלק הכדור השקוע במים בעומק d כאן מתברר שנוקטים לנוסחה לנפח כיפה זוהי הזדמנות לנצל את הכלי הסימבולי, להיכנס לתפריט Calculus ולחשב את הנפח של גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב השטח שבין קשת המעגל, המיתר עבור $x = r - d$ וציר ה- x (ראה איור 2) באיור 3 רואים

את שלבי החישוב כפי שבוצעו באמצעות Derive

באיור 3 שלבי החישוב במציאת עומק הציפה של הכדור הפונקציה $f(x)$ המתאימה לקשת המעגל מוגדרת בשורה הראשונה, ובשורה השנייה רשום ומחושב האינטגרל המסוים בהתייחסות לפונקציה שהוגדרה המשוואה המתארת את המודל המתמטי מופיעה כבר בשורה

$$n_w = p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_{w-1} \quad p_n + 1$$

העוקב של מכפלת כל המספרים הראשוניים לפי מה שראינו קודם, המחלק הראשוני הקטן ביותר של n גדול מכל המספרים הראשוניים הבונים אותו מובן שזה לא ייתכן כיוון שההנחה, שיש מספר ראשוני גדול ביותר, הובילה לסתירה – יוצא בהכרח שהנחה זו אינה נכונה. אם כן, אין מספר ראשוני גדול ביותר במילים אחרות קבוצת המספרים הראשוניים היא קבוצה אינסופית

ההוכחה הקלאסית על קיום אינסוף מספרים ראשוניים המופיעה עוד אצל אוקלידס מקבלת מימד חדש בגלל השימוש ב- CAS הקלות הבלתי מוכרת של חישוב ראשוניות או פירוק לגורמים, מכינה היטב את הרקע לשלב האחרון של ההוכחה כמובן שהדבר חשוב במיוחד לאוכלוסייה שטרם הגיעה ליבגרות מתמטית לומדים אלה חייבים לראות את המספרים כדי להאמין בעבר, לא היה אפשר להראות להם איברים רחוקים יחסית בסדרה ואת הפירוק לגורמים שלהם התוצאה הייתה שרק אנשים בעלי רמת הפשטה מספקת יכלו לעכל את ההוכחה השימוש ב- CAS מאפשר הכנסת הנושא לקורסים ברמות השונות – ללימוד או לרענון לפי הצורך

כדור צף

פתרון סימבולי של משוואות כלליות ממעלה שלישית הוא אחד החידושים שמערכת אלגברה ממוחשבת מאפשרת כאשר אנו עוסקים בבניית מודלים מתמטיים לבעיות של גופים צפים בנוזל, מתקבלות משוואות ממעלה שלישית שאפשר לפתור אותן באמצעות המנגנון הסימבולי של CAS מלבד הטיפול במודל מתמטי לחוק ארכימדס, יש בפעילות כזו התייחסות לעבודה המרובה והעקשנית של קרדן ואחרים במציאת שורשים של פולינומים ממעלה שלישית – אשר אפשרה לכלול אותם במנגנון הסימבולי

בעיה

כדור בקוטר 40 ס"מ צף בברכת מים, משקלו הסגולי 0.104 גרם-סמ"ק המשקל הסגולי של המים 1 גרם-סמ"ק על-פי חוק ארכימדס לגבי גוף צף, כוח העילוי הפועל על גוף השקוע במים שווה למשקל המים שהוא דוחה. באיזה עומק d מתחת לפני המים נמצא קצהו התחתון של

השלישית, הביטוי באגף ימין מתאר את משקל הכדור, והביטוי באגף שמאל מתאר את משקל המים שהוא דוחה (המשקל הסגולי של מים הוא 1 גרם-סמ"ק) הצבת ערכי הרדיוס והמשקל הסגולי של הכדור נותנת משוואה פרטית ממעלה שלישית בשורה הרביעית הקשה על פקודת solve נותנת בדיוק את שלושת הפתרונות (הערה אפשר להפעיל פקודה על-ידי הקשה על האות הרשומה בגדול) הקשה של פקודת Approx תראה כי ערך מקורב של הפתרון השני הוא 59.04, וערך מקורב של הפתרון השלישי הוא 7.04 שני פתרונות אלו אינם מתאימים לבעיה מאחר שקיימת הגבלה על d , $0 \leq d \leq 2r$ (ההגבלה לגבי התחום האפשרי לא באה לידי ביטוי במשוואה המתארת את המודל המתמטי) לפיכך, פתרון השאלה הוא $d = 8$

$$\#1 \quad F(x) = \int (r^2 - x^2)$$

$$\#2 \quad \int_{r-d}^r F(x) dx = \frac{\pi \cdot d^2 (3r - d)}{3}$$

$$\#3: \quad \frac{\pi \cdot d^2 (3r - d)}{3} = \frac{4}{3} \pi r^3 \sigma$$

$$\#4: \quad \frac{\pi \cdot d^2 (3 \cdot 20 - d)}{3} = \frac{4}{3} \pi \cdot 20^3 \cdot 8.104$$

$$\#5 \quad \boxed{1 \div 0}$$

$$\#6: \quad d = 2 \sqrt{273} + 26$$

$$\#7: \quad d = 26 - 2 \sqrt{273}$$

איור 3 שלבי החישוב במציאת עומק הציפה של הכדור

השלמת הפתרון ללא מאמץ טכני מעודדת עיסוק נוסף במודל המתמטי שפותח קל לפשט את השורה הרביעית ולרשום אותה בצורת משוואה 'מסודרת' $d^3 - 60d^2 + 3328 = 0$ אפשר לנסות לשנות את גודלו של רדיוס המעגל ולראות כיצד משתנה d למשל, אם $r = 15$ תתקבל המשוואה $d^3 - 45d^2 + 1404 = 0$ שפתרונה $d = 6$ אם שמים לב, בשתי הדוגמאות לעיל, לשוויון היחסים בין ערכי r (15, 20) וערכי d (6, 8), עולה ההשערה כי קיים יחס

קבוע בין r ו- d ואמנם, פתרון המשוואה בשורה הרביעית, כאשר המספר 20 מוחלף ב- r , מראה כי עבור $\sigma = 0.104$ אחד הפתרונות הוא $d = 0.4r$ מכאן עולות, כמובן, אפשרויות לדוגמאות נוספות למשל, עבור $d = 0.2r$ נקבל $\sigma = 0.028$ ועבור $d = 0.8r$ נקבל $\sigma = 0.352$ הקלות שבה מתבצעת הבדיקה במקרים שונים פותחת כיוונים שונים לדיון כיוון אחד הוא פיסיקלי – התופעה של ציפת גופים, וכיוון אחר הוא אלגברי – חקירת פולינום ממעלה שלישית

במקרים שראינו התקבלו פתרונות 'מסודרים', ולא כך הדבר אם מנסים לפתור משוואות כלשהן ממעלה שלישית. הסיבה להצלחה נעוצה בעובדה שקיום פתרון אחד 'יפה' שקול לפירוק של הפולינום למכפלה של ביטוי ליניארי 'יפה' וביטוי ריבועי, כמו בדוגמה הראשונה שלנו $(d - 8)(d^2 - 52d - 416)$ ההיבט הפיסיקלי בדיון לעיל היה מאולץ במגמה לקבל תרגילים עם תוצאה 'יפה'

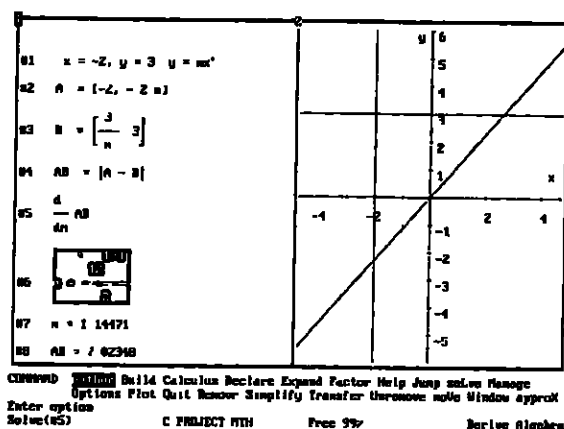
נבדוק עתה כיצד משפיע משקלו הסגולי של הכדור על הקשר בין d ו- r נתחיל במקרה הברור $\sigma = 0.5$ שבו משקלו של הכדור שווה למשקל מים שנפחם מחצית מנפח הכדור, ולכן $d = r$ נבדוק לדוגמה גם את המקרה $\sigma = 0.2$ נציב בשורה 3 המופיעה באיור 3 את הערך 0.2 במקום σ ונקבל (לאחר פישוט) את המשוואה $3d^2r - d^3 = 0.8r^3$ מומלץ לקוראים להתנסות בעצמם בשימוש באפשרויות השונות של פתרון סימבולי של המשוואה (לנוחות העבודה רצוי לעבור לחישוב מקורב ולקבוע כי המשתנה r מקבל ערכים חיוביים בלבד) פתרון של d באמצעות r מביא עמו הפתעה – שלושה פתרונות ליניאריים!

$$d = 0.574281r \quad (\text{זהו הפתרון המתאים לבעיה})$$

$$d = -0.47947r$$

$$d = 2.90521r$$

תוצאה זו גוררת אותנו לבדוק את הפירוק לגורמים של הפולינום בשני משתנים $3d^2r - d^3 - 0.8r^3$ ואמנם, הפירוק לגורמים (באפשרות Radical) נותן מכפלה של שלושה ביטויים ליניאריים ופתח דיון בפולינומים הומוגניים



איור 4 הצגה גיאומטרית של בעיית מינימום

יתרה מזו, הפעלת הפקודה soLve על שורה 5 (ראה הערה בצד שמאל למטה באיור 4) נותנת את הערך של m שבו מתאפסת הנגזרת $1.4471 = m$ בתהליך דומה מוצאים את הערך של m שעבורו מתאפסת הנגזרת של השטח S ומקבלים, אולי בהפתעה, ערך חיובי שונה $m = 1.5$, וגם ערך שלילי -1.5 בשלב זה לא חייבים להמשיך במהלך המסורתי של חישוב הנגזרת השנייה וכך הלאה נשים לב כי מצאנו את נקודת האפס מבלי לרשום במפורש את פונקציית המטרה או את נגזרתה נסרטט בשני חלונות גרפיים את הגרף של AB ואת הגרף של S (איור 5) בעזרת 'חילוץ על גרף' נאתר את ערכי המינימום השונים בשני הגרפים ונגתה, אם נרצה, את התנהגות הגרפים בהתייחס לפונקציות המתארות את אורך היתר ושטח המשולש התחום של הפונקציות חרשומות בחלונות האלגבריים בתמונה 3 הוא $m \neq 0$ תבניות אחרות תתקבלנה אם נביל את התחום ל- $m > 0$ או $m < 0$. כיצד אפשר לראות מהתיאור הגרפי מדוע במקרה של השטח התקבלו שני ערכים שבהם הנגזרת התאפסה ובמקרה של אורך היתר רק ערך אחד, וכיצד אפשר להסביר זאת מתוך תבניות הפונקציות בעקבות החקירה הגרפית נעבור לבדיקת המשמעות הגיאומטרית של הבעיה עבור ערכי m שליליים. עבור $m = -1.5$ המקרה פשוט מאחר שלא נוצר משולש ולכן ערכי AB ו- S שווים לאפס כאן אפשר לשאול אם יש ערך נוסף של m שעבורו שווים אורך היתר והשטח בערכם המספרי. שוב נוכל למצוא תשובה בגישות שונות

למה התפרק הפולינום למכפלה של שלושה פולינומים לינאריים?

$$3d^2r - d^3 - 0.8r^3$$

התשובה היא שזה קרה משום שמדובר בפולינום הומוגני, פולינום שבו סכום המעריכים בכל אחד מהאיברים הוא זהה (במקרה זה 3). פולינום כזה שקול בעצם לפולינום ממעלה שלישית עם משתנה יחיד נסמן $x = d/r$ ונציב rx במקום d במשוואה המקורית ונקבל:

$$3(rx)^2r - (rx)^3 - 0.8r^3 = 0$$

פירוק לגורמים לפי r , או הוצאת r^3 לפני הסוגריים, נותן:

$$-0.8r^3(5x^3 - 15x + 4) = 0$$

בנקודה זו, תוצאה של שימוש ב- CAS היא פתיחת דיון בנושא אלגברי באופן זה השימוש בטכנולוגיה לא רק שאינו מדכא את החשיבה האלגברית אלא מעורר אותה!

בעיית מינימום

נפתח את החלון הגרפי של Derive לצורך בעיית מינימום המשלבת גיאומטריה אנליטית כך נכיר את הכלים הגרפיים וגם נרחיב את מגוון המנגנונים הסימבוליים העומדים לרשותנו

בעיה *:

נתונים הישרים $x = -2$ ו- $y = 3$.

מצאו ישר $amx = y$ כך שיווצר משולש ישר זווית

(א) בעל אורך יתר מינימלי

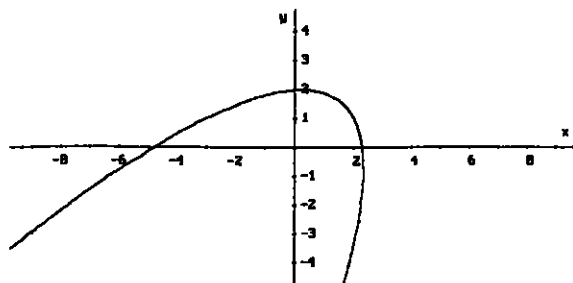
(ב) בעל שטח מינימלי

נשתמש בסימונים של התכנה כדי לסמן את קדקודי המשולש

$$A = [-2, -2m], B = [3/m, 3], (m \neq 0)$$

ואת אורך היתר $|AB| = |A - B|$ (איור 4) נשים לב כי אין צורך לבטא את AB בצורת מפורשת כפונקציה של m כאשר רוצים לטפל בנגזרת כאשר מפעילים את תפריט Calculus ובו את הפקודה Differentiate, התכנה מבקשת לוודא כי משתנה הנזירה הוא m כדאי לציין את הפוטנציאל הפדגוגי של אינטראקציה זו לביסוס מושג הנזירה

* בעיה זו חוברת עלידי שתי מורות, לאה וסרטייל ועידית שרמן, כחלק ממסלולת הקורס

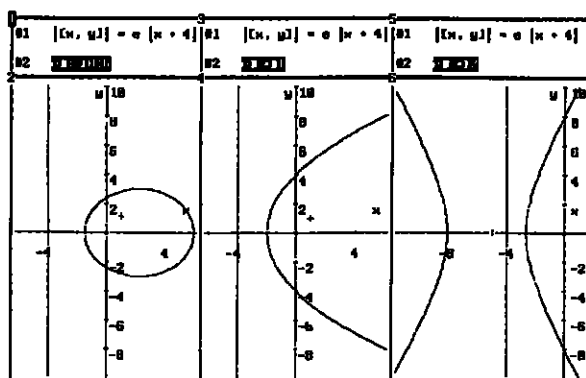


איור 6 גרף של פרבולה 'משופעת'

ניגש לחתכי החרוט, מבחינה גיאומטרית, כאל מקומות גיאומטריים של נקודות במישור שיחס מרחקיהן מנקודה נתונה (מוקד) ומישר נתון (מדריך) הוא גודל קבוע (אקסצנטריות) אם המוקד הוא בראשית-הצירים, $[x, y]$ היא נקודה על חתך החרוט והמדריך הוא הישר $x + p = 0$ אז משוואת חתך החרוט היא $|[x, y]| = e|x + p|$, כאשר ערך מוחלט של וקטור הוא גודל הווקטור (כפי שמגלים על-ידי Simplify).

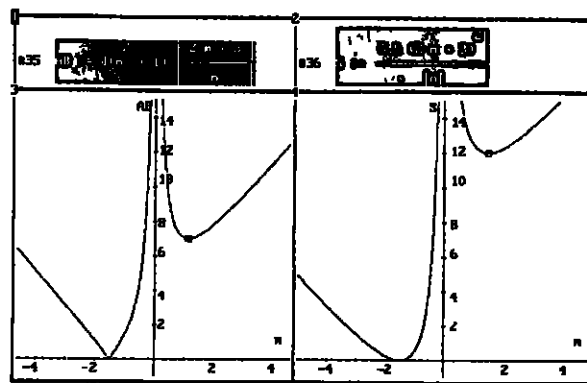
$$(\sqrt{x^2 + y^2}) = e|x + p|$$

נסרטט את הגרף של $|[x, y]| = e|x + 4|$ כאשר $e = 0.6$ (אליפסה), כאשר $e = 1$ (פרבולה) וכאשר $e = 2$ (היפרבולה), בשלושה חלונות על מסך אחד (איור 7)



איור 7 שלושה חתכי חרוט

אם נאמץ נקודת מוצא אלגברית פורמלית נרשום את המשוואה $AB = S$ ונבקש מהתכנה לפתור כמעט בלי כל טרחה מקבלים $m = -5/12$! הקשר האסוציאטיבי לשלשה פיתגורית 5, 12, 13 מוביל לפרשנות גיאומטרית של מקרה מיוחד זה אם נצא מנקודת מוצא גיאומטרית, נברר תחילה כי במקרה שאורך היתר ושטח המשולש שווים בערכם המספרי, חייב הגובה להיות להיות בעל שתי יחידות אורך. ייצוג סימבולי של אורכו של הגובה והשוואתו ל-2 נותן, כמובן, משוואה שפתרונה $m = -5/12$



איור 5 הצגה גרפית של בעיית מינימום

הצגת הבעיה ופתרונה מדגימים אפשרויות למהלכים דידקטיים שונים לטיפול בנושא במיוחד ראינו את השימוש האפשרי ב-CAS כקופסה שחורה עם חורים להצצה במקומות שונים לפי בחירת המורה לאפשרות לנצל את הכלים הממוחשבים השונים כדי להתמקד במושגי מפתח (הבניה בררנית לפי Tall) יש פוטנציאל פדגוגי רב

חתכי החרוט

נתונה המשוואה

$$16x^2 - 24xy + 40x + 9y^2 + 70y = 175$$

מחי צורת הגרף של משוואה זו אחד היתרונות הגדולים של Derive הוא היכולת לסרטט גרפים של משוואות סתומות פקודת Plot תיתן לנו משהו הנראה כמו גרף של פרבולה (ראה איור 6) מאחר שפרבולה היא אחד מחתכי החרוט, נפנה כעת לטיפול בחתכי החרוט באמצעות הייצוגים השונים של Derive.

במדריך כללי $ax + by = c$, במוקד $[u, v]$ ובנקודה כלשהי $[x, y]$ על הפרבולה נרשום את משוואת הפרבולה בתור תנאי על מרחקים

$$\frac{|ax + by - c|}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = |[x, y] - [u, v]|$$

נפשט בעזרת התכנה ונקבל את המשוואה

$$b^2x^2 - 2abxy + (2ac - 2a^2u - 2b^2u)x + a^2y^2 + (2bc - 2a^2v - 2b^2v)y + (a^2 + b^2)(u^2 + v^2) - c^2 = 0$$

עתה נשווה אותה עם המשוואה שבה פתחנו

$$16x^2 - 24xy + 40x + 9y^2 + 70y = 175$$

אחרי מספר שיקולים ומניפולציות סימבוליות נגלה את המדריך $3x + 4y - 15 = 0$, את המוקד $[1, 1]$, ואת משוואת הפרבולה

$$\frac{|3 \cdot x + 4 \cdot y - 15|}{5} = |[x, y] - [1, 1]|$$

נסרטט בצורה סתומה את המדריך, המוקד והפרבולה 'המשופעת' ונאשר גם באופן גרפי שקיבלנו את הגרף המופיע באיור 6

אין ספק כי

$$\frac{|3 \cdot x + 4 \cdot y - 15|}{5} = |[x, y] - [1, 1]|$$

היא משוואת פרבולה גם בלי סרטוט הגרף (כי היא 'יתרגום' ישיר של התנאי על המרחקים) 'אנו רואים כיצד המנגנון הסימבולי משנה את 'התרבות' של כתיבת משוואות של חתכי חרוט במקום השניוניות של פעם נעדיף בסביבת Derive את הכתיב 'השקוף'

גם במקרה זה נוכל לעבור לשיעורים קוטביים שוב נקבל שתי פונקציות הנותנות לנו את אותו גרף אבל הפעם, בניגוד להצגה הכללית של חתכי החרוט, קשה מאוד להבין משהו מן ההצגה הקוטבית, ולכן יתרונה העיקרי הוא שוב בכך שהיא מאפשרת להציג את הפרבולה כגרף של תבנית אחת

הגרפים שהתקבלו אינם גרפים של פונקציות ואמנם, אם נפתור את המשוואה הכללית עבור y , התכנה נותנת שני פתרונות

$$y = IF(e|x + p| \geq 0, \sqrt{x^2(e^2 - 1) + 2e^2px + e^2p^2})$$

$$y = IF(e \cdot |x + p| \geq 0, -\sqrt{x^2(e^2 - 1) + 2e^2px + e^2p^2})$$

שהם פונקציות נגדיות! האם אפשר לקבל משוואה מפורשת אחת שמתארת את חתכי החרוטי התשובה חיובית, אבל כדי לקבל משוואה מפורשת אחת עלינו לעבור להצגה במערכת שיעורים קוטבית

אם חוזרים למשוואה המקורית $|[x, y]| = e|x + p|$ מעלים אותה בריבוע ומציבים במקום x ו- y $x = r \cos(\theta)$ ו- $y = r \sin(\theta)$ ופותרים עבור המשתנה r , מקבלים, עבור $-\pi \leq \theta \leq \pi$, שני פתרונות

$$r = \frac{e \cdot p}{1 - e \cos(\theta)} \quad \text{ו-} \quad r = -\frac{e \cdot p}{e \cos(\theta) + 1}$$

המעניין ביחס לשני הפתרונות הוא שהם נותנים אותו גרף והם שונים זה מזה רק כמסילות ואמנם,

אם

$$r_2 = \frac{e \cdot p}{1 - e \cos(\theta)} \quad \text{ו-} \quad r_1 = -\frac{e \cdot p}{e \cos(\theta) + 1}$$

$$r_2(\theta \pm \pi) = -r_1(\theta) \quad \text{אז}$$

ולכן (r_1, θ) ו- $(r_2, \theta \pm \pi)$ הם שני שמות שונים של אותה נקודה במערכת שיעורים קוטבית יוצא שבשיעורים קוטביים אפשר להסתפק במשוואה פונקציונלית אחת $r = \frac{e \cdot p}{1 - e \cos(\theta)}$ עבור כל חתכי החרוט

נחזור למערכת שיעורים קרטזית בהיותנו מצוידים במנגנונים של Derive לא נחסס לטפל גרפית ואלגברית בחתכי חרוט שציר הסימטריה שלהם אינו ציר x נתחיל

משוואות חשבוניות

כאן ניעזר ב-Derive לחקור את משפחת המשוואות החשבוניות בשני משתנים או יותר נגדיר משוואות חשבוניות בתור משוואות ליניאריות שמקדמיהן מהווים איברים בסדרה חשבונית (Ben-Chaim, 1997) למשל, המשוואה $2x + 3y + 4z = 5$ היא משוואה חשבונית בשלושה משתנים כי המקדמים 2, 3, 4, 5 מהווים סדרה חשבונית

$-5 = 7x + 4y + z - 2w$ היא משוואה חשבונית בארבעה משתנים כי המקדמים -5, -2, 1, 4, 7 מהווים סדרה חשבונית כמובן, משפחת המשוואות החשבוניות ב-n משתנים היא תת-קבוצה של משפחת המשוואות הליניאריות ב-n משתנים

נתחיל במשוואות חשבוניות בשני משתנים נפתור בתחביר של התכנה, מערכת של שתי משוואות חשבוניות

$$\begin{aligned} a_1 x + (a_1 + d_1) y &= a_1 + 2 d_1, \\ a_2 x + (a_2 + d_2) \cdot y &= a_2 + 2 d_2 \end{aligned}$$

$$[x = -1, y = 2] \quad \text{ונקבל}$$

כלומר, כל מערכת של שתי משוואות חשבוניות גוררת את מערכת המשוואות החשבוניות $[x = -1, y = 2]$ (המקדמים של המשוואה $x = -1$ הם: 1, 0, -1 והמקדמים של $y = 2$ הם: 2, 1, 0) מצד שני, כל צירוף ליניארי של שתי המשוואות החשבוניות האחרונות גם הוא משוואה חשבונית ואמנם, $a [1, 0, -1] + b [0, 1, 2] = [a, b, 2b-a]$ מהווים $b, 2b-a$ ושלוש איברי הווקטור $[a, b, 2b-a]$ מהווים סדרה חשבונית במילים אחרות, המערכת $[x = -1, y = 2]$ מהווה בסיס לתת-מרחב הליניארי של המשוואות החשבוניות בשני משתנים (למרחב הליניארי של כל המשוואות הליניאריות בשני משתנים יש בסיס בן שלושה איברים) המשמעות הגיאומטרית של הטאמר היא, שאוסף כל הישרים העוברים דרך הנקודה $(-1, 2)$ הוא מרחב ליניארי שהבסיס שלו מורכב משני הישרים המקבילים לצירי השיעורים בשלושת החלונות 2, 4, 6 בנינו בשלבים את הגרף של

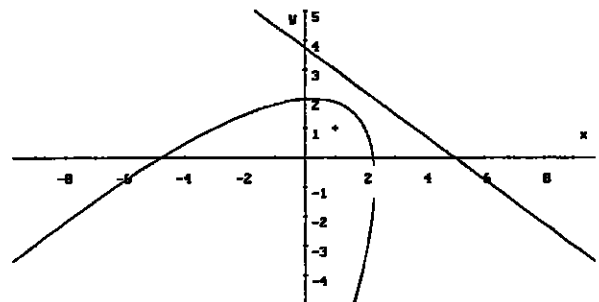
$$\begin{aligned} 2(1 \cdot x + 0 \cdot y = -1) - 3(0 \cdot x + 1 \cdot y = 2) &= \\ = (2 \cdot x - 3 \cdot y = -8) \end{aligned}$$

כיוון שברור מן הגרף שלא מדובר בפונקציה במערכת קרטזית, נפתור את המשוואה הנתונה עבור y

$$y = \frac{20 \sqrt{7-3x} + 12x - 35}{9}$$

$$y = -\frac{20 \sqrt{7-3x} - 12x + 35}{9} \quad \text{וגם}$$

נסרטט את הגרפים של שתי הפונקציות וניתקל באחת ממגבלות הייצוג המפורש חסר הקטע 'המזרחי' של הפרבולה (איור 8)

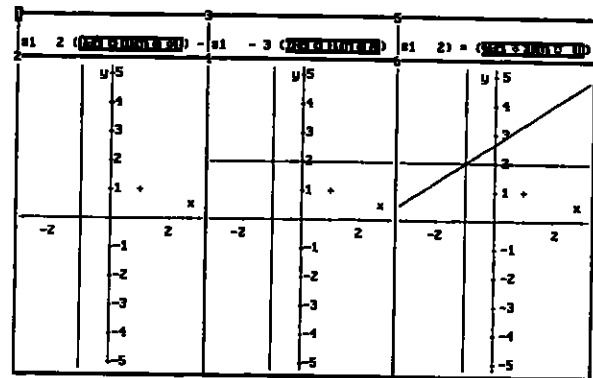


איור 8 תיאור גרפי של פרבולה המנוצגת באופן מפורש

אך יש גם יתרונות טיפול בשתי הפונקציות האלה מלמד מהי הנקודה 'הצפונית' ביותר של הפרבולה (פתרון המשוואה $y' = 0$ מגלה את הנקודה $(0.25, 2)$, ומהי הנקודה 'המזרחית' של הפרבולה (כאשר $7-3x=0$ נקבל $-7/3$, $(7/9)$ השימוש ב'הילוך על גרף' מאפשר בקרה גרפית על התוצאות שנתקבלו, תוך ניצול המנגנונים האלגברי והאנליטי

לסיכום מקרה זה, נאמר כי שימוש יעיל במנגנונים השונים של התכנה מאפשר התבוננות חדשה בנושא מוכר. כתוצאה מתאפשר טיפול קל יחסית במקרים שלא נגענו בהם בעבר בגלל קשיים טכניים כעת, אין כל סיבה שלא נטפל בחתכי חרוט לא קנוניים (דוגמת הפרבולה המשופעת), שפעם היו מחוץ לתכנית הלימודים

הגיאומטריה של הנאמר היא, שאוסף כל המישורים העוברים דרך ישר החיתוך של שני המישורים $z = x + 2$ ו- $y = -2x - 1$ הוא מרחב ליניארי שהבסיס שלו מורכב משני מישורים אלה המקבילים לצירי השיעורים $y = -2x - 1$ (1) מקביל לציר z ו- $z = x + 2$ מקביל לציר y ישר החיתוך ניתן גם להצגה פרמטרית $[t, -2t - 1, t + 2]$, ממנה מתברר שהנקודה $(0, -1, 2)$ נמצאת על ישר החיתוך (האם מצאת את הקשר עם הנקודה $(-1, 2)$ במקרה של שני משתנים) זאת נקודת החיתוך של הישר עם המישור x . $0 =$ נקודת החיתוך עם המישור $y = 0$ היא $(0, 5, 0, 1, 5)$ ונקודת החיתוך של הישר עם המישור $z = 0$ היא $(-2, -5, 0)$



איור 9 בסיס לתת-מרחב הליניארי של המשוואות החשבוניות בשני משתנים

בשלב זה היה טבעי להציג את שני המישורים המהווים בסיס למרחב הליניארי של המשוואות החשבוניות בגרפיקה תלת-ממדית, בדומה למקרה הדו-ממדי, שעסקנו בו קודם

לייצוג הגרפי התלת-ממדי 3D של Derive יש מגבלה קשה אי-אפשר להציג שני גרפים ברזומנית בנוסף, אפשר לקבל רק גרפים של פונקציות המוצגות בצורה מפורשת $z = f(x, y)$ אבל לעתים אפשר להוציא מתוך מעו

מגבלת התכנה גורמת לנו להפעיל ידע מתמטי נוסף כדי להגיע למטרתנו (Zehavi & Ben-Chaim 1996). הרעיון הוא לסרטט משטח אחד בלבד שיראה את ישר החיתוך של המישורים. נבחר במשוואת הבסיס $z = x + 2$ ונוסיף לה את המשוואה החשבונית $x + y + z = 1$ נפעיל כלי אחר שקיים בתכנה פונקציית מינימום ונרשום בביטוי אחד.

$$\text{MIN}(x + 2, -x - y + 1)$$

באיור 10 רואים את הגרף המתקבל מסרטוט ערכי המינימום של z המתקבלים משתי המשוואות הישר המיוחד, ישר החיתוך $(t, -2t - 1, t + 2)$, נראה בבירור

ענה נוסף לפונקציות המינימום איבר שלישי המתקבל ממשוואה חשבונית אחרת $19 = x + 7y + 13z$ ונסרטט הסרטוט באיור 11 זהה לזה שבאיור 10! היכן מסתתר המישור השלישי? נוכל לענות על השאלה בדרכים שונות (למשל, נחשב את הזוויות בין המישורים באמצעות חישובי המכפלות הסקלריות של הווקטורים הניצבים

נעבור לשלושה משתנים כמובן, הגרף של משוואה חשבונית בשלושה משתנים הוא מישור האם כל מישור כזה עובר דרך נקודה מסוימת, או אולי אפילו דרך ישר מסוים כדי לענות על שאלה זו נפתור מערכת של שתי משוואות חשבוניות

$$\begin{aligned} & [a1 \cdot x + (a1 + d1) y + (a1 + 2 \cdot d1) z = \\ & a1 + 3d1, a2 \cdot x + (a2 + d2) y + (a2 + 2 \cdot \\ & d2) z \\ & = a2 + 3 \cdot d2] \end{aligned}$$

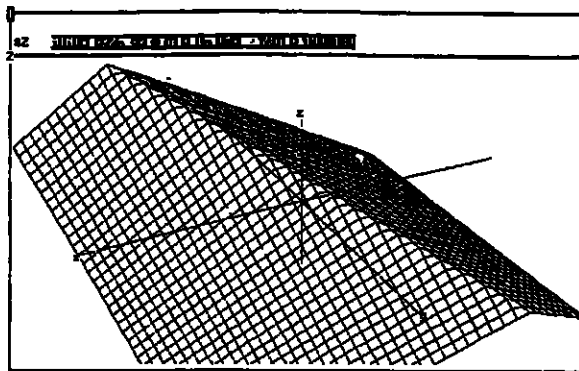
ונקבל

$$[y = -2x - 1, z = x + 2]$$

כלומר, מערכת כל של שתי משוואות חשבוניות גוררת את מערכת המשוואות החשבוניות $[y = -2x - 1, z = x + 2]$ (המקדמים של המשוואה $y = -2x - 1$ הם $2, 1, 0, -1$ והמקדמים של המשוואה $z = x + 2$ הם $-1, 0, 1, 2$) מצד שני כל צירוף ליניארי של זוג משוואות אלה נותן משוואה חשבונית ואמנם,

$$a [2, 1, 0, -1] + b [-1, 0, 1, 2] = [2a - b, a, b, 2b - a]$$

וארבעת מרכיבי הווקטור האחרון מהווים סדרה חשבונית במילים אחרות, זוג המשוואות מהווה בסיס לתת-מרחב הליניארי של המשוואות החשבוניות בשלושה משתנים (למרחב הליניארי של כל המשוואות הליניאריות בשלושה משתנים יש בסיס בן ארבעה איברים) המשמעות



איור 11. שלושה מישורים נחתכים בישר המיוחד

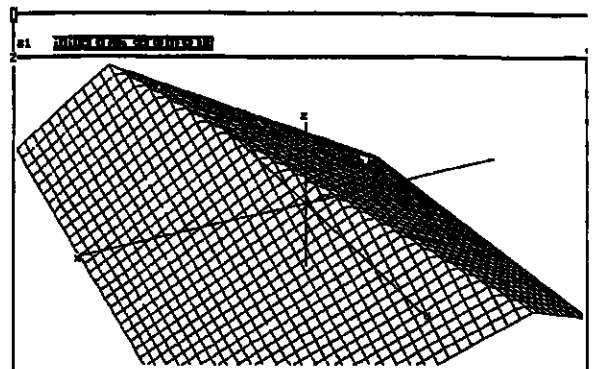
סיכום

ראינו חמש דוגמאות ל'עשיית' מתמטיקה בסביבת Derive המאפיין העיקרי של כל הדוגמאות האלה היא שעבודה בסביבה טכנולוגית, שבה אפשר להעביר את המשימות הטכניות כמו פתרון משוואות או סרטוט גרפים לתכנה, מאפשרת לעבור לחשיבה אסטרטגית במקום לעסוק בטקטיקה

התוצאה היא ששילוב מושכל של הייצוגים השונים של התכנה מאפשר גישה אחרת אל בעיות ישנות, הכוללת בניית קשר חזק בין אלגברה וגיאומטריה (גם בשלושה ממדים), ושקיפות רבה יותר של משפטים אלגבריים למעשה, כל בעיה 'מוכרת' מתכנית הלימודים היא פתח לחקירה והרחבה בכל מיני כיוונים המתאפשרים בזכות הייצוגים והכלים השונים

ומה בעניין המטרות שהצבנו לעצמנו בקורסים למורים' החשיפה הראשונה התקבלה בהתפעלות 'מתמטית' ובמבוכה טכנולוגית וגם פדגוגית. לאחר מספר פגישות הפכו ההתפעלות והמבוכה לאהדה, שחלכה וגדלה במהלך הקורס. המורים התבקשו להתייחס למספר פעילויות שנעשו בקורס ולענות על השאלה הבאה 'אם תציג את הפעילות למורים בבית ספרך, על מה תשים דגש' תשובותיהם מוינו לפי המאפיינים שהנחו את בניית הקורס שכיחות ההדגשים שנתנו המורים תאמה את הסדר שבו הצגנו לעיל את מאפייני הקורס בראש וראשונה

למישורים) המישור השלישי שבחרנו עובר דרך ישר החיתוך אך נמצא מעל שני חצאי המישורים הנראים בסרטוט יכולנו לבחור במישור אחר (המתאים למשוואה חשבונית) שעבורו מתקבלת תמונה אחרת שבה מחליף המישור השלישי את אחד משני המישורים מאיור 10 אבל ישר החיתוך זהה!



איור 10 ישר מיוחד במרחב

דווקא מגבלות גרפיות בחלון הגרפי התלת-ממדי שימשו כמוטיבציה לנצל כלים מתמטיים לא שגורתיים כמו פונקציית מינימום נוכל לצרף גם את פונקציית המקסימום ולהשתמש בכלים אלו לחקירה ויזואלית מרשימה של המצבים ההדדיים של כל שלושה מישורים במרחב.

לסיכום, בדוגמה זו נעזרנו במנגנון הסימבולי של התכנה להרחיב מסקנה לגבי מערכת משוואות חשבוניות בשני משתנים למערכת בשלושה משתנים אם נעבור למשוואות חשבוניות בארבעה משתנים נגלה גם הפעם, באופן דומה, שהבסיס למרחב הליניארי של המשוואות החשבוניות בארבעה משתנים הוא זוג משוואות חשבוניות בעלות מקדמים $[-1, 0, 1, 2]$ ו- $[3, 2, 1, 0]$ ו- $[-2, -1, 0, 1, 2]$ בהתאמה באופן כללי אפשר לקבוע שכל משוואה חשבונית ב- n משתנים היא צירוף ליניארי של

שתי משוואות חשבוניות בעלות המקדמים

$$[n-1, n-2, n-3, \dots, 2, 1, 0, -1]$$

$$[2-n, 3-n, 4-n, \dots, -1, 0, 1, 2]$$

רשימת ספרות

- Ben-Chaim, D [1997] 'A Special Point in the 2-D Plane and a Special Line in the 3-D Space', *Int Journal of Mathematical Education in Science and in Technology* 28(3) 345-355
- Harper, D., C Wooff & D Hodgkinson [1991] *A Guide to Computer Algebra Systems* Chichester, John Wiley.
- Hillel, J [1993] 'Computer Algebra Systems as Cognitive Technologies. Implication for the Practice of Mathematics Education', in C. Keitel & K Ruthven (eds), *Learning from Computers Mathematics and Technology* NATO ASI Series F 121, Berlin, Springer, pp. 18-47
- Lachambre, B & M Abboud-Blanchard [1996], *International Derive Journal* 3(3). 109-124
- Soft Warehouse [1990] *Derive – Mathematical Assistant for Your Personal Computer* Honolulu, Hawaii, Soft Warehouse
- Tall, D [1993]. 'Computer Enviroments for the Learning of Mathematics', in R Biehler, R W Schoolz, R Straber & B Winkelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp 189-199
- Zehavi, N [1996]. 'Challenging Teachers to Create Mathematical Projects with DERIVE', *International Derive Journal* 3(2) 1-16
- Zehavi, N & D Ben-Chaim [1996]. 'Visualizing a Special Line in the 3-D Space', *The Derive – Newsletter* #23 3-6

הדגישו המורים שיקולים מתמטיים-דידקטיים (למשל, אינטגרציה של אלגברה, גיאומטריה ואנליזה) חלק מהמורים הדגישו את החידוש במנגנונים הממוחשבים (למשל, 'האפשרות לסרטט גרף של משוואה סתומה') וחלק ציינו היבטים טכנולוגיים (למשל, האפשרות הנוחה לשלב מסך מתוך Derive במסך של Word להכנת מבחנים או עבודות) מורים אחרים התייחסו לחששות להוראה (בעיקר לחשיבות של 'התאמת פעילויות מדורגות לתלמידים ברמות שונות') מתגובות המורים בסיום הקורס התברר כי מרבית המורים המשתלמים הגיעו לעצמאות, בעבודה עם התכנה.

לסיכום, אנו נמצאים בפתחה של תקופה שבה חישובים אלגבריים ייעשו על-ידי כלים טכנולוגיים. אין ספק כי התפתחות זו מציבה אתגר גדול לחינוך המתמטי יש לשער כי בתחילה ישתמשו בכלים גם לבדיקת חישובים הנעשים באמצעות נייר ועיפרון, אך בהדרגה ישתחררו מכבלי החישובים, החשיבה המתמטית תעלה מן הרמה הטקטית של חישובים לטכניים לרמה של חשיבה אסטרטגית הלומד יחליט מה הוא רוצה מבלי לדאוג שהוא יצטרך לבצע את צעדי החישוב, וכך יעז לבקש ממערכת אלגברה ממוחשבת לעשות דברים שפעם לא העלינו על הדעת את האפשרות לעשותם האתגר העומד בפני קהיליית המהמכים הוא לכוון את השינוי כך שיוביל ליצירת תמונה ברורה של רעיונות מתמטיים כלליים