

הנושא: סכום החזקות ה-k – יות של n הטבעיים הראשונים

הוכן ע"י: דודו אמזלג.

תקציר: במאמר מוצגות שתי שיטות למציאת סכום החזקות ה-k – יות של n הטבעיים הראשונים בצירוף הוכחות לנכונותן. השיטה הראשונה היא רקורסיבית והשנייה מאפשרת חישוב ישיר של הסכום.

מילות מפתח: שטח מתחת לעקומה, הפונקציה $f(x)=x^k$ (טבעי, טור, סכום, סכומים, מספרי ברנולי, הבינום של ניוטון, חזקות, זהות, משולש פסקל, אלגברה, מטריצה, רקורסיה, שיטה רקורסיבית, השוואת מקדמים.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 24, אדר תשנ"ט, מרץ 1993, עמודים 17-19.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

סכום החזקות ה-k-יות של n הטבעיים הראשונים

דודו אמזלג

סאייטקס קורפוריישן בע"מ

dudu_amzallag@scitex.com

כדי להשלים את פתרונה של הבעיה (ולא מעט בעיות דומות), הכרחי מצדנו למצוא את הסכום

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k \quad (1)$$

בדרך כלל את הביטויים המפורשים ל- $S_k(n)$ אנו מוכיחים בעזרת אינדוקציה או מקבלים בדרך ישירה על-ידי תרשימים גיאומטריים יש תלמידים שלא מסתפקים בכך ומעוניינים לדעת כיצד יוכלו לחשב ביטויים מפורשים עבור k נתון צורות סגורות לביטויים אלה דורשות שימוש במספרי $Bernoulli$ ¹ הנובעים מיחסי הרקורסיה המורכבים הקיימים בבעיה זו

במאמר זה נציג שתי שיטות למציאת $S_k(n)$ עבור k טבעי נעיר כי שיטות אלו פשוטות ליישום גם על-ידי תלמידים עם רקע לא רחב, יחסית

שיטה א - השיטה הרקורסיבית

טענה:

$$\binom{k+1}{1} S_1(n) + \binom{k+1}{2} S_2(n) + \dots + \binom{k+1}{k} S_k(n) = (n+1)^{k+1} - (n+1)$$

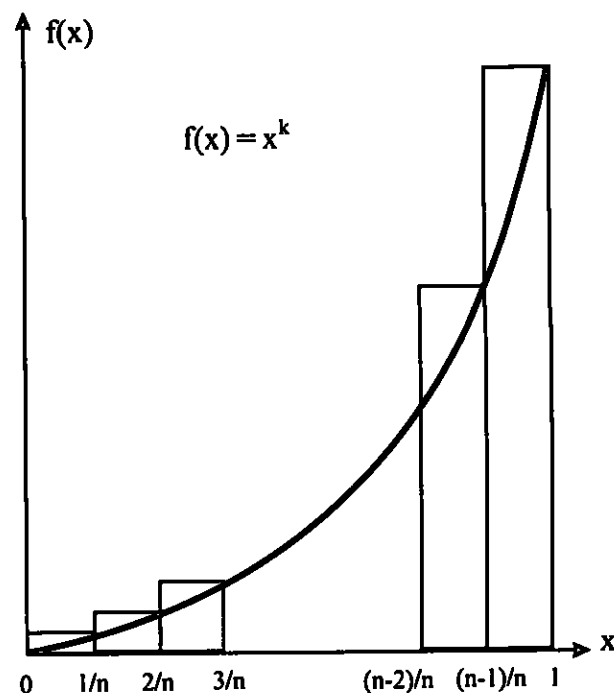
טענה זו היא רקורסיבית ולפיכך חישוב $S_k(n)$ יוגדר היטב אם כל ה- $S_i(n)$, $1 \leq i \leq k-1$, יהיו ידועים

$$\frac{1}{e^x - 1} = 1 + B_1 x + \frac{B_2 x^2}{2!} + \frac{B_3 x^3}{3!} + \dots$$

1. במיתוח הטור
המספרים B_n נקראים מספרי ברנולי

בלימודי החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי אנו נדרשים לחשב את השטח שמתחת לעקומה $f(x) = x^k$ בתחום $[0,1]$ על-ידי חישוב הגבול של סכום מתאים של שטחי מלבנים לדוגמה, בתרשים דלהן אנו מוצאים כי השטח הוא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^k$$



הוכחה: נתבונן במערכת הבאה

$$\begin{aligned}
 (1+1)^{k+1} &= 1^{k+1} + \binom{k+1}{1} 1^k 1 + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} 1^2 + \dots + \binom{k+1}{k} 1^1 1^k + 1^{k+1} \\
 (1+2)^{k+1} &= 1^{k+1} + \binom{k+1}{1} 1^k 2 + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} 2^2 + \dots + \binom{k+1}{k} 1^1 2^k + 2^{k+1} \\
 &\vdots \\
 (1+n)^{k+1} &= 1^{k+1} + \binom{k+1}{1} 1^k n + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} n^2 + \dots + \binom{k+1}{k} 1^1 n^k + n^{k+1}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

נחבר את המשוואות ב-(2) ונקבל

$$\begin{aligned}
 S_{k+1}(n) - 1 + (n+1)^{k+1} &= n + \binom{k+1}{1} S_1(n) + \binom{k+1}{2} S_2(n) + \dots + \binom{k+1}{k} S_k(n) + S_{k+1}(n) \\
 (n+1)^{k+1} - (n+1) &= \binom{k+1}{1} S_1(n) + \binom{k+1}{2} S_2(n) + \dots + \binom{k+1}{k} S_k(n)
 \end{aligned}$$

ומכאן נובע

$$(n+1)^{k+1} - (n+1) = \binom{k+1}{1} S_1(n) + \binom{k+1}{2} S_2(n) + \dots + \binom{k+1}{k} S_k(n)$$

כדוגמה, נחשב לפי שיטה זו את $S_3(n)$

מהטענה עולה כי עבור $k=3$ מקבלים

$$\binom{4}{1} S_1(n) + \binom{4}{2} S_2(n) + \binom{4}{3} S_3(n) = (n+1)^4 - (n+1)$$

אחרי הצבה של

$$S_2(n) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \text{ ו- } S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

ואחרי כינוס איברים נקבל כי

$$S_3(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \text{ או } 4S_3(n) = n^2(n+1)^2$$

שיטה ב - השיטה הלא-רקורסיבית

נדגים את השיטה על ידי מציאת $S_6(n)$ תחילה, נכתוב מחדש את (1) בצורה רקורסיבית באופן הבא

$$S_6(1) = 1 \text{ ו- } S_6(n) = S_6(n-1) + n^6, n \geq 2 \tag{3}$$

כעת, אם נתבונן בביטויים המוכרים של

$$S_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \text{ ו- } S_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

נוכל לנחש כי פתרון $S_6(n)$ הוא מהצורה

$$S_6(n) = A_7 n^7 + A_6 n^6 + \dots + A_1 n + A_0$$

נשתמש ב-(3) ונקבל

$$\begin{aligned}
 A_7 n^7 + A_6 n^6 + \dots + A_1 n + A_0 &= \\
 &= A_7 (n-1)^7 + \dots + A_1 (n-1) + A_0 + n^6 \\
 &= A_7 \sum_{j=0}^7 \binom{7}{j} (-1)^{7-j} n^j + A_6 \sum_{j=0}^6 \binom{6}{j} (-1)^{6-j} n^j + \\
 &\quad + \dots + A_1 \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-1)^{1-j} n^j + A_0 + n^6
 \end{aligned}$$

נשווה את המקדמים של n^j בשני אנפי הזהות עבור $0 \leq j \leq 6$ ונקבל

$$\begin{aligned}
 A_0 &= A_7 \binom{7}{0} (-1)^7 + A_6 \binom{6}{0} (-1)^6 + \dots + A_0 \\
 A_1 &= A_7 \binom{7}{1} (-1)^6 + A_6 \binom{6}{1} (-1)^5 + \dots + A_1 \\
 &\vdots \\
 A_5 &= A_7 \binom{7}{5} (-1)^2 + A_6 \binom{6}{5} (-1) + A_5 \\
 A_6 &= A_7 \binom{7}{6} (-1) + A_6 + 1
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

אחרי כינוס איברים והכפלה ב-(-1) של האגף הימני ב-(4) נקבל

$$A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots + (-1)^k \binom{k+1}{0} A_{k+1} = 0 \quad (7)$$

$$2A_2 - 3A_3 + 4A_4 + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k+1}{1} A_{k+1} = 0$$

$$3A_3 - 6A_4 + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k+1}{2} A_{k+1} = 0$$

⋮

$$\binom{k}{k-1} A_k - \binom{k+1}{k-1} A_{k+1} = 0$$

$$\binom{k+1}{k} A_{k+1} = 1$$

מהמשוואה האחרונה ב-(7) נקבל פתרון כללי ל- A_i בעוד ש-

A_i יחושב מהמשוואה הראשונה ויהיה

$$A_i = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} A_{j+1}$$

נעיר כי A_1 המחושב מהביטוי ל- $S_k(n)$ הוא מספר ברנולי (Bernoulli) ה- k , B_k , לכן, הפתרון שלנו ב- $S_6(n)$ חראה

$$A_1 = B_6 = \frac{1}{42}$$

שיטה זו אינה רקורסיבית ומאפשרת לחשב את המקדמים $S_k(n)$ באופן ישיר

הצגנו שתי שיטות לפתרון של אחת הבעיות המוכרות ביותר במתמטיקה, האחת רקורסיבית והשנייה מאפשרת חישוב ישיר של $S_k(n)$ באופן פשוט יחסית

רשימת ספרות

- 1 C B Boyer 'Pascal's formula for the sums of powers of the integers,' *Scripta Math.* 9 (1943). 237-244
- 2 H J Schultz 'The Sum of the kth Powers of the First n Integers,' *Amer Math Monthly*, 87, 6 (1980), 478-481

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + A_7 &= 0 \\ 2A_2 - 3A_3 + 4A_4 - 5A_5 + 6A_6 - 7A_7 &= 0 \\ 3A_3 - 6A_4 + 10A_5 - 15A_6 + 21A_7 &= 0 \\ 4A_4 - 10A_5 + 20A_6 - 35A_7 &= 0 \\ 5A_5 - 15A_6 + 35A_7 &= 0 \\ 6A_6 - 21A_7 &= 0 \\ 7A_7 &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

כעת נפתור את מערכת המשוואות מהסוף להתחלה מהמשוואה האחרונה מקבלים $A_7 = \frac{1}{7}$, מהמשוואה שלפניה עולה כי $A_6 = \frac{1}{2}$ אם נמשיך בתהליך זה נקבל כי

$$A_1 = \frac{1}{42}, A_2 = 0, A_3 = -\frac{1}{6}, A_4 = 0, A_5 = \frac{1}{2}$$

מאחר ש- $S_6(1) = 1$ נקבל מ-(3) כי $A_0 = 0$, לכן,

$$S_6(n) = \sum_{i=1}^n i^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

את המקדמים במערכת (5) קל יחסית לזכור בצורה המטריציונית הבאה

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 & -7 \\ & & 3 & -6 & 10 & -15 & 21 \\ & & & 4 & -10 & 20 & -35 \\ & & & & 5 & -15 & 35 \\ & & & & & 6 & -21 \\ & & & & & & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

כאשר מתחת לאלכסון הראשי כל איברי המטריצה הם אפסים סיבוב של מטריצה (6) ב- 90° עם כיוון השעון יתן למטריצה את צורתו של משולש פסקל כשהאלכסון השמאלי שלו חסר (והסימנים מתחלפים)

משיקולים דומים מתקיים, באופן כללי

$$S_k(n) = A_{k+1}n^{k+1} + \dots + A_1n + A_0$$

באשר $A_0 = 0$ ועבור כל $1 \leq i \leq k+1$, A_i יכול להתקבל מהמערכת