

הנושא: 'לשוחח מתמטיקה – מדוע? למה?'

ואיך?'

הוכן ע"י:

חיותה רגב ושרה שמעוני.

תקציר:

מאמר זה דן בתרומתה של השיחה המתמטית לבניית הידע של הלומד. המאמר מציג שלוש שיחות בנושאים מתמטיים שונים ומנתחן מהיבטים שונים: אופי השיחה, מבניה ודרכי בניית הידע בהמלכה. מטרת המאמר לשקף למורים ולפרחי הוראה, המנהלים שיח כזה את הקורה בו דרך 'משקפים' מקצועיים שונים, כדי שיוכלו לבחון את המעשה ולשפרו.

מילות מפתח:

שיחה מתמטית, שפה, בניית ידע, הבנה אינסטרומנטלית, הבנה רלציונית, אינטואיציה, ביצוע אלגוריתמי, קונסטרוקטיביזם, פיאז'ה, חוקיות, סכמה, פעילות חקר, הבדלים בין-אישיים, מטה-קוגניציה, דיאלוג סוקראטי, הנחייה, פרחי הוראה, מספרים רציונליים, שברים, שבר מעורב, שבר פשוט, חיסור שברים, אומדן, בעיות מילוליות, ניסוי וטעייה, קומבינטוריקה, דוגמא נגדית, הנדסת המישור, מרובעים, מקבילית, מלבן, בית ספר יסודי.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 25, חורף תש"ס, 2000, עמודים 77-89.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 13 עמודים.

'לשוחח מתמטיקה - מדוע? למה? ואיך?'

חיותה רגב ושרה שמעוני

מכללת לוינסקי

תקציר

מאמר זה דן בתרומתה של השיחה המתמטית לבניית הידע של הלומד המאמר מציג שלוש שיחות בנושאים מתמטיים שונים מתוך תכנית הלימודים בבית הספר היסודי ומנתחן מהיבטים שונים אופי השיחה, מבניה, ודרכי בניית הידע במהלכה מטרת השיחות היא לבנות ידע מתמטי חדש על בסיס ישן ולהגיע להבנה, תוך כדי שימוש במושגים, במבנים ובפעולות מתמטיות ובאמצעות אסטרטגיות של חשיבה ביקורתית, ושל פתרון בעיות תהליך זה מתאפשר בסביבה לימודית גמישה ומשתנה שבה תפקיד המורה אינו 'להעביר ידע' אלא להנחות את תלמידיו לגלות בעצמם את החוקיות בתופעות המתמטיות, ולבנות ידע מתמטי תקף ומבוסס

תפיסה כזו של הסביבה הלימודית, של תפקיד המורה ושל תפקודי הלומד נבנית בעזרת הנחיה הולמת בתהליך הכשרת המורים בהוראת המתמטיקה ידע 'האידי' של הנחיית שיחות מתמטיות יצמח כאשר המורה או המתכשר להוראה יחוזה שיחות מתמטיות כצופה או כמנחה בפועל, וישתכלל כאשר יתבונן בשיחות אלו התבוננות מושכלת דרך 'משקפי' התיאוריה והמחקר

מבוא

כבר כשהיינו קטנות ורכות בשנים (היה זה בשנות החמישים), הבנו שלא לכל דבר יש סיבה אדרבא, הרבה דברים בעולמנו הם שרירותיים וצריך לקבלם כמות שהם מבלי לתהות למה ומדוע

את התובנה הזאת בעולמנו הרך חוללה דווקא המורה לחשבון, כאשר הסבירה לנו למשל איך מחלקים מספרים זה בזה (חילוק ארוך) לוקחים את הספרה הראשונה משמאל בימחולקי ורואים אם היא מתחלקת בימחולקי אם כן, רושמים את מנת החלוקה למעלה ואת מכפלת המנה

במחלק מתחת לספרה ומחסרים אותה מהספרה...וכך הלאה, תהליך שיכול להיות ארוך ומיגע, במיוחד בימי הקיץ

כשנשאלה המורה, 'מדוע עושים כך ולא אחרת?', באה התשובה הבלתי ניתנת לערעור 'ככה זה, פשוט תזכרו שככה מחלקים, לא לכל דבר יש סיבה'

כך קרה שברוב השיעורים היינו עסוקות בחיפוש סיבות למגוון רחב של תופעות ברומו של עולם הגורמים למהפכה הצרפתית, לגלות בבל, להתפרקות ממלכת שאול, לצניחת הזלזל ועוד ועוד, ורק בשיעורי החשבון נחנו מן החיפוש הנואש הזה ופשוט למדנו בעל פה אלגוריתמים וחצבנו בהם שוב ושוב מספרים באוטומטיות מרגיעה

פרופסור פרלה נשר, בהרצאתה בכנס 'מוח', בשנת 1993, העלתה את השאלה 'האם יש קשר בין ביצוע אלגוריתמי לבין הבנה?'

פרופסור נשר מגדירה ביצוע אלגוריתמי הגדרה אינטואיטיבית לפי דבריה 'תהליך דטרמיניסטי הפועל על קבוצת קלטים נתונה לכל קלט אשר יכנס לתהליך יותאם בסופו של התהליך הדטרמיניסטי פלט אחד ויחיד אלגוריתם מבוצע צעד צעד כאשר כל הצעדים ידועים מראש, והתוצאה אף היא ידועה והיא אחת ויחידה'

הבנה, על-פי דברי פרופ' נשר, היא מותן פשר לחדש על בסיס הקיים לעתים על-ידי יצירת אנלוגיות בין מערכת חדשה למערכת מוכרת הפועלת על-פי חוקיות דומה, כמו, למשל, הבהרת פעולת מערכת העצבים על-ידי הקבלתה למרכזיות טלפונים

'להבנה יש מספר רמות והן לא דווקא מסודרות בסדר כל שחוא. הבנה אינה תהליך סופי או מושלם...זהו תחום פרוץ ופתוח ליותר ויותר חבנה...איננו יודעים בדיוק מספיק מה מוליך להבנה ואי-אפשר כנראה להשיג הבנה בדרך מכניסטית כלשהי שתבטיח את התוצאה. אם היה זה כך מלאכתנו כמורים הייתה טריביאלית'

ריצ'ארד סקאמפ (1991), מבחין בין שני פירושים הרווחים בתחום החינוך המתמטי למושג 'הבנה' הוא טובע מונחים מתאימים לשני הפירושים הללו 'הבנה אינסטרומנטלית' ו'הבנה רלציונית'.

הבנה אינסטרומנטלית פירושה 'ידיעת כללים ללא סיבות', או כפי שחלק ממורי המתמטיקה מנסחים 'ידיעת כללים והיכולת ליישםם...' ואילו **הבנה רלציונית** היא 'ידיעה של מה לעשות ומדוע'.

סקאמפ מקשה אולי קיימים בעצם שני מקצועות שנקראים מתמטיקה. האחד עוסק בכללים שיש לשננם וליישםם בדיוק מרבי. המקצוע השני עוסק בבחינה של תופעות מתמטיות בניסיון להבין את ההיגיון שבהן. כדי להצליח במקצוע הראשון נדרשות מיומנויות של זכירה, שינון, זיהוי תבניות, והיכולת להציב בהן מספרים בדיוק מרבי כדי ללמוד את המקצוע השני נדרשת סקרנות לגבי מהותן של תופעות מתמטיות והיכולת לחפש ולגלות חוקיות בתופעות הללו.

הבחנותיהם של פרלה נשר וריצ'ארד סקאמפ מצביעות על דילמה מרכזית בהוראת המתמטיקה כיצד עדיף ללמוד, בדרך של הגעה להבנה רלציונית על-פי תפיסתו של סקאמפ, או בדרך של הכרת אלגוריתמים ואימון בשימוש בהם?

דילמה זו מחריפה בעת האחרונה לנוכח הקלות שבשימוש במחשב לצורך ביצוע פעולות אלגוריתמיות ועמה הצורך הגובר והולך באימון בביצועים אלגוריתמיים הנדרשים בכל תחומי החיים.

האדם הפוסט-מודרני ידוע כ'מדבר עם מכוונות', כמו במצבים של הוצאת כסף מכספומט, שאילת סרטי וידיאו מווידיאוט, וכך הלאה, והמדובר במכלול הפעולות המתוכננות שאנו עושים באופן כמעט אוטומטי מבוקר עד ערב.

אם אפשר בקלות רבה כל כך לחשב חישובים מסובכים ביותר במחשב, מדוע יש צורך ללמוד ולשנן את סדר הפעולות של אותם אלגוריתמים שעות על שעות? מאידך גיסא, האמנם אין צורך בפיתוח המיומנויות של מילוי הוראות במדויק, לפי הסדר הרצוי, התאמת האלגוריתם למצב הספציפי אשר עליו הוא נותן מענה וכיוצא בזה?

פרלה נשר גורסת כי קשה לתת תשובה חד-משמעית לשאלה 'האם ללמד לקראת ביצוע מיומנויות אלגוריתמיות או לקראת הבנה?' לעתים, כדי להגיע להבנה יש לפתוח באלגוריתם ולפענחו צעד אחר צעד (פרופסור נשר מדגימה מצב זה באמצעות הוראת מושג הממוצע) למידה של אלגוריתמים מקלה את ההבנה של תופעות שהן בעצמן אלגוריתמים, כמו עבודה במחשב. ידיעת האלגוריתם מהווה לעתים את צירו של תהליך ההגעה להבנה.

ריצ'ארד סקאמפ מצביע על הקלות והיעילות בלמידה אינסטרומנטלית, המשחררת את המורה והתלמיד מן התהליך המייגע, לעתים, של גילוי החוקיות בבסיס התופעות אך הוא גורס כי היעילות המידית של שימוש באלגוריתמים מתעתעת מטבעה, כי כל בעיה חדשה דורשת התאמה של אלגוריתם חדש ולכן הבנה רלציונית של למה ומדועי, חסכונית יותר לטווח ארוך כי היא מאפשרת בקרה על הביצוע, וגמישות ביישום חסכמות הרלציוניות גדלות בעצמן, טוען סקאמפ, והתהליך של חיפוש החוקיות והגעה לידי הבנה הופך למטרה בפני עצמה.

במאמר זה נבחן, תוך כדי התבוננות בשלוש שיחות מתמטיות, אם וכיצד אפשר להנחות את התלמידים לקראת הבנה רלציונית של תופעות מתמטיות.

השיחה המתמטית

השיחה המתמטית היא תהליך של הוראה-למידה שבו המורה מנחה את התלמידים לגילוי החוקיות בתופעות מתמטיות. יש הרואים בה מעין דיאלוג סוקרטי שבו המורה 'מילד' את ה'אידיאות' המתמטיות ה'קיימות בכוח' אצל התלמידים מטבע בריאתם (תפיסה נייטיביסטית), ומוציאן מן הכוח אל הפועל. אחרים רואים בה תהליך שבו התלמידים בדיעבד בונים ידע מתמטי על-ידי פעילות חקר בעולם המושגים המתמטיים, בתיווכו של המורה (תפיסה קונסטרוקטיביסטית).

מה הוא אופיה של השיחה המתמטית? האם אפשר לזהות בה שלבים מוגדרים? כיצד בונים בדיעבד התלמידים את הידע המתמטי במהלך השיחה? מה טיבו של ידע התוכן הפדגוגי, אליבא דשולמן (1986), כלומר מהו 'ידע דרכי

ההוראה הדרוש למורה כדי לשוחח שיחות מתמטיות טובות עם תלמידיו

להלן תודגמה שלוש שיחות מתמטיות, בנושאים מתמטיים שונים, ותנתחנה לצורך הבהרת החיבטים שהועלו לעיל

• אופיה של השיחה המתמטית

• מבנה השיחה המתמטית

• דרכי בניית הידע במהלך השיחה המתמטית

• ידע דרכי ההוראה הדרוש למורה לצורך הנחיית שיחות מתמטיות

אופי השיחה המתמטית

השיחה הראשונה

דמיינו לעצמכם מורה צעירה יושבת עם שישה מתלמידיה סביב השולחן, בכיתה ה' או ו', ומתנהלת ביניהם השיחה הבאה

המורה מציגה לפני התלמידים את התרגילים דלהלן

$$\begin{array}{lcl} 12\frac{1}{2} - \frac{1}{9} = & & 12\frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \\ 18\frac{3}{2} - \frac{1}{5} = & & 19\frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \\ 12\frac{1}{11} - \frac{1}{5} = & & 10\frac{2}{5} - \frac{3}{5} = \end{array}$$

המורה: התבוננו היטב בתרגילים שלפניכם וחשבו מבלי לחשב, תוצאתו של איזה תרגיל תהיה הקטנה ביותר? הסבירו מדוע תהיה זו התוצאה הקטנה ביותר

התלמידים מתבוננים בתרגילים שעה קלה

תום: התרגיל האחרון עם העשר כי עשר זה הכי קטן תום משווה באופן אינטואיטיבי את המספרים השלמים ואינו מתייחס לשברים כלל האם אינו יודע להשוות בין השברים?

המורה: מה דעתכם, תום צודק? מי שחושב שכן, יסביר למה, מי שחושב שלא, יסביר למה

ליאת: תום לא בטוח צודק כי אולי אם בתרגילים עם השתים-עשרה השבר הראשון יותר קטן מהשני אז יכול להיות שזה יצא יותר קטן מבתרגיל עם העשר

ליאת מודעת בצורך להתייחסות גם לשברים היא יודעת כי צריך להשוות את גודלם של שני השברים כדי לחזות את הפרשם

המורה: מה דעתכם, איך אפשר לבדוק מה שליאת טוענת?

עידן: יו ליאת, את לא רואה שגם בתרגיל עם העשר השבר השני יותר גדול מהראשון, אז ההפרש שלהם יפחית מהעשר וזה בטח יצא הכי קטן בסופו?

עידן משתמש במידע שתרמה ליאת, בודק שוב את התרגיל שתום ציין כבעל התוצאה הקטנה ביותר, ומבחין שתוצאת ההפרש בין השברים תהיה קטנה מאפס, ולכן התוצאה הסופית תהיה נמוכה מעשר, מה שמאשש את ההשערה כי זהו התרגיל שתוצאתו הנמוכה ביותר

המורה: מי מוכן להסביר, איך אפשר להחליט מהי התוצאה הקטנה ביותר מבלי לחשבי מה צריך לבדוק?

המורה יוצרת אתגרת אתגרת של מטה-קוגניציה, היא מבקשת מן התלמידים לבחון מהן הפעולות שעשו כדי לאמוד ולהשוות את התוצאות ולהחליט היכן תתקבל התוצאה הקטנה ביותר חשוב לציין כי לא כל התלמידים מסוגלים להגיע להכללה כזו, אך הסבר הפעולות עשוי לחשב את תשומת לב התלמידים לשיקולי הדעת הרלבנטיים כדי להמשיך לאמוד ולהשוות בדרכים נכונות

יועז: עידן השווה את המספרים השלמים וגם את השברים ובדק אם השבר הראשון גדול או קטן מהשני

המורה: התבוננו כעת רק בשני התרגילים בשורה הראשונה, לאיזה מהם תתקבל התוצאה הגדולה ביותר? שוב, בלי לבצע חישובים לאחר כמה שניות פונה אל תום

המורה: נו תום, מה דעתך? לאיזה תרגיל תהיה התוצאה היותר גדולה?

תום: בתרגיל עם התשיעית יצא יותר קטן כי זה פחות תשיעית

האם תום חושב כי אם נפחית מספר קטן כמו תשיעית, התוצאה תהיה קטנה יותר או אולי להפך, המכנה הגדול, (9), מצביע על שבר שערכו הכמותי גדול יותר?

המורה: מה דעתכם, תום צודק?

השיחה ממשיכה כאשר המורה מאפשרת לעידן להראות כי דווקא מכנה גדול יותר בין שני שברים שווי מונים מצביע על ערך כמותי קטן יותר, וכי יש להשוות את המכנים והמונים בעת ובעונה אחת כדי להגיע למסקנות המבוקשות ואילו רועי מתייחס לגודל ההפרש בין השברים בתרגיל הראשון, לעומת התרגיל השני, וכך הלאה

במה מתאפיינת השיחה?

זוהי שיחה רציפה טבעית וקולחת המורה יוצאת מתוך עמדה של ויתור על סמכותה האינטלקטואלית, היא מעודדת את התלמידים להביע את מחשבותיהם ביחס לבעיה שהועלתה ולהתעמת זה עם זה היא מנחה את התלמידים לחשוב על הבעיה, להיות קשובים לתפיסות חבריהם לקבוצה ולנמק את עמדותיהם בנימוקים לוגיים המורה קשובה לתשובותיהם של התלמידים עד לדקויות המובעות בהן היא משתדלת להבחין בשיאו ומסקונצפציות ועל-פיהן לאבחן את הימצאותו או אי-הימצאותו של ידע קודם והיכולת להשתמש בו במצב החדש

המורה קשובה להבדלים הבין-אישיים בין התלמידים ומאטה או מאיצה את קצב ההנחיה בהתאם לרמתם, עד כי כולם, או לפחות רובם, מסוגלים להבין את ההיגיון בתופעה שהוצגה לאט לאט נחשפות ומתבהרות הפעולות הלוגיות המתמטיות המתאימות לפתרון של הבעיות המוצגות ונתפסת החוקיות במרחב התוכן שבמרכז השיחה

השיחה גמישה ויכולה לנטות לכיוונים רבים, כולם סביב אותה תופעה מתמטית. הכיוונים, הקצב ורמת המורכבות של השיחה נקבעים למעשה על-ידי התלמידים, והמורה מנחה אותם לסייע זה לזה בהבנת התופעה

בדוגמה שתיארנו יכולה המורה לשאול שאלות רבות נוספות, באותו מרחב מתמטי, כמו למשל

• לאיזה תרגיל עם 12 שלמים תתקבל התוצאה הגדולה ביותר?

• האם אפשר לשנות את השבר $\frac{1}{5}$ בתרגיל $\frac{1}{5} - \frac{1}{11}$, כדי לקבל תוצאה גדולה מ-12, מדוע וכיצד?

• אם נחליף את פעולת החיסור בפעולה אחרת בכל התרגילים הללו (כפל, חיבור או חילוק), התוצאה של איזה תרגיל תהיה הגדולה/הקטנה ביותר?

השאלות הללו שונות ברמות קושי ובמידת הספציפיות שלהן כל אחת מהן מובילה לנתיב קצת אחר, אך כולן מיועדות לפתח את הבנת התלמידים בנושא אומדן של תוצאות תרגילים בארבע פעולות החשבון בשברים מעורבים

איזה ידע מתמטי נבנה או מתחזק במהלך השיחה?

בשיחה צומח ידע מתמטי ספציפי, כלומר נבנית הבנה של החוקיות באותן תופעות מתמטיות שבהן אנו עוסקים, ובר-זמנית מתהווה ידע כללי יותר של דרכי פתרון בעיות במתמטיקה.

למשל, בדוגמה שתיארנו, התלמיד לומד כי כדי להחליט תוצאתו של איזה תרגיל תהיה הגדולה או הקטנה ביותר יש לאמוד את תוצאות תרגילי החיסור במספרים מעורבים ולהשוותן לצורך האומדן יש להשוות את השלמים והשברים בעת ובעונה אחת. בהשוואת גודלי השברים יש להתייחס גם למונים וגם למכנים זהו ידע ספציפי למרחב המתמטי שבו עסקינן

בר-זמנית לומד התלמיד כי כדי לפתור בעיה מתמטית יש לשער דרכים שונות לפתרון, לבחון את התאמתה של כל דרך ודרך ולמצוא על-ידי אלימינציה את הדרכים המתאימות והיעילות ביותר לפתרון

במשך השיחה, התלמידים מרוכזים בהבנת ההיגיון המתמטי הספציפי בתופעה הנתונה, אך תוך כדי כך הם מתאמנים בפתרון בעיות בשיטת החקר שטווח יישומה גדול בהרבה, כמתואר בהמשך

מבנה השיחה המתמטית

לשיחה דפוס של דיאלוג סוקרטי שבו המנחה מציג בעיה והשומעים מתבקשים כאילו להאיר את עיניו וללכת לפניו את הבעיה עד למציאת דרך לפתרון, או אף מגוון דרכים לפתרון

אפשר לתאר את מהלך השיחה כמעגלים חוזרים של הדפוס דלהלן

השלימו כך ש

$$12 \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} > 12 \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square}$$

$$12 \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} > 13 \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square}$$

נמקו את תשובתכם

• מדי פעם נערכות 'אתגרות מטה-קוגניטיביות' חשיבה על החשיבה, ורפלקציה, כלומר התבוננות לאחר על התהליך כולו או חלקים ממנו

שרי טישמן ודיוויד פרקינס, (1997), גורסים כי בכיתה חושבת המורה מנחה את התלמידים בפיתוח 'שפה של חשיבה', כלומר מערכת מושגים ומושגי-על המשמשים למטה-קוגניציה כמו 'אני טוען', 'אני גורס', 'הבעיה היא', 'הדרכים לפתרון הן', דרך זו יעילה מן השנייה כי 'וכיוצא בזה

התפתחות שפה כזו היא פועל יוצא של התפתחות תהליכים מטה-קוגניטיביים ורפלקטיביים המסייעים לתלמידים לבחון את תהליכי החשיבה והפעולה שלהם, לאפיינם ולבקדם יכולות כאלה הן הבסיס למכוונות עצמית בלמידה, ולפיתוח חשיבה ביקורתית גמישה ורחבה

שימוש ב'שפת החשיבה' פותח לפני התלמידים מרחב של התבוננות בחשיבתם ומזמן רפלקציות לצורך שכלול החשיבה ודרכי הפעולה פרקינס וטישמן מצביעים על החשיבות שביחסי הגומלין שבין שפה, חשיבה ופעולה

• הסתייעות במערכות אנלוגיות לצורך חשיפת החוקיות במערכת המתמטית

לעתים המורה-המנחה מעביר את התלמידים למערכת שהיא אנלוגית למערכת המתמטית, שם קל להם יותר לגלות את החוקים, ומחזירים למערכת המתמטית תוך כדי יצירת הקבלה

• המורה-המנחה מציגה בעיה

הבעיה צריכה להיות ברמת קושי מתאימה לתלמידים בקבוצה כלומר, בעיה שיש לכל התלמידים בקבוצה בסיס ידע מספיק, כדי להתמודד עמה, ורמת הקושי שלה גבוהה במעט מזו שיכלו לה קודם לכן כדי שתהווה עבורם אתגר אם הבעיה קלה מדי או קשה מדי לרוב התלמידים, לא ייווצר גירוי מספיק להמשך השיחה

חשוב לציין כי במשך הזמן הבעיה הפותחת וכמות בעיות נוספות העולות במהלך השיחה יכולות להיות מוצגות על-ידי תלמידים, ההופכים להיות למעשה שותפים מלאים לתהליך החוראה-למידה

• התלמידים, על-פי קצבם האישי, משערים את הפתרון או את הדרך לפתרון ומנמקים את השערותיהם, מסבירים ומצדיקים את דרכי חשיבתם

חלק מתפיסות התלמידים נכונות וחלקם לוקים במיסקונצפציות יש תלמידים הפועלים באורח אינטואיטיבי ואחרים – המתבססים באופן מודע על ידע קודם ומציגים תפיסה בהירה ומנומקת היטב המורה מומנת השוואת תפיסות ומאפשרת לתלמידים להתאמן בניסוח מילולי של חשיבתם, וכל אחד מהתלמידים מנמק את תשובתו ובוחן את תשובות חבריו המורה שואלת בכל פעם אם התשובה נכונה לדעת המשתתפים, ומבקשת להסביר את התשובות באופן המלא ביותר

• אישוש השערה זו או אחרת, מציאת הדרך או מספר דרכים יעילות לפתרון ו/או מציאת הפתרון הנכון.

העימות בין התפיסות השונות מביא בסופו של דבר למציאת הדרך המתאימה ביותר או הפתרון הנכון והבנתו על-ידי כל המשתתפים בשיחה או לפחות על-ידי רובם

• בדיקה של הדרכים לפתרון על-ידי הצגת בעיות דומות, קרובות, מקבילות או הופכיות

כאן נעשית בדיקה של הידע אשר נבנה במהלך השיחה זהו שלב של בקרה וייצוב הבדיקה יכולה להיעשות על-ידי הצגת בעיה מקבילה (לבדוק שורה נוספת של תרגילים, כיצד נחליט הפעם מהי התוצאה הקטנה ביותר מבלי לחשבי), או הצגת בעיה הופכית

למשל שימוש במודלים של המחשה, כמו רצועות מלבניות מחולקות או מעגלים וגזרות כמערכות אנלוגיות להמחשת נושא השברים, או בבדידים להמחשת פעולות החשבון

ההעברה למערכת אנלוגית נעשית כדי להקל על תלמידים המתקשים לפתח חשיבה ישירה בשפת המספרים לעתים שפת סמלים אחרת, מוחשית יותר, כמו שפת הצורות או הגופים, נחירה להם יותר ומקלה על הבנת חוקים ויחסים

אפשר להדגים מעגליותם של השלבים הללו בשיחה מתמטית נוספת

חשוב לציין כי העיסוק במטה-קוגניציה והשימוש במערכות אנלוגיות אינם הכרחיים לקיומה של השיחה המתמטית, אך יש בהם כדי להעשיר את השיחה ולתת מענה לסגנונות שונים של חשיבה ולמידה.

השיחה השנייה

השיחה	שלבי התהליך	הבחרת המהלכים
המורה מציגה לפני התלמידים, בכיתה ד', את הבעיה הבאה 'לנמרוד ארנק ובו שלושה סוגי מטבעות: מטבעות של 5 אגורות, של 10 אגורות ושל 50 אגורות. נמרוד הוציא מן הארנק בדיוק שלוש מטבעות, איזה סכום כסף הוציא נמרוד?' מורן: בטח 65 אגורות המורה: האם יש לדעתכם אפשרות נוספת? שגית: אולי שניים של 5 ואחד של 10, אז זה עשרים המורה: יש עוד אפשרות? מר: נניח שהיא הוציאה שלושה של 50, אז זה מאה וחמישים המורה: שערו כמה אפשרויות יש אל תשכחו לנמק מדוע שגית: שניים של 10 ואחד של 50 או שניים של 50 ואחד של 10 עידן: אני יודע יש	הצגת הבעיה העלאת השערות שונות לפתרון, הנמקת ההשערות, השוואתן	זוהי בעיה פשוטה אך מסקרנת בתחום הקומבינטוריקה העבודה בקבוצה על בעיה כזו מעניינת משום שהיא מאפשרת לבחון אסטרטגיות שונות שבהן משתמשים התלמידים, כמו ניסוי וטעייה, מיצוי עקיב ושיטתי של כל האפשרויות, ולעתים ניסיון לניסוח אלגוריתם חסכוני מורן מעלה סכום של ערכי המטבעות השונים, כנראה מתוך הנחה כי אם המורה מבקשת סכום יש לסכם את הנתונים שבידינו שגית מנסה למצות כל אפשרות אבל התהליך מייגע ומאחר שאינה רושמת בהקפדה, היא שוכחת אילו אפשרויות מיצתה

השיחה	שלבי התהליך	הבהרת המהלכים
המורה: שמתם לב שכששאלתי מה הסכום מורן מיד אמרה שישים וחמש, אולי תסבירי לנו מורן, מדועי מורן: עשר ועוד חמש ועוד חמישים, ביחד זה שישים וחמש [מורן לא התייחסה לסוגי המטבעות] המורה: מה דעתכם, אתם מסכימים עם מורן? בר: זה נכון אבל ראינו שיש עוד תשובות, כמו מאה חמישים למשל אז צריך להגיד שיכולים להיות כל מיני סכומים המורה: כל סכוםי נניח יכול לצאת מאה חמישים וחמשי מורן: זה לא יכול להיות כי יש כבר יותר משלוש מטבעות המורה: אז איך נגיע לתשובה כמה פתרונות יכולים להיות? עידן: קודם כל מטבע אחת מכל סוג ואחר כך שתיים מסוג אחד ואחת מהשני, אז זה כבר שבע אפשרויות ואחר כך יכולים להיות גם שלושה מאותו סוג וזה עוד שלוש אפשרויות וביחד זה עשר אפשרויות המורה: שמתם לב מה ששגית עשתה קודם, את זוכרת שגיתי שגית: אני עשיתי כל פעם דרך אחרת המורה: ובסוף כמה יצא לך? שגית: לא גמרתי כי כל פעם שכחתי מה כבר עשיתי.	כאן, למעשה, נמשכת השיחה אך מוכנס אלמנט של פיתוח מטה־קוגניציה השוואת יעילותן של האסטרטגיות השונות לפתרון	המורה מזמנת לתלמידים אפשרות להשוות את האסטרטגיות שלהם אלו מול אלו האסטרטגיה של עידן מתבלטת כחסכונית וככדאית ביותר, משום ששיטת מיצוי האפשרויות של שגית הובילה לבלבול ושכחה
המורה: עכשיו, שימו לב, אני הוצאתי 4 מטבעות ונמרוד הוציא 3 מטבעות, למי יש יותר כסף?	הצגת בעיה נוספת, המעמיקה את הבנת הנושא.	כאן מספיק למצוא מקרה מכריע כמו אם המורה הוציאה ארבעה מטבעות של חמש ונמרוד הוציא שלושה מטבעות של עשר, מספר המטבעות בלבד אינו מצביע בהכרח על סכום יותר גבוה זוהי אסטרטגיה חדשה של הוכחה, מציאת מקרה מפריך

השיחה	שלבי התהליך	הבהרת המהלכים
מורן: לך, כי יש לך יותר מטבעות המורה: מה דעתכם, מורן צודקת או אולי לאי חשבו ונמקו עידן: היא לא צודקת כי אולי את הוצאת שלוש של חמש ונמרוד הוציא שתיים של חמישים	מתחיל סבב נוסף של העלאת השערות לפתרון ובחינתן זו מול זו.	[מורן מגיבה אינטואיטיבית יותר מטבעות, יותר כסף.]
המורה: עכשיו בואו נחשוב מהר, אם מותר לי להוציא רק שתי מטבעות, כמה אפשרויות יש לי	תרגול נוסף בבעיה דומה לזו שהוצגה בהתחלה, בדיקה אם הובן העיקרון, אם הובנה יעילותן היחסית של האסטרטגיות	התרגול יכול לבוא מיד אחר הבנת הבעיה הראשונה, וגם בשלב מאוחר יותר של השיחה זוהי דרך לבדוק אם כל התלמידים תפסו את הדרך היעילה ביותר לחשוב קומבינטורי

כהגדרתו של פיליפס, המצוטטת על-ידי פרופסור גבי סלומון (1997) 'הפרטים אינם באים לעולם עם מאגרי המידע הקוגניטיביים שלהם המכילים מראש ידע אמפירי או מדדים אפיסטמולוגיים טבועים מראש ... כמו כן, איננו מאמינים שמרבית הידע האנושי נרכש בצורה מעובדת מראש ככלל, הידע האנושי, ואמות המידה שאנו משתמשים בהן בחקר שלנו נבנים'

ידע, טוען סלומון, 'נבנה באופן פעיל, קשור באורח הדוק לרפרטואר הקוגניטיבי של הפרט ולהקשר שבו מתקיימת הפעילות על כן הוא ממוצב [situated] 'הלומד הוא פועל יותר מאשר צופה' סלומון מתאר את הקונסטרוקטיביזם כיצור בעל שני ראשים 'הראשי המושפע מתיאוריית התפתחות החשיבה של ז'אן פיאז'ה שאותו הוא מכנה 'קונסטרוקטיביזם קוגניטיבי', והראשי אשר נולד מן התפיסה הויגוטצקיאנית הרואה באינטליגנציה האנושית פועל יוצא של תיווך חברתי במרחב התרבותי-ההיסטורי, ואפשר לכנותו 'קונסטרוקטיביזם הממוצב'

וכך הלאה, השיחה המתמטית בנויה, כאמור, מעגלים מעגלים של הצגת בעיה, דיון בהשערות לפתרון, מציאת מגוון דרכים או דרך אחת לפתרון, אתגנות של מטה-קוגניציה וחזר חלילה

בניית הידע במהלך השיחה המתמטית

התלמיד המשתתף בשיחה המתמטית נמצא במהלכה בשני מצבים שונים, לחילופין בחלקים מזמן השיחה הוא שותף לשיח קבוצתי עם חבריו לקבוצה ועם המורה-המנחה בחלקים אחרים מן הזמן הוא 'צולל' לתוך עולם הסכמות הפרטי שלו ומיישב את הידע החדש עם הישן יש להניח כי המעברים בין מצב אחד לשני נעשים כהרף עין והם סמויים, טבעיים ואינהרנטיים לעניין ההשתתפות בשיחה

בעת האחרונה רווחות במערכת החינוך תפיסות קונסטרוקטיביסטיות של הלמידה על-פי תפיסות אלו,

גרין (Greeno 1997), הנחשב לדובר הקונסטרוקטיביזם הממוצב, מדבר על ההשפעות על בניית הידע במצב שבו התלמיד משתף פעולה עם עמיתים, מומחים, ועם מכלול המשאבים הטכנולוגיים שסביבתו הלימודית מזמנת במצב זה 'דעתו' ותודעתו של התלמיד מבוזרת לכל שותפיו, האנושיים והטכנולוגיים, במרחב הלמידה

'ילדיו' הרוחניים של פיאות, אנשי 'הקונסטרוקטיביזם הקוגניטיבי', מדגישים את תהליכי הבנייה הדינמית של הידע, תהליכי הטמעה והתאמה, במגע השוטף עם הסביבה הידע על-פי פיאות מאוחסן בהכרה במבנים הנקראים סכמות הלומד עוסק באורח דינמי ומשתנה כל העת בהטמעת החדש, המתאים להרחבת סכמות ישנות קיימות, והתאמת המבנה הקוגניטיבי לחידושים בסביבה על-ידי ארגונו מחדש ויצירת סכמות חדשות

פרופסור סלומון טוען כי כדי להבין את הוויית הלומד וכדי לתכנן עבורו סביבות למידה אופטימליות, יש לראות את יחסי ההשלמה בין שתי התפיסות הללו, הקונסטרוקטיביזם והקוגניטיביזם הממוצב תפיסות אלה נמצאות, למעשה, 'בתהליך דינמי מתמשך של השפעות הדדיות' הוא מצדד בדעתו של פפרט אשר לפיו בסביבת למידה קונסטרוקטיבית קיימת 'מחזוריות הפנמה של מה שנבנה באופן חברתי כמשמעות משותפת או כתוצר משותף, המשפיע מצדו על הרפרטואר הקוגניטיבי של הילד ולאחר מכן מוחצן לכדי השפעה על השתתפותו החברתית של הילד, וחוזר חלילה'

סלומון מציין כי יחס חזק וחיוני בין איכות פעולות הגומלין המתפתחות בלמידה משותפת לבין איכות הידע הנבנה, היינו 'תוצאות הלמידה', נוצר רק בסביבות למידה פתוחות

הוא מתאר שתי השפעות חשובות נוספות של ההדדיות בין בניית הידע 'ההכרתי' לזו 'הממוצבת'

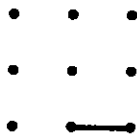
1 היווצרות יחס הדדי בין הבנות ממוצבות לבין הבנות הכרתיות אישיות

2 היווצרות קשרים בין ידע הקשרי-ממוצב לבין ידע מוכלל, נטול הקשר, כמו למשל מודלים של פתרון בעיות

השיחה המתמטית מאפשרת לתלמיד לנוע בין המרחב החיצוני המשותף, ההקשרי והממוצב לבין המרחב הפנימי האישי של הכרתו שלו ככל שמנחה השיחה מצליח להיות רגיש לקצביהם השונים של המשתתפים ולדרך שבה כל אחד מהם בונה את השתתפותו בשיחה ואת תפיסותיו בנושא העומד במרכז, מסוגלים כל המשתתפים או רובם לעשות את המעברים הללו מבחוץ פנימה וחוזר חלילה באופן טבעי, תוך שמירה על מתח ועניין

השיחה המתמטית השלישית

לפניכם שיחה נוספת, הפעם 'הנדסית', בנושא המרובעים, המתרחשת בכיתה ד או ה



המורה: לפניכם רשת נקודות

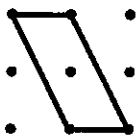
חקו המסורטט בין שתיים מן הנקודות הוא צלע של מקבילית. שרטטו מקבילית שקו זה הוא אחת מצלעותיה

אמיר מצייר את המקבילית דלהו



המורה: האם אפשר לצייר עוד מקביליות?

יואב מצייר עוד מקבילית

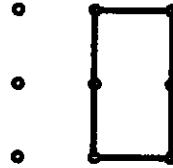


אמיר ויואב 'צללו' לתוך הסכמות הפנימיות שלהם, 'שלפוי' משם את צורת המקבילית וציירו יואב מסוגל יותר לחרוג מן היסטי של שימוש רק בארבע הנקודות הקרובות לצלע, יותר מאשר אמיר

המורה: מה דעתכם, אפשר לצייר עוד מקביליות?

שתיקה התלמידים חושבים שעה קלה, נראה שאינם מוצאים

המורה: אתם יודעים, תלמיד אחד בכיתה המקבילה צייר כך [המורה מציירת מלבן על בסיס הצלע] מה דעתכם על הציור הזה?



המורה מנחה את התלמידים לפגישה עם יחסי ההכלה בין המרובעים קבוצת המקביליות מכילה את קבוצת המלבנים חלקם צוללים ושולפים את תכונות המקביליות מזיכרונם

יעל: אוי המורה, כן, גם זה מקבילית

יואב: אבל זה מלבן, זה לא מקבילית

המורה: מה דעתכם, מי צודק, יעל או יואב?

אמיר: יואב צודק זה מלבן הזוויות שלו ישרות

אמיר ילוקח את הכדור' מיואב ובו ברגע נדמה לו אולי כי אמנם המדובר כאן בשתי קטגוריות נפרדות לחלוטין.

יעל: אבל יש לו שתי צלעות מקבילות, אז הוא גם מקבילית

כאן מתקיים דיון במרחב הבין-אישי תשומת לב הילדים ממוקדת בתפיסות של עמיתיהם ובנימוקים שהם מציגים לתפיסות אלו חשוב לציין, כי ייתכן שיש השפעה של המיצב החברתי על המהירות שבה יסכימו התלמידים לדעה זו או אחרת ילד מקובל יותר, או ידוע כטוב במתמטיקה, יזכה להסכמה גבוהה יותר המנחה צריכה להיות מודעת לימשחק הסמוי של מעמדות חברתיים, העלול להשפיע על הדיון המתמטי

בשיחה כזו כל תלמיד מבצע מעברים רבים ומהירים בין המצב החיצוני לעולמו הפנימי הוא מגלה אידיאות המתהוות במרחב הבין-אישי ומטמיע או מתאים אותן במערך ההכרתי הפנימי הוא לוקח אידיאות מן המערך

הפנימי ושולח אותן למרחב הבין-אישי, בניסיון לבחון את נכונותן בהמשך הוא מיישם את הידע שבנה במעברים הללו, במצבי פתרון בעיות, בשני המרחבים האישי והחיצוני כאחד

אידית אקרמן (1997) מתארת צמיחה קוגניטיבית כיריקוד בין 'צלילה-פנימה' ו'יציאה-החוצה' התלמידים קשובים למתרחש בסביבה הלימודית הם צוללים לתוך המצבים שהסביבה מזמנת להם ומנסים להבין את ההיגיון שבהם ההיגיון הזה 'מגיה' בעזרת כל הגורמים במצב המסייעים לחשיפתו עמיתים, מומחים, טכנולוגיות

מן המצב הזה התלמיד חייב לצלול שוב פנימה ולהתבונן במצב מרחוק, מן הצד, כדי 'לסדר' את הנקלט ב'מגירות ההכרה' לחליפין, הידע שוב עובר 'החוצה', ורק אחרי שעבר, על-פי דברי אקרמן, 'אובייקטיביזציה' הוא חוזר להיות חלק מן ההכרה הפנימית

למרחב החיצוני, הבין-אישי, לפי אקרמן, שני תפקידים

1. להעשיר את ההתנסות בחיפוש ההיגיון, לספק ראיות שונות של החוקיות

2. לאפשר יישום והתנסות לצורך תיקופו של הידע

במהלך השיחה המתמטית קורים שני התהליכים הללו במרחב הבין-אישי, התלמיד חשוף לתפיסות המשתתפים האחרים, המרחיבות את ראייתו את הסביבה, והמאפשרות לו גם לבחון את אמיתותן ותוקפן של תפיסותיו שלו.

השיחה המתמטית היא אירוע בתוך סביבת למידה המעוצבת על-פי תפיסה ערכית לפיה המורה אינו מקור בלעדי של הידע ותפקידו העיקרי הוא להנחות את התלמידים מתוך רגישות ומכוונות לשונות שביניהם, לגלות את החוקיות של התופעות בסביבתם מתוך שיח דינמי בינם לבין עמיתיהם, מוריהם, ומקורות מידע אחרים.

כיצד ננחה פרחי הוראה ומורים בפועל 'לשוחח' מתמטיקה?

הדור הנוכחי של פרחי ההוראה עדיין למד ברובו בשיטה של שינון ביצועים אלגוריתמיים, על-פי המשגתה של פרופסור פרלה נשר

מורה או פרח הוראה אשר נחשף להוראה באמצעות השיחה המתמטית חש בדרך כלל פליאה ופחד בעת ובעונה אחת המורה המתחיל חש הנאה מן ההרפתקה של חיפוש החוקיות והסיפוק שבהבנת ההיגיון המתמטי יש גם תחושת הפחד 'האם אוכל להנחות שיחה כזו בעצמי? מה יקרה אם אחד התלמידים ישאל שאלה שאיני מסוגל לענות עליה במהירות? איך אדע איזו בעיה כדאי להעלות בכל פעם?', וכו' וכו'

בהדרכת המורים להנחיית שיחות מתמטיות, מומלץ לפתח תפיסת הוראה-למידה אשר לפיה תפקיד המורה אינו 'להעביר ידע', כאילו הוא 'לוקח את הידע ממקום כל שהוא, מעבד אותו כדי להקל את ההעברה, ומכניס אותו במצב המעובד אל מוחו של התלמיד', (המודלים המנטליים של המורים, על-פי שטראוס ושילוני 1997), אלא תפקידו להנחות את התלמידים לגלות חוקיות בתופעות ולבנות את הידע בעצמם

תפיסה כזו של תפקיד המורה חזקה עליה שתתפתח בסביבות למידה מושכלות, פתוחות, גמישות ומשתנות המודעות כל העת להשתנות של עצמן

ידע ה'איך' של הנחיית שיחות מתמטיות יצמה כפועל יוצא מדיגום (modeling) והתנסות מודרכים במתכונות הבאות:

1. דיגום-צפייה במורות מומחיות או מדריכות לדרכי הוראה במצבי אמת של הנחיית שיחות מתמטיות בבית הספר

חשוב לצפות בשיחות מתמטיות 'בזמן אמת' אפשר להיעזר גם בצפייה בסרטי וידאו של הנחיית שיחות כאלו או קריאת תיעודי שיחות כאלו על-ידי צופים מיומנים ניתוח אירועים אלו באורח של דיאלוג בין הצופים, ייתכן בשיתוף חלק מן המשתתפים בשיחה, או של כולם, בהנחיית מדריך להוראת המתמטיקה ובמידת האפשר בשיתוף איש דידקטיקה כללית ו/או פסיכולוגיה של ההוראה

2. התנסות בפועל בהנחיית שיחות מתמטיות
חשוב להתנסות בהנחיה בפועל של שיחות מתמטיות כאשר ההתנסות מלווה בשיחת משותפת בהנחיית כוחות ההדרכה שהוזכרו לעיל יש לציין כי על-פי דברי סטודנטים ומורים

אין תחליף להתנסות בפועל בהנחיית שיחות כאלו הביצוע בפועל עוזר להתגבר על החשש ומאפשר איתור של נקודות חוזק וחולשה ודיון בלקחים הנובעים מנקודות אלו עד להעצמה וצמיחת ביטחון בהנחיה

3. השתתפות בשיחות מתמטיות

חשוב כי הסטודנט/המורה יזכה לחוויות השתתפות בשיחות מתמטיות ברמתו שלו, כלומד, בשיחות המתקיימות במסגרת הקורסים המיועדים לביסוס והעמקת הידע המתמטי הספציפי הדרוש להוראת נושאי המתמטיקה ובלמידת נושאים מתמטיים אחרים במסגרת הכשרת מורים והשתלמותם תוך כדי שיחות אלו ישורו 'פרקי רפלקציה בעניין ערכה של דרך זו בהוראת המתמטיקה

בניתוח מצבי הדיגום וההתנסות מומלץ להתייחס למוקדים דלהלן

- הידע המתמטי בנושא במוקד השיחה, תקפותו ו'עומקו'
- ידע ההנחיה, ניחול השיחה, מפרט השלבים, המחזוריות, המעבר משלב לשלב בזיקה לרמת חשיבתם המתמטית הלא-אחידה של התלמידים המשתתפים ולסגנונות הלמידה שלהם

- ידע על החשיבה המתמטית של המשתתפים כאן תיחשפנה מיסקונצפציות, אינטואיציות וקשיים ביחסי גומלין בין ידע חדש לישן.

- ידע גורמים חברתיים ואמוציונליים-מוטיבציוניים המשפיעים על מהלך השיחה

מהם התנאים האופטימליים לניהול שיחת משותפת 'בונה' לאחר צפייה, או להתנסות בהנחיית שיחות מתמטיות?

שיחות ההדרכה, שתפקידן לסייע בתכנון שיחות מתמטיות, ושיחות המשוב, העוסקות בניתוח מצבי דיגום והתנסות, עשירות ויעילות יותר כאשר הן מתנהלות בפורום של יותר מלומד ומורה בלבד מצב אופטימלי לניהול שיחה מעין זו יכול להיות השיחה מתנהלת מיד לאחר הצפייה, בהשתתפות כחמישה עד שישה צופים, חלקם לומדים וחלקם מורים בתחומים כמו מתודיקה של המתמטיקה, דידקטיקה כללית ומתמטיקה חשובה נוכחות של מורה מנוסה

הצעות לביצוע מחקר בפעולה על הוראת המתמטיקה בדרך של שיחות מתמטיות

קזמי (Kazemi 1998) מציע למורה המנחה שיחות מתמטיות לחקור את פעולתו בשני תחומים עיקריים דרכי הנחיית השיחה והנורמות החברתיות והסוציומתמטיות בכיתה והשפעתן על הלמידה

להלן המלצות לחקר פעולה, מעובדות על-פי קזמי

- תיעוד דרכי הנחיה ניהול יומן שבו מתעד המורה, לאורך כארבעה שבועות של פגישות עם התלמידים, מתי, כיצד וכמה פעמים הוא מתערב בעת הסבר של תלמיד, כמה פעמים הוא מסביר פתרון לבעיה, כמה פעמים הוא מסביר אסטרטגיות לפתרון ואם חל שינוי כמותי או איכותי בדפוסי תגובה אלו לאורך הזמן
- זיהוי ותיעוד נורמות הלמידה בכיתה זיהוי הנורמות החברתיות הקשורות בלמידה בכיתה, כמו דפוסי שיתוף פעולה, אסטרטגיות עבודה וכדומה זיהוי הנורמות הסוציומתמטיות, כגון מה מקובל על הכיתה כחסבר נושא במתמטיקה, אילו אסטרטגיות הוראה במתמטיקה מוערכות על-ידי התלמידים ונתפסות בעיניהם כיעילות, טובות וכיוצא בזה
- רפלקציה מתועדת על הקשר בין נורמות הלמידה בכיתה ודרכי ההנחיה חשיבה על דרכי ההנחיה בהתייחס לנורמות הלמידה בכיתה, למשל.
- כיצד אפשר לעודד ולהצמיח אצל התלמידים את התפיסה, כי הסברים במתמטיקה מורכבים מטענות הקשורות זו בזו בקשר לוגי ואינם שורה של צעדי עבודה שיש לבצעם בזה אחר זה באופן שרירותי כיצד אפשר לטפח את התובנה, כי טעויות בחשיבה המתמטית אינן מוכרחות להיתפס כיכשלוף אלא עשויות להוות הזדמנות להמשגת בעיה מחדש ולבדיקת אסטרטגיות חילופיות לפתרון
- הסתייעות בעמיתים ובמומחים לליבון הקשיים וההשגות במהלך העבודה מומלץ להזמין עמיתים ומומחים לצפות בשיחות המתנהלות עם התלמידים וללבן עמם את הבעיות המתעוררות במהלך הנחיית השיחות לגבי דפוסי ההנחיה, חשיבתם של הילדים וכיו"ב כדאי לתעד גם שיחות אלו.
- הערכה ובקרה לאחר התקופה שהוגדרה בתחילה,

1 שיחת המשוב או ההדרכה תונחה אף היא במתכונת של שיח סוקרטי כדי לאפשר לסטודנטים לגלות ולבנות את ידע ההנחיה של השיחות המתמטיות בעצמם.

2 הלמידה תתרחש על הצד הטוב ביותר כאשר הסטודנטים/המורים ומדריכיהם השונים יהוו לצורך העניין מעין קהילייה לומדת אשר מתקיימות בה כל התכונות שמונה שולמן (1997)

- התוכן גנרטיבי, כלומר מהותי וחשוב לדיסציפלינה הנלמדת, ויכול להניב הבנות חדשות או לשמש בסיס ללמידה עתידית
- הלומד פעיל בתהליכי למידתו באמצעות התנסות, חקר ודיאלוג
- הלומד מסוגל לא רק לפעול לבניית ידע התוכן אלא גם לפיתוח רפלקציה על תהליכי למידתו
- מתקיים שיתוף פעולה בדרכים שונות בין הלומדים ומתקיימת למידה אשר ללא השיתוף ויצירת המרחב הבין-אישי ייתכן שלא הייתה מגיעה לאיכות הרצויה
- מורים ומורי מורים חולקים סקרנות ותשוקה ללמוד ולדעת את התחום שבו הם עוסקים, ובמחויבות לתהליכים ולפעולות המעורבים בלמידה
- הדברים קורים בתוך תרבות המעריכה התנסויות ודרכי למידה כאלו ויוצרת את מבני שיתוף הפעולה הדרושים כדי להוציאן מן הכוח אל הפועל
- הוראת המתמטיקה בדרך של הנחיית שיחות סוקרטיות בנושאים מתמטיים דורשת שינוי מושגים ובעקבותיו, או במקביל לו, שינוי מובהק בפרקטיקות תהליך שינוי מעין זה הוא קרקע טובה למחקר פעולה¹

1 מחקר פעולה הוא מחקר שבו המורה חוקר היבטים שונים של עבודתו במהלך עשייתה

כארבעה שבועות של פגישות עם התלמידים, אפשר להעריך מחדש, בעת ובעונה אחת, את התקדמותם של התלמידים ואת איכות דרכי ההנחיה בשלב זה אפשר לזהות ולנתח את התחומים שבהם חל שיפור, ולהציב מטרות להמשך הפעולה

לסיכום

בשלוש השיחות המתמטיות שצוטטו לעיל בולטת הדינמיקה של בניית ידע מתמטי חדש על בסיס ידע קודם באמצעות תהליך הדורש חשיבה לקראת פתרון בעיות והמשגה תהליך כזה יוצר הבנה ובונה אלגוריתמים יותר מאשר דורש לשננם ולזכרם באופן שרירותי

השיחה המתמטית מזמינה את הלומד לנוע בין המרחב החיצוני, המשותף, ההקשרי, שבו יש לו אפשרות לשמוע ולהשמיע רעיונות, לבחנם ולתקפם, לבין המרחב הפנימי האישי אשר בו הוא מתאים ומטמיע את החדש במבני ההכרה שלו

כדי שהוראת המתמטיקה תיעשה בדרך של הנחיית שיחות מתמטיות, המורים/המתכשרים להוראה צריכים לעבור שינוי בתפיסותיהם ואמונותיהם לגבי מהות ההוראה בד בבד עם למידת הפרקטיקה

התנסות בתהליכי הנחיית שיחות מתמטיות כמשתתפים, כצופים וכמנחים היא הבסיס ללמידת ההוראה בדרך זו ההתנסות תועשר על-ידי ניתוח השיחות דרך 'משקפי' תיאוריות ומחקר בתחום ובאמצעות משוב ודיונים רפלקטיביים הנערכים בין עמיתים ומומחים

רשימת ספרות

אקרמן, א' [1997] 'נקיטת פרספקטיבה והבניית אובייקט', חינוך החשיבה, 11 ירושלים, מכון ברנקו וייס לטיפול החשיבה

טישמן, ש' וד' פרקינס [1997] 'שפת החשיבה', חינוך החשיבה, 11 ירושלים, מכון ברנקו וייס לטיפול החשיבה

טישמן, ש' וד' פרקינס [1997] 'תיאורית נטיות של חשיבה', חינוך החשיבה, 10 ירושלים, מכון ברנקו וייס לטיפול החשיבה

נשר, פ' [1993] 'יחיש קשר בין ביצוע אלגוריתמי והבנה', הרצאה בכנס מוח, מרץ 1993. תדפיס על-ידי משרד החינוך, לשכת המדע הראשי, ירושלים

סלומון, ג' [1997]. 'יסביבות למידה קונסטרוקטיביסטיות חדשניות – סוגיות לעיון', חינוך החשיבה, 11 ירושלים, מכון ברנקו וייס לטיפול החשיבה

סקאמפ, ר' [1991] 'יחבנה רלציונית והבנה אינסטרומנטלית', חלקים א-ב, עלייה 8 ועלייה 9

שטראוס, ס' וד' שילוני [1997] חינוך החשיבה, 11 ירושלים, מכון ברנקו וייס לטיפול החשיבה

שולמן, ל' ס' [1997] קהילות לומדים וקהילות מורים ירושלים, מכון מנדל

Cole, M & Y Engestrom [1993] 'A Cultural Historical Approach to Distributed Cognition'. in G Salomon (ed), *Distributed Cognition*, Cambridge, Cambridge University Press

Greeno, J G [1997] 'Response On Claims that Answer the Wrong Questions'. *Educational Researcher* 20(1) 5-7

Kazemi, E [1998] 'Discourse that Promotes Conceptual Understanding'. *Teaching Children Mathematics*

Shulman, L S [1987] 'Those who Understand Knowledge Growth in Teaching'. *Educational Researcher*, 15: 4-14

Pea, R D [1993] 'Practices of Distributed Intelligence and Design for Education'. in G Salomon (ed), *Distributed Cognition*, Cambridge, Cambridge University Press

Perkins, D [1993] 'Person Plus — A Distributed View of Thinking and Learning'. in G Salomon (ed), *Distributed Cognition*, Cambridge, Cambridge University Press