

הנושא: חישוב קיצון של פונקציה על-ידי איטרציה

הוכן ע"י: גיורא מן.

תקציר: בתכנית הלימודים מופיע מושג נקודת קיצון של פונקציה לראשונה בדיון בפונקציה הריבועית. מציאת נקודות קיצון עבור פונקציות נוספות מתבצעת בכלים של חשבון דיפרנציאלי. המחבר מסביר כיצד ניתן להשתמש ביכולות המיוחדות של המחשבון הגרפי למציאת נקודות קיצון בשיטה איטרטיבית עוד לפני העיסוק בחשבון דיפרנציאלי ואף עבור פונקציות שאין בידנו כלים ישירים למצוא את נקודות הקיצון שלהן.

מילות מפתח: פונקציה, נקודות קיצון, נקודת קיצון, נקודת מקסימום, נקודת מינימום, איטרציה, איטרציות, מחשבון גרפי, תכנות.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 25, חורף תש"ס, 2000, עמודים 94-95.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

חישוב קיצון של פונקציה על-ידי איטרציה

גיורא מן
מכללת לוינסקי

הקדמה

בתכנית הלימודים מופיע הנושא של מציאת קיצון של פונקציה לראשונה במקרה של הפונקציה הריבועית שם אנו לומדים שנקודה של הפרבולה על ציר הסימטריה שלה היא נקודת קיצון. אחר כך אנו ממתינים עד לחשבון הדיפרנציאלי כדי לפתור בעיות קיצון נוספות המחשבוני הגרפי מאפשר דיון בנקודות קיצון מן הרגע שהתלמידים הבינו את המושג פונקציה וזאת בזכות 'חיבתו' לביצוע איטרציות. הרעיון המרכזי שנשתמש בו כדי למצוא נקודת מקסימום של פונקציה הוא שאם אנו מתקדמים בצעדים בעלי גודל קבוע מנקודה הנמצאת משמאל למקסימום, אנו מקבלים ערכים הולכים וגדלים של הפונקציה עד לרגע שעברנו את נקודת המקסימום. אם עברנו את נקודת המקסימום, עלינו לסגת צעד אחד (כדי לחזור משמאל למקסימום), ולחזור על כל הפעולה מחדש, הפעם כאשר הצעד קטן יותר (למשל, פי עשר) כבר בשלב זה ברור שאם נפתור את בעיית נקודת המקסימום, יהיה בידינו פתרון גם לבעיית המינימום – מינימום של פונקציה הוא מקסימום של הפונקציה הנגדית לה.

השיטה

נדגים את השיטה במקרה של $Y_1 = \sin X$. קל לגלות שהמקסימום נמצא בין 1 ו 2. לכן נכתוב: $1 \rightarrow X \cdot 0.1 \rightarrow S$, כלומר אנו מתחילים ב-1 וגודל כל צעד (STEP) הוא 0.1, ונקיש ENTER כדי לחסוך בכתיבה ונכניס תנאי עצירה לאיטרציה

$Y_2 = Y_1(X+S) > Y_1(X-S)$ הם קצות קטע שמרכזו ב- X , ו Y_2 בודקת אם ערך הפונקציה בקצה

הימני של הקטע גדול מערך הפונקציה בקצה השמאלי שלו) ואז נכתוב את פקודת האיטרציה $X + SY_2 \rightarrow X$ ונחזור ונפעיל אותה על-ידי ENTER עד ש- X יפסיק להשתנות, כלומר יתייצב על 1.6 כעת נכתוב פקודה המחזירה אותנו צעד שמאלה ואז מקטינה את הצעד פי 10

$X-S \rightarrow X:S/10 \rightarrow S$, נבצע אותה על-ידי ENTER ונקבל שהצעד החדש הוא 0.01 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X + SY_2 \rightarrow X$, ונחזור ונפעיל אותה על-ידי ENTER עד ש- X יפסיק להשתנות, כלומר יתייצב על 1.58 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X-S \rightarrow X:S/10 \rightarrow S$, נבצע אותה על-ידי ENTER ונקבל שהצעד החדש הוא 0.001 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X + SY_2 \rightarrow X$, ונחזור ונפעיל אותה על-ידי ENTER עד ש- X יפסיק להשתנות, כלומר יתייצב על 1.571 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X-S \rightarrow X:S/10 \rightarrow S$, נבצע אותה על-ידי ENTER ונקבל שהצעד החדש הוא 0.0001 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X + SY_2 \rightarrow X$, ונחזור ונפעיל אותה על-ידי ENTER עד ש- X יפסיק להשתנות, כלומר יתייצב על 1.5708 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X-S \rightarrow X:S/10 \rightarrow S$, נבצע אותה על-ידי ENTER ונקבל שהצעד החדש הוא 0.00001 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X + SY_2 \rightarrow X$, ונחזור ונפעיל אותה על-ידי ENTER עד ש- X יפסיק להשתנות, כלומר יתייצב על 1.570797 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X-S \rightarrow X:S/10 \rightarrow S$, נבצע אותה על-ידי ENTER ונקבל שהצעד החדש הוא 0.0000001 אחרי שתי

הפעם נקבל את התוצאה המצופה 1 570796327

נפעיל את השיטה האחרונה במקרה של הפונקציה $Y_1 = 2X - X^2$ עם ערך התחלתי 0 עבור X, ונקבל עצירה בכל שלב כאשר $X = 1$ נפעיל את השיטה שוב על $Y_1 = 3X - X^3$ הפעם התוצאה מעט פחות טובה, 0 9999999999 משום שהפונקציה אינה סימטרית ביחס למקום המקסימום $X = 1$

יתרונותיה של שיטה איטרטיבית זו לחישוב המקסימום הם

א שקיפות בתהליך חישוב המקסימום,

ב. הגדלת רפרטואר בעיות המקסימום שתלמידינו יכולים לפתור – בעיקר, בעיות שפעם לא פתרנו בגלל הקושי בפתרון המשוואה $f'(x) = 0$ נדגים יתרון אחרון זה במקרה ש

$$Y_1 = 3X + X^3 - X^2 - X^4$$

בשיטה הקלסית המשתמשת בגזרות עלינו לפתור את המשוואה $3 + 2X - 3X^2 - 4X^3 = 0$ פתרון משוואה ממעלה שלישית אינו בתכנית הלימודים אמנם, המחשבון יפתור עבורנו את המשוואה בסביבת $X = 1$ (פתרון מקורב אותו מגלים מן הגרף), על-ידי הפקודה

$$\text{'solve (3 + 2X - 3X^2 - 4X^3, X, 1).}$$

והוא 0 8564109115 אבל כל התהליך אינו שקוף' כולל פתרון המשוואה' לעומת זאת, בשיטה שלנו נקבל 0 8564109078 הנכונה עד לספרה השביעית אחרי הנקודה העשרונית,

ג התלמידים לומדים תכנות כחלק אינטגרלי של לימודי המתמטיקה שלהם, ככלי לפתרון בעיה קונקרטית

סיכום

יש מקום לשקול הקדמת הנושא של פתרון בעיות מקסימום מינימום (בעזרת השיטה האיטרטיבית) ללימוד חשבון דיפרנציאלי אין כל הצדקה להמשך המצב הקיים, בו אנו דוחים פתרון בעיות קיצון עד לימוד חדו"א בגלל מסורת שהתגבשה בתקופה רחוקה

פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X + SY_2 \rightarrow X$, ונחזור ונפעיל אותה על-ידי ENTER עד ש-X יפסיק להשתנות, כלומר יתייצב על 1 5707964 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X - S \rightarrow X$ S/10 $\rightarrow S$, נבצע אותה על-ידי ENTER ונקבל שהצעד החדש הוא 0 00000001 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X + SY_2 \rightarrow X$, ונחזור ונפעיל אותה על-ידי ENTER עד ש-X יפסיק להשתנות, כלומר יתייצב על 1 5707963 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X - S \rightarrow X$ S/10 $\rightarrow S$, נבצע אותה על-ידי ENTER ונקבל שהצעד החדש הוא 0 000000001 אחרי שתי פקודות ENTRY נחזור לפקודה $X + SY_2 \rightarrow X$, ונחזור ונפעיל אותה על-ידי ENTER עד ש-X יפסיק להשתנות, כלומר יתייצב על 1 570796289 כיוון שאנו יודעים שנקודת המקסימום המבוקשת נמצאת ב- $X = \pi/2 \approx 1.570796327$, חשוב להבין מה השתבש' מתברר, שכאשר ההפרש בין ערכי X נעשה קטן מ 0 00000001 ההבדלים בין ערכי הפונקציה מתקרבים לשגיאה של המחשבון איך מתגברים על מכשלה זו? פשוט! מפרידים בין גודל הצעד S לבין גודל הקטע שלגביו מבצעים את הבדיקה אם קצחו הימני גבוה מקצהו השמאלי חצי הקטע יסומן על-ידי E, שיקבל את הערך הקבוע 0 0001

נחזור על התהליך מן ההתחלה

נכתוב $1 \rightarrow X$ 0 1 $\rightarrow S$ 0 0001 $\rightarrow E$ כלומר אנו מתחילים ב-1 וגודל כל צעד (STEP) הוא 0 1, ונקיש ENTER נעדכן את תנאי עצירה לאיטרציה $Y_2 = Y_1(X + E) > Y_1(X - E)$ ואז נכתוב את פקודת האיטרציה $X + SY_2 \rightarrow X$ ונחזור ונפעיל אותה על-ידי ENTER עד ש-X יפסיק להשתנות, כלומר יתייצב על 1 6 כעת נכתוב פקודה המחזירה אותנו צעד שמאלה ואז מקטינה את הצעד פי 10 $X - S \rightarrow X$ S/10 $\rightarrow S$, נבצע אותה על-ידי ENTER ונקבל שהצעד החדש הוא 0 01 וכי