

הנושא: 'אוטומטיזם במציאת פתרון' אצל תלמידי חטיבת הביניים

הוכן ע"י: בת-שבע אילני ונורית שמואלי.

תקציר: המאמר מציג מחקר שהתמקד באופן בו תלמידי חטיבת ביניים ומוריהם מבצעים משימות אלגבריות הקשורות לפתרון משוואות ולפישוט תבניות מספר. מטרת המחקר היתה לאפיין את תהליך העבודה – עד כמה הוא אלגוריתמי רוטיני ועד כמה יש בו גמישות בראיה המבנית. תוצאות המחקר מצביעות על כך שככל שמתקדם תהליך לימוד האלגברה כך מתפתחת גם היכולת של הראיה המבנית.

מילות מפתח: אלגברה, משוואה, פתרון משוואות, משתנה, נעלם, תבנית מספר, חישוב ישיר, הצבה, חילוף, פעולות חשבון, אלגוריתם, אסטרטגיה, ראיה מבנית, חשיבה מתמטית, מושג, סימן, שאלון פתוח, מחקר, חטיבת ביניים, תלמידים, מורים.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 25, חורף תש"ס, 2000, עמודים 55-50.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

אוטומטיזם במציאת פתרון אצל תלמידי חטיבת הביניים

בת-שבע אילני ונורית שמואלי

מכללת בית ברל

דרך ב חישוב ישיר (תוך שימוש בעובדה ש- $(2a+1)=2$)

$$\begin{aligned} 5(2a+1) &= 10 \\ 2a+1 &= 2 \\ \frac{2a+1}{2} &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

תוצאות המחקר הראו ש-6 תלמידים (75%) ענו בדרך א, תלמיד אחד בדרך ב, ותלמיד אחד ענה תשובה לא נכונה. גינסן ווגנר טענו שפתרון בדרך א מראה על קיבעון בתהליך האלגוריתמי רוטיני בפתירת בעיות מסוג זה.

אילני-גונוזינסקי (1991), חזרה על הניסוי בישראל ובדקה 96 תלמידים 55 בסוף כיתה ז ו-41 בסוף כיתה ח. התוצאות שהתקבלו במחקר היו דומות למה שהתקבל בארצות הברית אבל נוסף על הדרכים שהופיעו אצל גינסן ווגנר, הופיעה דרך פתרון נוספת.

דרך ג חילוץ התבנית $2a$

$$\begin{aligned} 5(2a+1) &= 10 \\ 2a+1 &= 2 \\ 2a &= 1 \\ \frac{2a+1}{2} &= \frac{1+1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Kuchemann (1981) נתן שאלה הבנויה על אותו עיקרון

$$\text{אם } e+f=8 \text{ אז } e+f+g=?$$

מטרתו של Kuchemann הייתה לבדוק כיצד תלמידים תופסים את משמעות האותיות במתמטיקה כלומר, אם בשאלה זו התלמידים מסתכלים על הנתון $e+f=8$ בצורה גלובלית תבניתית ומציבים בתבנית $e+f+g=$ כלומר $e+f+g=8+g$, או שהם רואים את האותיות באופן

תקציר

מחקר זה התמקד באופן אשר בו תלמידי חטיבת ביניים ומורים לחטיבת ביניים מוצאים פתרון כאשר נתונה משוואה ובה יש מידע הכרחי לפתרון מטרת המחקר הייתה לבדוק אם הנבדקים מוצאים את הפתרון בתהליך אלגוריתמי רוטיני או שהם משתמשים בדרכים מגוונות מתוצאות המחקר התקבל שהתלמידים משתמשים באסטרטגיות מגוונות והאסטרטגיה השכיחה ביותר היא חילוץ המשתנה והצבתו לעומתם המורים משתמשים בשתי אסטרטגיות עיקריות חילוץ המשתנה והצבתו וחשוב ישיר כמו כן, עם העלייה בגיל פוחת השימוש באסטרטגיית חילוץ המשתנה והצבתו.

רקע תיאורטי

חוקרים שונים, שעסקו בדרכי פתרון אצל תלמידים, מצאו כי התלמידים פותרים משוואות בדרך טכנית במחקר שנעשה בארצות הברית בקרב תלמידים בתחילת לימוד האלגברה, התברר שתלמידים נוטים לפתור בעיות אלגבריות בתהליך אלגוריתמי רוטיני (Jensen & Wagner 1981).

בריאיון קליני של 8 תלמידים ניתנה הבעיה

$$\frac{2a+1}{2} = \text{אם נתון } 5(2a+1)=10$$

צורות הפתרון שהופיעו אצל התלמידים
דרך א מציאת ערכו של הנעלם תחילה

$$\begin{aligned} 5(2a+1) &= 10 \\ 10a+5 &= 10 \\ 10a &= 5 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

שונה הוא מצא שתלמידים מתעלמים מ- e ו- f , פותרים את $e + f + g =$ כאשר הם מתייחסים אל g כאל משהו לא ידוע ובכל פעם הם נותנים ל- g משמעות אחרת. גינסון ווגנר הסבירו את התנהגות התלמידים בפיתור בעיות כאלה משלוש נקודות מבט תיאורטיות

א. עיבוד מידע

גינסון ווגנר הסבירו את התופעה שילדים תופסים רק אות בודדת כנעלם (קיבעון האות האחת), ואינם יכולים לראות כנעלם – תבנית המורכבת ממספר איברים בזה שתלמידים פותרים תרגילים רק לפי פרוצדורות סטנדרטיות שלמדו ואינם מסוגלים לסטות מהמוכר להם לדוגמה, כאשר תלמיד מתבקש

למצוא את ערך $\frac{2a+1}{2}$ הוא יודע ממה שלמד כי יש להציב את a בתבנית $\frac{2a+1}{2}$ (דרך א), כדי לקבל את ערך התבנית מכאן מתחיל תהליך רוטיני, שמביא אותו באופן הדרגתי לפתרון. שיטה זו נקראת על-ידי דיוויס ואחרים 'רצף ויוואלי סדרתי' (Davis, Jockush, McKnight 1978) מופיע אצל (Jensen & Wagner 1981)

ב. למידה משמעותית

אפשר להסביר את קיבעון האות האחת בכך שהתלמיד אינו מבחין שלתבנית $2a + 1$ אפשר להתייחס כמו שמתייחסים אל x או אל y , כלומר כנעלם בפני עצמו ההתנסות אליה נחשף התלמיד מגבילה אותו לשימוש במשתנה יחיד ואיננה מרחיבה את עולם מושגיו – לראות את 'אפשרויות העבודה' עם תבניות מספר מורכבות יותר.

ג. התפתחות קוגניטיבית

מזווית ההתפתחות הקוגניטיבית של הילד, אפשר לזהות שתי סיבות אפשריות לכשל בתפישת המושג המשתנה האחת נעוצה בהבנת סימן השוויון ילדים נוטים לתפוס את סימן השוויון בהוראה לביצוע הפעולה הרשומה מצד שמאל של הסימן, ולרשום את התוצאות מצד ימין של סימן השוויון הם עדיין אינם מסוגלים להבין כי שני אנפי המשוואה שקולים (אצל Kieran 1981) לכן, מסבירים

גינסון ווגנר, כאשר תלמיד מקבל משוואה $5(2a + 1) = 10$, סימן השוויון 'אומר' לו שעליו לבצע משהו עם אגף שמאל לכן, התלמיד אוטומטית ניגש לפתרון בלי לשים לב לדמיון במבנה של הביטוי $2a + 1$ שבמשוואה והביטוי $\frac{2a+1}{2}$, שיש לחשב

בעקבות המחקרים שהוזכרו, רצינו לבדוק אם אותן אסטרטגיות קיימות בגילים שונים ובבעיות שונות מאותו סוג המחקר הנוכחי התמקד באופן שבו תלמידי חטיבת ביניים (ז, ח, ו-ט) ומורים לחטיבת ביניים מוצאים פתרון כאשר נתונה משוואה שבה יש בה מידע הכרחי לפתרון

השיטה

המחקר התמקד בכיתות ז (30 תלמידים), ח (30 תלמידים), ו-ט (32 תלמידים) ובמורי חטיבת הביניים – כיתות ז, ח, ו-ט (12 מורים) הנבדקים התבקשו לענות על שאלון פתוח שחובר לצורך מחקר זה

1	אם	$3 + a = 8$	או	$3 + a + 5 =$
2	אם	$3d = 6$	או	$18d + 9 =$
3	אם	$e + f = 8$	או	$e + f + g =$
4	אם	$(2a + 1) = 10$	או	$\frac{2a+1}{2} =$
5	אם	$x + y = z$	או	$x + y + z =$

בכל אחת מהשאלות של השאלון התבקשו הנבדקים לרשום כל שלב בפתרון ולנמק

שאלה 3 נלקחה מ-Kuchemann 1981, שאלה 4 נלקחה מ-Jensen & Wagner 1981, ושאלות 1, 2 ו-5 חוברו לצורך המחקר

התשובה לשאלות 1, 2, 4 הן תשובות מספריות לעומת זאת בשאלות 3, 5 התשובות הן תבנית מספר, מה שמאלץ להשתמש בחישוב ישיר

תוצאות המחקר

בבדיקת עבודות הנבדקים, נמצאו תשובות שונות ומגוונות, את תשובות הנבדקים חילקו לאסטרטגיות הבאות

חישוב ישיר – ראייה מבנית גלובלית

אסטרטגיה זו נקראה כך מכיוון שהנבדקים הסתכלו באופן גלובלי על הנתון ועל התבנית לדוגמה, בשאלה 1 לקחו את הנתון $3+a=8$ כמו שהוא והציבו אותו ישירות בתבנית $3+a+5=$ וקיבלו

$$\begin{aligned} 3+a+5 &= \\ \underline{\underline{8+5}} &= 13 \end{aligned}$$

הצבה 'בכיוון הפוך' – ראייה מבנית גלובלית

לדוגמה בשאלה 5

$$\text{אם } x+y=z \quad \text{אז } x+y+z=$$

הפתרון הוא

$$\begin{aligned} x+y+z &= \\ x+y+\underline{x+y} &= \\ 2x+2y & \end{aligned}$$

דרך ביניים – ראייה מבנית חלקית (הצבת חלק מהתבנית)

לדוגמה בשאלה 4

$$\text{אם } 5(2a+1)=10 \quad \text{אז } \frac{2a+1}{2}$$

הפתרון בדרך הביניים

$$\text{אם } 5(2a+1)=10 \quad \text{אז } 2a=1 \quad \text{ולכן מציבים ומקבלים}$$

$$\begin{aligned} \frac{2a+1}{2} &= \\ \frac{1+1}{2} &= 1 \end{aligned}$$

חילוף המשתנה והצבתו – ראייה אלגוריתמית רוטינית

לדוגמה בשאלה 1

$$\text{אם } 3+a=8 \quad \text{אז } 3+a+5=$$

הפתרון $a=5$ מציבים $13=3+5+5$ לכן הפתרון 13 כלומר, התלמידים חילצו את a מתוך הנתון והציבו בתבנית

חילוף המשתנה בלבד – ללא הצבה – ראייה אלגוריתמית חלקית

לדוגמה בשאלה 1

חילצו את a מהנתון $3+a=8$ וקיבלו $a=5$ ללא המשך התהליך

הצבת מספרים כלשהם

לדוגמה בשאלה 3

$$\begin{aligned} \text{אם } e+f=8 \quad \text{אז } e+f+g= \\ \text{הנבדקים הציבו מספרים כלשהם לדוגמה, הציבו את } e=3 \quad f=5 \quad g=2 \quad \text{וקיבלו } 3+5+2=10 \end{aligned}$$

לשתי התבניות אותו פתרון

לדוגמה בשאלה 1

אם נתון $a+3=8$ אז גם התבנית השנייה תקבל את הערך 8 כלומר $3+a+5=8$ ולכן אותה אות a קיבלה בכל אחת מהמשוואות ערך אחר

$$\begin{aligned} a=5 \quad a+3=8 \\ a=0 \quad 3+a+5=8 \end{aligned}$$

כדי להשוות בין האסטרטגיות שהתלמידים השתמשו בהן לבין האסטרטגיות שהמורים השתמשו בהן, ערכנו (ריטבלה 1) לצורך ההשוואה, חישוב גם את תשובות המורים באחוזים למרות מספרם הקטן (12)

טבלה 1 דרכי הפתרון, תלמידים לעומת מורים

מורים	סך כל התלמידים	מספר נבדקים
15%	45 5%	חילוף המשתנה והצבתו
85%	29%	חישוב ישיר – ראייה מבנית
0%	1%	דרך ביניים – הצבת חלק מהתבנית
0%	14%	הצבת מספרים כלשהם
0%	1%	חילוף המשתנה בלבד – אין הצבה
0%	0 5%	הצבה בכיוון 'הפוך'
0%	0 5%	לשתי תבניות אותו פתרון
0%	8%	לא ענו

בטבלה 1 אפשר לראות כי המורים השתמשו בשתי אסטרטגיות בלבד חילוף המשתנה והצבתו וחישוב ישיר לעומת זאת, התלמידים השתמשו גם באסטרטגיות אחרות

האסטרטגיה השכיחה ביותר אצל תלמידי כיתות ז, ח, ט היא חילוף המשתנה והצבתו (45 5%), לעומת זאת,

האסטרטגיה השכיחה אצל המורים היא חישוב ישיר (85%)

טבלה 2 התוצאות שהתקבלו בכיתות השונות

מספר נבדקים	כיתה ז'	כיתה ח	כיתה ט	מורים
	30	30	32	12
חילוף המשתנה והצבתו	43%	45%	46%	15%
חישוב ישיר –				
ראייה מבנית	15%	31%	41%	85%
דרך בנייה –				
הצבת חלק מהתבנית	0%	1%	3%	0%
הצבת מספרים כלשהם	28%	12%	4%	0%
חילוף המשתנה בלבד				
– אין הצבה	2%	1%	1%	0%
הצבה בכיוון 'הפוך'	0%	2%	0%	0%
לשתי תבניות אותו				
פתרון	1%	2%	0%	0%
לא ענו	11%	6%	5%	0%

בטבלה 2 אפשר לראות שימוש בשלוש דרכים עיקריות חילוף המשתנה והצבתו, חישוב ישיר (דרכים שהופיעו אצל תלמידים ומורים) והצבת מספרים כלשהם (אצל תלמידים בלבד)

באסטרטגיה של חילוף המשתנה, לא ניכר הבדל בשימוש בין כיתות ז', ח, ט. לעומת זאת באסטרטגיות חישוב ישיר אפשר לראות הבדל בין הכיתות השונות ככל שעולים בגיל השימוש באסטרטגיה זו גדל (בכיתה ז' 51%, בכיתה ח 31%, בכיתה ט 41% ומורים 85%) כמו כן, השימוש באסטרטגיה של הצבת מספרים כלשהם, אסטרטגיה לא נכונה, השימוש בה יורד ככל שעולה הגיל (בכיתה ז' 28%, בכיתה ח 12%, בכיתה ט 4% ומורים 0%)

דין ומסקנות

אסטרטגיית חילוף המשתנה והצבתו שכיחה אצל התלמידים והשימוש בה פוחת עם העלייה בגיל אפשר שזה קורה בגלל תפיסת השימוש באות כמספר מסוים בלבד תלמידים רבים סבורים כי משתנים הם אותיות

המייצגות מספרים בלבד (Usiskin 1988, אילני 1996) השימוש באסטרטגיית חילוף המשתנה והצבתו התקבל גם במחקרים של גינסון ווגנר שהסבירו זאת משלוש נקודות מבט

עיבוד מידע, למידה משמעותית והתפתחות קוגניטיבית (כפי שמפורט ברקע התיאורטי)

בהתייחס לעיבוד המידע, מצאנו במחקרנו כמו אצל ווגנר וגינסון כי

1 יש תלמידים הפותרים תרגילים לפי פרוצדורות סטנדרטיות שלמדו והם אינם מסוגלים לסטות מהמוכר להם לדוגמה בשאלה 2 אם נתון $3d=6$, התלמידים מוצאים תחילה את ערכו של d ומציבים בתבנית $18d+9$

2 יש תלמידים שאינם שולטים בדרך פתרון אחרת, מלבד בדרך של מציאת הנעלם והצבתו, ולכן פותרים את הבעיה בדרך פתרון המוכרת להם

3 כאשר התלמיד מתבקש למצוא את ערך $\frac{2a+1}{2}$ הוא יודע ממה שלמד, כי יש להציב את a בתבנית $\frac{2a+1}{2}$, כדי לקבל את ערך התבנית מכאן מתחיל תהליך רוטיני, שמביא אותו באופן הדרגתי לפתרון

בהתייחס ללמידה משמעותית, אפשר להסביר את קיבעון האות האחת בכך שהתלמיד אינו מבחין שלתבנית $3+a$ אפשר להתייחס כמו שמתייחסים אל x או y , כלומר נעלם בפני עצמו מכאן אפשר להסיק, כי מושג המשתנה אצל התלמיד עדיין אינו מושלם ואינו מופנם ממצא זה מעיד על מגבלת התלמיד בהבנת מושג המשתנה ההתנסות שהתלמיד נחשף אליה מגבילה אותו לשימוש במשתנה יחיד והיא אינה מרחיבה את עולם מושגיו – לראות את 'אפשרויות העבודה' עם תבניות מספר מורכבות יותר

מזווית ההתפתחות הקוגניטיבית, אפשר להסביר את השימוש באות כמספר מסוים, כנראה בגלל תפיסת המשתנה, בתחילת האלגברה, כמספר בלבד את העובדה שהאסטרטגיה של חישוב ישיר היא השכיחה ביותר בשימוש המורים (85%), אפשר להסביר בגלל תפיסת האלגברה כלימוד של מבנים כלומר לימוד האלגברה,

ברמה על-תיכונית, לפי אוסישקין (Usiskin 1988), מאופיין בדרך כלל בעיסוק במבנים בתפיסה זו אנו רואים את המשתנה כעצם שרירותי בתוך מבנה המתייחס למשתנים אחרים במבנה על-ידי תכונות מסוימות גישה זו מאפיינת את האלגברה המופשטת, וכך אנו רואים במחקר זה, שלמורים יש היכולת לפעול במשתנים מבלי שיזדקקו למסגרת של התייחסות מספרית כמו כן המורים נחשפו למגוון רחב יותר של שימושים במשתנה וכך הרחיבו והעמיקו את החבנה של מושג המשתנה במחקרנו אפשר לראות שעם העלייה בגיל הכרונולוגי, יותר נבדקים עוברים לחישוב ישיר עם העלייה בגיל, מושג המשתנה מתרחב, הלמידה נעשית משמעותית, ויותר נבדקים רואים ב- $2a + 1$ או ב- $a + 3$ נעלם בפני עצמו

השימוש באסטרטגיית הצבת מספרים כלשהם (28% מתלמידי כיתה ז', 12% מתלמידי כיתה ח, 4% מתלמידי כיתה ט), אפשר להסביר מכמה היבטים

1 משמעות המשתנה אצל הילד נתפסת כהיבט המספרי במקום אות אפשר להציב מספרים בלבד ולכן הם מציבים מספרים כלשהם במקום האותיות

2 'האופי הבלתי גמור' של תבניות מספר – במחקרים נמצא כי תלמידים נוטים 'לפשט' תבנית כמו $2a + 5$ ל- $7a$ או ל-7 אפשר לאפיין נטייה זו בצורך לתת תשובה מספרית יסופית (Tirosh, Even & Robinson 1994)

3 'התהליך הוא גם התוצאה' מעניין היה למצוא במחקרנו דרך ביניים – הצבת חלק מהתבנית, לדוגמה בשאלה 4

$$\text{אם } 5(2a + 1) = 10 \text{ אז } \frac{2a + 1}{2} \text{ הפתרון בדרך הביניים}$$

$$\text{אם } 5(2a + 1) = 10 \text{ אז } 2a = 1$$

$$\text{ולכן מציבים ומקבלים } \frac{1 + 1}{2} = 1$$

דרך זו נמצאה גם בפתרון שאלות 3, 5, לדוגמה שאלה 5

$$\text{אם } x + y = z \text{ אז } x + y + z =$$

הפתרון בדרך הביניים

$$\text{אם } x + y = z \text{ אז } x = z - y, \text{ מציבים במקום } x \text{ בתבנית}$$

$$z - y + y + z = 2z \text{ ומקבלים } x + y + z =$$

בשאלה 3

$$\text{אם } e + f = 8 \text{ אז } e + f + g =$$

הפתרון בדרך הביניים

אם $e + f = 8$ אז $e = 8 - f$, מציבים במקום e בתבנית $e + f + g =$ ומקבלים $8 - f + f + g = 8 + g$ אסטרטגיית דרך הביניים – הצבת חלק מהתבנית נמצאה גם אצל אילני-גיגוזינסקי (1991).

מפתיע לכן היה למצוא במחקרנו שלמרות שהמורים בעצמם פותרים בחישוב ישיר, תלמידים רבים אינם משתמשים בדרך זו ייתכן שאפשר לשפר זאת על-ידי חשיפת התלמידים לראייה מבנית-גלובלית כרצוי

לסיכום, דרך ארוכה עובר התלמיד בתהליך לימוד האלגברה בתחילת הדרך, האותיות נתפסות כמייצגות מספרים בלבד, ובהמשכה מגיעים לראייה מבנית גלובלית יותר

רשימת ספרות

אילני-גיגוזינסקי, ב' [1991] הרחבת תפיסת מושג 'המשתנה' אצל תלמידים הוראת האלגברה – אוסף מקורות ופעילויות לשעורי מתודיקה. מכון ויצמן, 74-69

אילני, ב' [1996] תפיסת המושגים משתנה ופרמטר אצל תלמידי חמש יחידות מתמטיקה ופרחי הוראה. חיבור לשם קבלת תואר 'דוקטור לפילוסופיה' אוניברסיטת תל-אביב

Booth, L R [1998] 'Children's Difficulties in Beginning Algebra', in A Coxford and A Shulte (eds), *The Ideas of Algebra K-12 Yearbook of NCTM* Reston, VA. NCTM, pp 20-32

Davis, R B [1975] 'Cognitive Processes Involved in Solving Simple Algebraic Equations', *The Journal of Children's Mathematical Behavior* 1(3) 7-35

Davis, R B, E K Jockusch, C Mcknight [1978] 'Cognitive Processes in Learning Algebra', *The Journal of Children's Mathematical Behavior* 2(1). 10-32

Tirosh, D., Even & N. Robinson [1994] 'How Teachers Deal with Their Students Conception of Algebraic Expressions as Incomplete', *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Mathematics of Education* 4 129–136 Lisbon, University of Lisbon

Usiskin, Z. [1988] 'Conception of School Algebra and Uses of Variables', In A. Coxford and A. Shulte (eds), *The Ideas of Algebra*, K-12 yearbook of NCTM Reston, VA. NCTM, pp 8–19

Jensen, R. J. & Wagner, S. (1981) 'Three Perspectives on the Process Uniformity of Beginning Algebra Students', in S. Wagner (ed.), *Proceedings of the 2nd Annual Meeting of the PME-NA*, pp 133–139

Kieran, C. [1981] 'Concepts Associated with the Equality Symbol', *Educational Studies in Mathematics* 12 317–326

Kuchemann, D. [1981] 'Algebra', in K. M. Hart (ed.), *Children's Understanding of Mathematics*, London, John Murray, pp 102–119

