

הנושא: כיצד תופסים תלמידי כיתות ט ו- י את המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק' ואת הפעולות המתבצעות עליהן

הוכן ע"י: ברכה מוזיקנט.

תקציר: במאמר מוצג מחקר שבדק את רמת ההבנה של המושגים: 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק' בקרב תלמידי כיתות ט'-י'. המחקר הראה שתלמידים שולטים בביצוע אלגוריתמים שלטכניקה אלגברית, אך מבצעים פעולות זהות על תבניות מספר ועל תבניות פסוק. לטענת החוקרת הכשלים נובעים מכשל בהבנה של ההבדל בין שני המושגים ומכשל בהבנה של האלגוריתמים. החוקרת ממליצה למורים לקשור בין האלגוריתם ומשמעותו לבין המושגים ומשמעותם ולחדד את ההבחנה בין שני המושגים.

מילות מפתח: אלגברה, תבנית מספר, תבנית פסוק, שם מספר, משוואה, שקילות, קבוצת הצבה, פשוט, פתרון, פעולות חשבון, מושג, הגדרה, היבט ויזואלי, הבנה, אלגוריתם, שאלון, ראיון, מחקר.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 25, חורף תש"ס, 2000, עמודים 56-61.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

כיצד תופסים תלמידי כיתות ט ו-י את המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק' ואת הפעולות המתבצעות עליהן

ברכה מוזיקנט

מכללת בית ברל

פסוק, פתרון תבניות פסוק בנעלם אחד ממעלה ראשונה וממעלה שנייה

פונקציות - מבוא, פונקציה קווית ופונקציה ריבועית

הקדמה

כלי המחקר העיקריים היו שאלון וריאיון ראיונות אישיים נערכו עם עשרה נבדקים בכיתות ט ו-י שלמדו מתמטיקה ברמה הגבוהה בניית הריאיון נעשתה לאחר העברת השאלונים וניתוחם, במטרה להבהיר ולחזק תשובות של הנבדקים בשאלונים השאלון הועבר בתנאי כיתה רגילים, הזמן שהועמד לרשות הנבדקים היה שיעור אחד

תוצאות

א. תפיסת המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק'

הנבדקים התבקשו בשאלון להגדיר את המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק' בנוסף התבקש כל אחד מהנבדקים להסביר לחבריו את המושגים וזאת מתוך מחשבה שחלק מהנבדקים מתקשים בכתיבת הגדרות כמו כן התבקשו הנבדקים לרשום שתי דוגמאות לכל אחד מהמושגים (ראה לוח 1)

מההגדרות וההסברים שנתנו הנבדקים למושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק', מתקבל שכ-20% מהנבדקים ציינו בהגדרה או בהסבר רק חלק מהאלמנטים של ההגדרה המלאה, המתייחסים בעיקר להיבטים ויזואליים לדוגמה 'תבנית פסוק יש <, >, =' או 'תבנית מספר' יש אגף אחד', 'תבנית מספר' יש נעלם' אחוז קטן ביותר של נבדקים התייחס למשמעות של מושגים אלה (הצבת מספר מקבוצת ההצבה 'תבנית מספר' נותנת שם מספר, ו'תבנית פסוק' נותנת פסוק) כ-15% מהנבדקים לא הבחינו בין המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק' ואף לא הבחינו בין אלו למושגים אחרים כמו 'שמות מספר'

המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק' שייכים לעולם רחב של מושגים מתמטיים שאפשר להתייחס אליהם בשני אופנים תוך כדי בחינת ההיבטים האלגוריתמים או התמקדות במשמעותם, ללא קשר לאלגוריתמים הקשורים אליהם במאמר זה ברצוני להראות את החשיבות הרבה בבניית קשרים בין שני היבטים אלה בתהליך ההוראה.

המחקר מתמקד בשלוש שאלות מרכזיות:

- א כיצד תופסים התלמידים את המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק'?
- ב האם התלמיד יודע לזהות פעולות מותרות על תבניות מספר ותבניות פסוק, ומהי ההצדקה המתמטית שהתלמיד נותן לפעולות שבוצעו על תבניות אלו?
- ג האם הפעולות המותרות על תבניות פסוק משמשות כמודל לתלמידים לפעולות על תבניות מספר?

שיטת המחקר

הנבדקים במחקר זה הם תלמידי כיתות ט (הקבצה א $n = 30$ והקבצה ב $n = 22$) וכיתות י (4-5 יח"ל, $n = 30$ ו-3 יח"ל, $n = 23$) מבתי ספר מבוססים במרכז הארץ כל הנבדקים למדו על-פי תכנית הלימודים של משרד החינוך, במסגרת זו למדו את הפרקים הבאים

תבניות מספר - הגדרה, הצבה, קב' הצבה, תרגום לתבניות מספר, פישוט תבניות מספר ופעולות בתבניות מספר
תבניות פסוק - הגדרה, הצבה, קב' הצבה, תרגום לתבניות

ויפסוקים' כ-15% מהנבדקים נתנו תשובות חסרות מידע וכמחציתם לא הגדירו או לא הסבירו את המושגים הנבדקים התבקשו לרשום שתי דוגמאות לכל אחד מן המושגים כ-40% מהנבדקים נתנו שתי דוגמאות נכונות לכל אחד מן המושגים כ-20% מהנבדקים נתנו דוגמאות המעידות על בלבול בין מושגים שונים, ובנוסף 40% כלל לא ענו על השאלה בראיונות עם הנבדקים התחזק הרושם שאין התלמידים מבינים את המשמעות של שני מושגים אלה כמו כן, קיים אצל המרואיינים בלבול בין המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק' לבין מושגים אחרים, כמו 'תרגיל', 'נוסחה' ו'קבוצת אמת'

לוח 1 תפישת המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק' על-ידי תלמידי כיתות ט רי (n = 105)

סוג תשובה	אחרון המשיבים שנתנו תשובה זו
הגדרה מלאה - המתייחסת לאלמנטים ויזואליים ולמשמעות המושגים	עבור תבנית מספר, עבור תבנית פסוק
הגדרה חלקית - המתייחסת לחלק מתאלמנטים של התגדרה המלאה ומתמקדת בעיקר באלמנטים ויזואליים	דוגמה 'תבנית פסוק' סימנים <, >, = קיים במשתנה נקבל פסוק
הסברים חסרי מידע או שימוש בכפל לשון	דוגמה 'תבנית מספר' סימנים <, >, = קיים במשתנה נקבל פסוק
הסברים שיש בהם בלבול בין המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק'	דוגמה 'תבנית מספר' סימנים <, >, = קיים במשתנה נקבל פסוק
לא ענו	44

בראיונות שנערכו עם 10 נבדקים התבקשו הנבדקים למיין תבניות נתונות (כגון $x > 5$, x^5 , $x - 5$, $x = 5$, $x - 5 = x$, x) לתבניות פסוק ולתבניות מספר הנבדקים מיינו את התבניות על-פי מספר קריטריונים והם

- 1 סימני סדר - הסימנים $<$, $>$, $=$ משמשים כסימנים מזהים לתבניות פסוק
- 2 פעולות חשבון - תבניות שבהן יש פעולות חשבון, כגון $x + x - 5$, הן תבניות פסוק תבניות שאין בהן פעולות חשבון הן תבניות מספר דוגמה $x = 5$ תבנית מספר, כיוון ש- x שווה למספר
- 3 סוג הפתרון - דוגמה 1 'כאשר יש תשובה יחידה כמו בתבנית $x = 5$, זוהי תבנית מספר בתבנית $x > 5$ אין תשובה יחידה לכן זהו משוואה אחר
- דוגמה 2 $x = x - 5$ אינה משוואה, זוהי תבנית לא הגיונית, הרי $x - 5$ לא יכול להיות שווה ל- x
- 4 היבט אינטואיטיבי - 'לפי תחושה', 'לפי העין', 'לפי מה שנראה לי'

אציג קטעים מתוך ראיונות כדי לעמוד על דרך חשיבתם של המרואיינים

ריאיון א:

מראיין האם את יכולה להסביר לי כיצד מיינת את התבניות הנתונות?
תלמידה לפי מה שנראה לי
מראיין למה הכוונה 'נראה'?
תלמידה 'תבנית מספר' יותר בכיוון של הצבה תבנית פסוק זה תרגילים לפי פעולות חשבון
מראיין האם את יכולה להסבירי?
תלמידה למשל, $x = 5$ זה הצבה, לכן זו 'תבנית מספר' $x - 5 = 5$ יש פעולות חשבון, לכן זו תבנית פסוק
מראיין האם חשבת מה יקרה אם תציבי מספר בתבניות הנתונות?
תלמידה לא, אני קובעת יותר לפי הפעולות

ריאיון ב:

מראיין האם את יכולה להסביר לי, כיצד מיינת את התבניות הנתונות?
תלמידה לפי העין
מראיין האם את יכולה לפרטי?
תלמידה $x = 5$ תבנית מספר, כי x שווה למספר x^5 יש לזה תשובה, יש לחשב, יש יותר מפעולה אחת לכן זו משוואה

מושגים אמורים להיות מזוהים באמצעות הגדרותיהם, כדי להתמודד עם בעיות יש להשתמש בהגדרות המתאימות (אור-בך 1994, הרשקוביץ 1989) אי-התייחסות להגדרות הקשורות למטלה מסוימת עלולה לגרור אי-הבנות וטעויות הגדרה המבוססת על צורת הייצוג בלבד, מבלי להבין את המשמעות השונה של המושג, מכונה 'התנהגות מושגית לכאורה' (וינר 1993) הבנה כזאת יכולה להבטיח אולי הצלחה בפתרון בעיות שגרתיות, אך אינה מבטיחה התמודדות עם מטלות שאינן שגרתיות (ראה גם המושגים 'הבנה אינסטרומנטלית' ו'הבנה רציונלית' אצל סקמפ 1991)

ב. פעולות על תבניות מספר ותבניות פסוק וההצדקה לביצוע בפעולות על תבניות מספר ותבניות פסוק, אנו עוברים מתבנית אחת לשנייה וחוזרים על התהליך של החלפת תבנית בתבנית עד שמתקבלת תבנית פסוק הפשוטה ביותר כגון $x=5$ חשוב שהתלמיד יכיר את הפעולות המותרות פעולות מותרות בתבניות פסוק הן אלה

מושגים אמורים להיות מזוהים באמצעות הגדרותיהם, כדי להתמודד עם בעיות יש להשתמש בהגדרות המתאימות (אור-בך 1994, הרשקוביץ 1989) אי-התייחסות להגדרות הקשורות למטלה מסוימת עלולה לגרור אי-הבנות וטעויות הגדרה המבוססת על צורת הייצוג בלבד, מבלי להבין את המשמעות השונה של המושג, מכונה 'התנהגות מושגית לכאורה' (וינר 1993) הבנה כזאת יכולה להבטיח אולי הצלחה בפתרון בעיות שגרתיות, אך אינה מבטיחה התמודדות עם מטלות שאינן שגרתיות (ראה גם המושגים 'הבנה אינסטרומנטלית' ו'הבנה רציונלית' אצל סקמפ 1991)

השמות למושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק' (ארליך

ב 1 - פעולות כפל במשוואות

לוח 2 התפלגות השיפטים והנימוקים (באחוזים) באוכלוסייה כולה ($n = 105$)

הנימוקים					השיפטים	
לא נימקו	חוסר מידע	חישוב	קשר למספרים ולמעולות	התייחסות לשקילות	שיפוט נכון	שיפוט שגוי
20	16	21	24	19	74	16
					לא ענו 10	
27	2	9	44	18	83	13
					שיפוט נכון	שיפוט שגוי
28	4	3	33	35	54	34
					שיפוט נכון	שיפוט שגוי
31	7	3	44	15	39	55
					שיפוט נכון	שיפוט שגוי
					לא ענו 6	

השומרות על קבוצות האמת שלהן. פעולות מותרות בתבניות מספר הן כאלה שאינן משנות את התוצאות המתקבלות עבור הצבות שונות השאלון מציג לנשאלים פעולות שתלמידים מבצעים על תבניות פסוק ותבניות מספר, והנבדקים מתבקשים להעריך את הפעולה (נכונה, לא נכונה) ולנמק את שיפוטם (במאמר זה נתייחס לממצאים שהתקבלו בביצוע פעולת כפל על תבניות מספר ופסוק) את הנימוקים שנתנו הנבדקים להצדקת שיפוטיהם על תבניות פסוק, אפשר לסווג לקטגוריות הבאות

- א. נימוקים הקשורים לפעולות השומרות על שקילות – דוגמה 'כפל את שני האגפים באותו מספר' או 'צריך לכפל את שני האגפים' נימוק זה הוביל את הנבדקים לשיפוט נכון
- ב. נימוקים הקשורים למספרים ולפעולות החשבון הנתונות במשוואות, דוגמאות:

1. במשוואה $3x = 9$ בוצעה פעולת: כפלי על שני האגפים במספר $1/3$ כי 15% מהנבדקים נימקו את שיפוטם בקשר של המספר הכופל את המשוואה, אל המספר שלוש. ההשואה במשוואה, 'לכפל ב- $1/3$ ' זה כמו לחלק בשלוש, ולכן הגיעו לשיפוט נכון: 10% מהנבדקים האו במספר $1/3$ מספר יורי למשוואה ולכן הפעולה שבוצעה עסי מספר זה אינה נכונה להעתם:
2. במשוואות עם שברים, הנבדקים נימקו 'ביטל מכנה', 'עשה מכנה משותף'.
- ג. נימוק חישובי, חלק מהנבדקים התעלמו מן הפעולה שבוצעה וקבעו את דעתם רק לאחה שפתרו את המשוואות הנתונות. אפשר לחסביר זאת בסיבות הבאות
 1. התלמידים אינם מבינים לעומק את העיון השקילות,
 2. תלמידים נוטים להשתמש בהכנים שהם מכירים היטב ומרגישים בטוחים בהן,
 3. ייתכן שעקרון השקילות ידוע לתלמידים אך הם מרגישים צורך לבדוק כל מקרה לגופו (פישבין, 1982).

ב 2 - פעולת כפל בתבניות מספר

לוח 3 התפלגות השיפוטים והנימוקים (באחוזים) באוכלוסייה כולה ($n = 105$)

הנימוקים						השיפוטים	דוגמאות לשאלות בפעולת כפל בתבניות מספר
לא נימקו	הפכו למשוואות	חוסר מיהע	קשר למספרים ולפעולות	הסברים הקשורים לפתרון משוואות	התייחסות לשקילות	שיפוט נכון: 40 שיפוט שגוי: 49 לא ענו: 11	$3x+9$ $\frac{1}{3}(3x+9)$ נכון, לא נכון, נמק
36	2	17	8	26	11		
26	8	9		46	11	שיפוט נכון: 29 שיפוט שגוי: 67 לא ענו: 4	$\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = 3x + 2$ נכון, לא נכון, נמק
31	4	16	5	36	8	שיפוט נכון: 27 שיפוט שגוי: 64 לא ענו: 9	$\frac{5x}{3} + 1 = 5x + 3$ נכון, לא נכון, נמק

השימוש בדרך חישובית הוביל חלק מהנבדקים לשיפוט מוטעה במקרים שבהם ביצעו התלמידים פעולות רק על אגף אחד (נכון במיוחד למשוואות עם מקדמים שבורים), כשהם טעו בחישוב או כשלא הייתה אפשרות להגיע לפתרון מהצורה $x =$ מספר

ד נימוק חסרי מידע, דוגמאות 'דרך נכונה', 'כך פותרים' נימוקים חסרי מידע ניתנו לעתים גם כשהשיפוט היה נכון ממצאים נוספים שהתקבלו בפעולות כפל על משוואות עם שברים

א מספר המחוברים עם השברים הנמצאים באחד האגפים של המשוואה אינו משפיע על שיפוט הנבדקים או על נימוקיהם (בשאלון ניתנו דוגמאות נוספות של משוואות עם שברים, בהן מספר שונה של איברים עם שברים המופיעים באחד האגפים של המשוואה) ההסבר לכך הוא בהתמקדות של הנבדקים באלגוריתם של ביטול המכנה

ב ככל שהביטוי המופיע באחד האגפים של המשוואה מופשט יותר, כך נטו יותר הנבדקים לבצע פעולות על אגף אחד בלבד (ראה לוח 2) הנבדקים בראיונות הסבירו את השיפוט השגוי ('נכון') במשוואה שבה נמצא הביטוי $p(x)$ יזה לא נראה כמו משוואה או 'זוהי פונקציה', לכן לא מבצעים עליה פעולות

מהמחקר התקבל שרוב הנבדקים סוברים שאפשר לבצע פעולות כפל על תבניות מספר. את הנימוקים העיקריים שנתנו הנבדקים להצדקת שיפוטיהם אפשר לסווג לקטגוריות אלה (ראה לוח 3)

א נימוקים הקשורים לתבניות מספר תואמות (שקולות), נבדקים רבים השתמשו במשפט 'התבנית השתנתה', נימוק זה הוביל אותם לשיפוט נכון בראיונות ניתנו נימוקים אינטואיטיביים או שרירותיים לכך שהתבניות אינן תואמות לדוגמה 'זה לא נראה לי הגיוני', 'כך למדנו', 'יש חוק שאסור, אני לא יודעת מדוע', 'רק במשוואות אפשר להיפטר מהמכנה' כלומר, גם המרואיינים שהגיעו אל שיפוט נכון לא ידעו להסביר למה הכוונה במילים 'התבנית השתנתה'

ב נימוקים הקשורים לאלגוריתם לפתרון משוואות לדוגמה 'ביטל מכנה', 'כפול את הכול במספר הנדרש', 'עשה כפל באלכסון' נימוקים אלה הובילו לשיפוט שגוי נציג דוגמאות להסברים שנתנו הנבדקים בראיונות

(נבדקים שפישטו בעצמם את התבניות ולאחר הפישוט קיבלו תבניות מספר ללא שברים) לשאלה של המראיין 'על סמך מה הסתמכת כאשר עברת מהתבנית הנתונה לתבנית שרשמת לאחר הפישוט'

התשובה 'לפי מה שלימדו אותי, המטרה לבטל את השבר, אני עובדת לפי חוקים' התלמידה הוסיפה והסבירה 'החוקים הם של ביטול המכנה' 'לפי נוסחה, לפי הדוגמאות בכיתה, בכל תרגיל שיש שברים עושים כפל במכנה המשותף' 'הסתמכתי על המכנה המשותף, רציתי לבטל את המכנה' התלמיד הוסיף 'כך לימדו אותי כל השנים, כדי שיהיה יותר קל, יותר יפה ויותר מרוכז' 'ביטלתי את המכנה, כי השתמשתי בו ואני לא צריך אותו יותר'

ג נימוקים הקשורים למספר שאתו בוצעה הפעולה, לדוגמה 'אי אפשר לכפול במספר שאינו קשור בתבנית'

ד נימוקים חסרי מידע, דוגמאות 'כך פותרים', 'דרך נכונה'

ה הפיכת תבנית המספר למשוואה, דוגמאות נבדקים רשמו $3x + 2x = 0$, $5x + 3 = 0$ ופתרו את המשוואות

ג. השוואה בין הפעולות המבוצעות על תבניות פסוק ותבניות מספר
נבחון בדוגמה הבאה

תבנית הפסוק תבנית המספר

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 10$$

$$= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 60$$

נכון, לא נכון נמק נכון, לא נכון נמק

בדוגמה זו כ-60% מהנבדקים נתנו שיפוט זהה 'נכון, נכון' לפעולות שבוצעו על שתי התבניות 46% מהנבדקים נתנו נימוקים זהים לשיפוטם, שהבולט ביניהם הוא 'ביטל את המכנה' נדון בשני הסברים אפשריים לתופעה זאת

1 תלמידים העומדים לבצע פעולות על תבניות מספר או תבניות פסוק

א חייבים לזהות את התבנית (מספר או פסוק) שעליה הם אמורים לבצע את הפעולות

ב לזהות את מאגר החוקים והפעולות חמותאומות לתבנית זו

ג לבחור פעולות ספציפיות שיש לבצע על התבנית סביר להניח שתלמידים המבצעים בצורה נכונה את שלושת השלבים יגיעו אל התשובה הנכונה, לעומת זאת תלמידים שאינם מבחינים בין 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק', ופועלים לפי 'רמזים' חיצוניים כגון המספרים המופיעים בתבנית, עלולים לבצע פעולות זהות על תבניות מספר ותבניות פסוק

2 מהמחקר התקבל שהנבדקים מבצעים פעולות המותרות על תבניות פסוק גם על תבניות מספר ההסברים המלווים את שיפוט הנבדקים קשורים לאלגוריתמים אופייניים לתבניות פסוק. האלמנטים הזהים בתבנית מספר ו'תבנית פסוק' מובילים אל מודל סמוי של 'פתרון' המשותף לשני הסוגים האלה של תבניות

סיכום

לתבניות מספר ותבניות פסוק, כמו לרוב המושגים המתמטיים, שני היבטים המשלימים זה את זה היבט פורמלי מושגי, המיוצג באמצעות אקסיומות, הגדרות, משפטים והוכחות, והיבט אלגוריתמי, הכולל ידע חישובי והבנת התהליכים המתבצעים בעת החישוב שני היבטים אלה משולבים בכל פעילות מתמטית Skemp (1976) טוען שלימוד 'הכללים' ללא הסיבות מאפשר לתלמיד לתפקד בתוך מסגרת מוגדרת מאוד, אך בלי הבנה מושגית טובה לא יוכל התלמיד להתמודד עם מטלות חדשות ההבנה מאפשרת לתלמיד לטפל בכל אוסף הנתונים באופן חופשי ועל-פי מטרות משתנות

במחקר התקבל שאחוז קטן של הנבדקים מפעיל שיקולים הקשורים לפעולות השומרות על שקילות חלק ניכר מהנבדקים מתייחסים בנימוקיהם למספרים הספציפיים ששימשו אותם לביצוע הפעולה בתבנית התמקדות ברמזים מספריים גורמת להם להפעיל על תבניות מספר פעולות המותרות רק לגבי תבניות פסוק

המלצות להוראה

במקרים רבים מתמקדים המורים למתמטיקה בפיתוח שליטה בפרוצדורות ואינם מנסים לקשור בין הפרוצדורה למושגים הוראה מקוטעת זו עלולה לגרום לביצוע שגוי של פעולות על תבניות פסוק ותבניות מספר

א. יש צורך להדגיש את ההבדלים בין המושגים 'תבנית מספר' ו'תבנית פסוק' בעיקר מבחינת המשמעות, כדי לסייע לתלמיד להבין את הפעולות המותרות על תבניות מספר ותבניות פסוק

ב יש חשיבות רבה ליצירת קשרים בין הידע המושגי לבין התהליכים האלגוריתמיים לכן יש להתמקד בתהליך הלימוד על פעולות מותרות ושאין מותרות על תבניות מספר ותבניות פסוק, תוך מתן דגש להסברים מושגיים

ג המורים צריכים להיות מודעים לכך שהתלמידים משתמשים באותו מודל אלגוריתמי, במקרה של תבניות פסוק ושל תבניות מספר עם שברים בהתאם, יש צורך לבנות פעילויות היכולות לסייע לתלמיד בהבחנה בין שני המקרים האלה

רשימת מקורות

- אור-בך, א' [1994] תפישת המושגים 'הגדרה' ו'אי-הגדרה' בקרב מורים ופרחי הוראה עבודת גמר לקבלת התואר 'מוסמך למדעי הרוח' אוניברסיטת תל אביב
- ארליך, ע' [1963] מתמטיקה לכיתה ט יוצא ביוזמתה ובפיקוחה של הועדה לניסויים בהוראת המתמטיקה. תל אביב, דביר כצמן
- הרשקוביץ, ר' [1989] דימוי מושגים הנדסיים בסיסיים אצל תלמידים ומורים חיבור לשם קבלת התואר 'דוקטור לפילוסופיה' הוגש לסנט של האוניברסיטה העברית בירושלים
- וינר, ש' [1993] הוראת מתמטיקה - מחשבות ותופעות. מיומנו של מורה חוקר, עליה 12 23-27
- סקמפ, ר' [1991] הבנה רלציונית והבנה אינסטרומנטלית, עליה 8, 9
- Fischbein, E [1982] 'Intuition and Proof', *For the Learning of Mathematics* 3: 9-24.
- Fischbein, E [1996] *The Concept of Schema and its Relevance for Learning Mathematics* Tel Aviv University, School of Education
- Skemp, R [1976] 'Relational Understanding and Instrumental Understanding' *Mathematics Teaching*, 77 20-26