

הנושא: אינטואיציה כמטפורה

הוכן ע"י: אנה ספרד.

תקציר: המאמר מציג את תרומתו הייחודית של פרופ' אפרים פישביין למחקר בתחום החינוך המתמטי, אשר בהיותו חלוץ בתחום זרע את הזרעים והניח את היסודות למחקרי המשך. המאמר סוקר את תחום המחקר המרכזי של פרופ' פישביין – חקר החשיבה וההסקה האינטואיטיבית ואף מוסיף עליו נדבך: 'השלכה מטפורית'. הכותבת מראה כיצד משפיעה השפה על עיצוב תפיסת מושג.

מילות מפתח: אינטואיציה, אינטואיציה ראשונית, אינטואיציה משנית, חינוך מתמטי, חשיבה מפורשת רציונלית, חשיבה אינטואיטיבית, הבנה, ידיעה אינטואיטיבית, ידיעה לוגית, הסבר, הגדרה, תיאוריה, מודל סמוי, סכמה, שפה, מטפורה, למידה, ויגוצקי, פיאות, פרופ' אפרים פישביין, תפיסות מוטעות, קבוצה, גבול, אינסוף, פונקציה, התאמה, העתקה.

החומר פורסם במסגרת: עלי"ה 26, קיץ תש"ס, 2000, עמודים 42-49.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

אינטואיציה כמטפורה

מאת אנה ספרד

אוניברסיטת חיפה

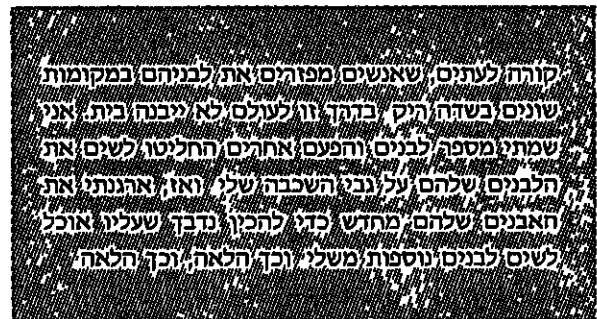
1. על בעיית האינטואיציה

מישהו אמר פעם שלגלות דבר חדש הוא זכות גדולה, אך להציג דבר מוכר באור בלתי שגרתי ומפתיע זוהי משימה ששום משימה אחרת אינה משתווה לה בקושיה וחשיבותה היכולת הנדירה הזו של הפיכת הרגיל והשקוף לנראה לעין ומסקרן היתה תכונתו חבולטת של אפרים פישביין, שאכן כל חייו התעניין ברעיונות פשוטים, מובנים לכאורה, יומיומיים. מדובר ברעיונות שכל אחד מאתנו משתמש בהם באופן ספונטני, בלי לחשוש שיש טעם לעצור לידם ולו לרגע פישביין עצר גם עצר, ואף שאל שאלות שאיש לפניו לא חשב לשאול המושג האינטואיטיבי היום-יומי 'אינטואיציה' היה אחד מהמוקדים העיקרים של התעניינותו

לפי פישביין עצמו, הסיבה להתמקדותו בנושא זה הייתה התחושה כי במסגרת תורתו של פיאז'ה (Jean Piaget, 1896-1980), שאותה הוא חייב ושעל יסודה הוא יצר, לא הותירה מקום ראוי לפעילות אנושית שמעבר לזו המונחית על-ידי חשיבה מפורשת רציונלית והרי חשיבה אינטואיטיבית היא תופעה יום-יומית ובולטת לא פחות, אולי אף יותר, מהחשיבה הרציונלית המפורשת

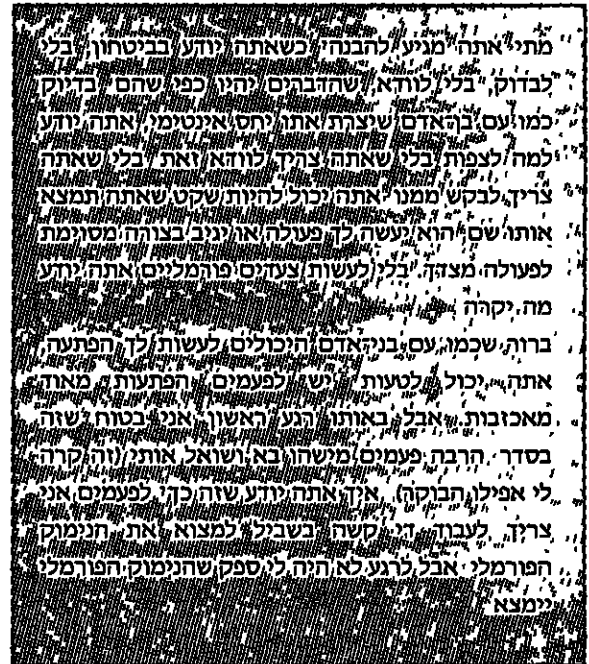
אין זה פלא שתופעת האינטואיציה לא זכתה לחקר מעמיק למרות נפוצותה אף-על-פי שכולנו יודעים לזהות אותה באופן

עבודתם של אלה היוצרים תחומי דעת חדשים ופותחים ערוצי חשיבה שלא היו ידועים עד כה הושוותה על-ידי ריצארד סקמפ (Richard Skemp), מראשוני החוקרים בחינוך מתמטי, לבנייה בשדה ריק ואכן, כך דיבר סקמפ על עבודתו החלוצית



דברים אלה אפשר לייחס גם למפעל חייו של אפרים פישביין אני רואה את עצמי ואת עמיתיי כבונים על היסודות שהונחו על-ידינו בשדה ריק גם אם היסודות, כדרכם, נעלמים לפעמים מן העין, הם תמיד שם גם אם השכבה החדשה נראית שונה מזו שחזה האדריכל המקורי, היא לא הייתה קיימת ללא השכבה הראשונה רשימה זו באה להזכיר זאת ולהראות, כיצד הדברים שאנו עושים היום צומחים מעבודתו החלוצית של אפרים פישביין

אינטואיטיבי (י), הרי היא חומקת מכל ניסיון להגדרה שיטתית ומדויקת והיא אף אינה קלה להסבר נסתכל, לדוגמה, בעדותו של מתמטיקאי



אין ספק שמדובר כאן במקרה מובהק של אינטואיציה המתמטיקאי מעיד על כך שלעתים קרובות הוא יודע לצפות 'התנהגויות' של עצמים מתמטיים מופשטים בלי לדעת להסביר מניין ידיעה זאת באה לדעת המתמטיקאי שצוטט לעיל, הידיעה האינטואיטיבית היא הביטוי האולטימטיבי להבנה השאלה היא, כמובן, כיצד הדבר אפשרי – כיצד אפשר לדעת דבר מבלי יכולת להסביר את מקורותיו הרי לא ייתכן שידעה זו באה מתוך ניסיון חיים או ממפגשו היומיומי של המתמטיקאי עם העצמים שאותם הוא חוקר. אדרבא, ידוע, שהאינטואיציה פועלת לא רק כשהמחקר מונחה תיאוריות מגובשות וידועות היטב, אלא גם כשהוא מתמקד במושגים בלתי מוכרים עד כה, פרי המצאות של המתמטיקאי החוקר כיצד מקבלים עצמים מופשטים שכאלה חיים משלהם? כיצד ייתכן, שהם יכתיבו לממציאם את תכונותיהם? בשלב זה אין לנו קצה חוט לפיצוח החידות

אחת הדרכים להתחיל את החיפוש אחר הפתרון היא להעמיד את הידיעה האינטואיטיבית מול סוג ידיעה שונה בתכלית – היא הידיעה הלוגית לדעתו של אפרים פישבין הידיעה

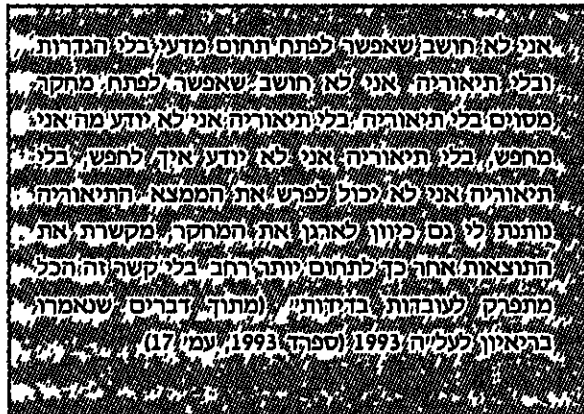
האינטואיטיבית והידיעה הלוגית משלימות זו את זו, אך לא בהכרח מתלוות זו לזו התופעה המפתיעה והמסקרנת היא שהידיעה האינטואיטיבית יכולה לבוא ראשונה זאת ראינו מתוך דברי המתמטיקאי המצוטטים לעיל זאת אנו למדים גם מאמירתו המפורסמת של אחד מגדולי המתמטיקאים, קרל פרידריך גאוס (Carl Friedrich Gauss. 1777-1855) "את תוצאותי קיבלתי מזמן, אך איני יודע עדיין איך להגיע אליהן"

פתחתי בדוגמאות של אינטואיציה מתקדמת של מתמטיקאים, כי אני רואה אותן כמאירות עיניים במיוחד עם זאת יש לזכור, כי תופעת האינטואיציה אינה מתחילה אצל מתמטיקאים היא קיימת בחיי יום-יום, והיא נמצאת גם בבית-ספר. הופעותיה בשיעורי המתמטיקה הן לעתים לכרכה, ולעתים הן בבחינת אורח בלתי רצוי מחקר על למידת המושג 'פונקציה' מביא את אחת הדוגמאות הידועות ביותר של אינטואיציות נפוצות, המתפתחות בניגוד לכוונות המורה. ואכן, התאמות והעתקות רבות העונות על כל הדרישות המופיעות בהגדרה מקובלת של פונקציה הנלמדת בבתי-ספר עלולות להיפסל על-ידי תלמידים מסוימים כחסרות תכונות אופייניות של פונקציה כך, לדוגמה, יטענו רבים כי ההתאמה

x	1	2	3	4
y	-1	16	1/2	1999

איננה פונקציה, שכן לא נראה שיש דפוס אלגוריתמי בהתנהגותה (איני יכולה שלא לציין, כי גם הטענה על העדר האלגוריתם אינה מדויקת, שכן לכל סדרה סופית של ערכים אפשר להתאים תבנית פולינומיאלית המייצרת ערכים אלה בזה אחר זה, ואולם, התכונה הקובעת לצורך הדיון הנוכחי היא שקיום תבנית כזאת אינו ברור מאליו כשמסתכלים על התאמה כמו זו המוצגת לעיל) הטענה, כי אין דרישה לדפוס חוזר בהגדרה אינה משחררת את התלמיד מהתחושה האינטואיטיבית כי התנהגות אלגוריתמית היא מסימני היכר של פונקציה 'אמתית' בצורה דומה, מתעקשים רבים, כי התאמה כמו $f(x) = 5$, המתאימה אותו מספר לכל ערך הארגומנט, אינה פונקציה, שכן 'אין תלות בין x-ה ובין y-'

שעונה על הקריטריונים הבסיסיים של מדעיות כלל ראשון של החוקר הוא להיות מדויק ומפורש באשר לתופעות הנחקרות וביחס למושגים שמשמשים לתיאור והסבר של תופעות אלה כפי שטען אפרים פישביין, הגדרות מדויקות נחוצות לצורך יצירת תיאוריה מדעית, ואילו תיאורית נחוצות כדי לענות על שאלות מסוגן של אלה שנשאלו לעיל בראיון לעליה הוא אמר.



לאור דברים אלה אין זה מפתיע שאנו זוכרים היום את אפרים פישביין בעיקר כמי שהציע תיאוריה מסודרת של אינטואיציה זוהי תיאוריה בנויה היטב ועשירה באפשרויות התחלטה בהגדרה פשוטה, ששמעתי מפיו של אפרים פישביין, במהלך הראיון הנייל לעליה (עמ' 20)



אינטואיציה היא, על כן, יכולת לדעת בלי לדעת כיצד. על יכולת זו דיבר המתמטיקאי שאותו ציטתי לעיל דוגמאות ליכולת זו ראינו גם אצל תלמידים שמייחסים לפונקציה תכונות שאינן מתחייבות מהגדרתה אולם ברור, כי הגדרה זו היא רק נקודת מוצא והיא אינה מקרבת אותנו אל פתרון הפרדוקס של האינטואיציה כיצד אפשרי לדעת דבר שלא נלמדי כיצד אפשר להיות בטוח בדבר שאין יודעים למקו ואף לא להראותו

הדוגמה הזאת מסקרנת לא פחות מהקודמת, למרות פשטותה היחסית. אין תמה, שלתלמידים יש תחושות אינטואיטיביות ברורות באשר למושג 'מספר' או ביחס לרעיונות פסיקליים כמו המהירות במקרים אלה יש לילדים ידיעה מוקדמת של המושגים והם באים לבית ספר מצוידים בהתנסויות יום-יומיות שעל-פיהן הם קובעים את דעותיהם על מושגים אלה לא כך, לכאורה, כשמדובר בפונקציה, יצור מלאכותי שאין לו מקבילה בחיי היום-יום התלמידים נחשפים לרעיון הפונקציה רק בבית-הספר ולכאורה אין להם סיבה ליחס למושג משמעותי שונות מאלה שניתנו לו על-ידי המורים באמצעות ההגדרה המקובלת התופעה של דעות מנוגדות להגדרה נראית תמוחה עוד יותר לאור העובדה, שמשמעות ייחודיות אלה אינן מבודדות ומקורות, אלא הן משותפות לתלמידים שמעולם לא פגשו זה את זה ומעולם לא דיברו אחד עם השני הן אף מזכירות את דעותיהם של מתמטיקאים רבים שהתנגדו במהלך ההיסטוריה להגדרה הרחבה של פונקציה, המקובלת היום

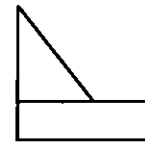
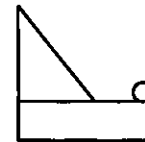
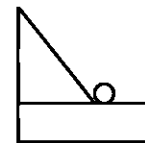
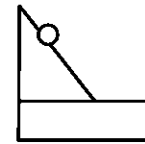
אין צורך בדוגמאות נוספות כדי להמחיש את סביכותה של תופעת האינטואיציה היא מעמידה אתגר קשה בפני החוקר עבודתו של אפרים פישביין נחשבת עד היום לאחד הניסיונות הרציניים ביותר של היענות לאתגר זה

2. תשובתו של אפרים פישביין

שתי משימות תלויות זו בזו עומדות בפני חוקרים הרוצים לפצח את האגוז הקשה של האינטואיציה עליהם להגדיר את התופעה ואף להסביר את מגננוניה נתחיל בסוגיית ההגדרה מתברר, כי הדרך מהיכולת לזהות את התופעה אל הגדרתה היא ארוכה או, אם תרצו, ידיעה אינטואיטיבית של משמעות המילה 'אינטואיציה' אינה מובילה אוטומטית אל היכולת של מתן פירוש והנה לנו קושי מסדר שני, שכן מה שחל על ידיעה אינטואיטיבית של תופעה כלשהי, חל על הידיעה האינטואיטיבית של האינטואיציה עצמה

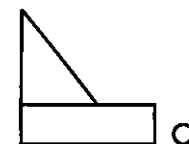
יימצא אולי מי שיתחה על הצורך בהגדרה אם אנו יודעים לזהות את התופעה, האם ההגדרה תוסיף דבר? שאלה זאת דומה ברוחה לאמירה המיוחסת למתמטיקאי בשם מרק כץ שרצה להצביע על החבדל שבין מושגים מתמטיים ויום-יומיים 'אני לא יכול להגדיר את אישתי אבל אני יכול לזהות אותה כשאני רואה אותה, אז בשביל מה ההגדרה?' ואולם, הרצון שלנו להגדיר צומח דווקא מהעובדה, שבמשימתנו הנוכחית אנו מנסים להתרומם מעל היום-יומי ולערך חקר

ברור כעת, שאי-אפשר להפריד בין פעילות ההגדרה ובין פעילות ההסבר לפני שאומר מספר מילים על הדרך שבה שילב אפרים פישביין בין שתי המשימות האלה, אביא דוגמאות שיעזרו בהבנת רעיונותיו



איור 1 היכן יש לשים את העיגול בציור הרביעי

נסתכל באיור 1. בשלושת הציורים הראשונים רואים משולש, מלבן ועיגול בציור הרביעי חסר עיגול, ואנו רוצים להוסיף היכן מקומו של העיגול? פעמים רבות ערכתי ניסוי זה עם קבוצות שונות והתוצאה הייתה תמיד אותה תוצאה המשיבים הציעו לי לשים את העיגול 'למרגלותי' המרובע, כפי שמוצג באיור 2



איור 2 כאן יש לשים את העיגול, אומרים רוב האנשים

המסקנה ברורה יש לכולנו אינטואיציה מה צריך להיות, והיא זהה לרוב בני האדם הדבר מפתיע לכאורה, שכן מדובר, בסך הכול, בשלוש צורות גיאומטריות פשוטות ומופשטות במשולש, מרובע ועיגול מניין אנו יודעים שצריך להיות כך ולא אחרתי ואולם, הפעם לא קשה להשיב על השאלה בהסתכלנו בציור הסתמי אנו מנסים לתת לו משמעות, שכן מתן משמעות והנחלת סדר הם הדרך שלנו להתמודד עם המציאות. שלוש הצורות המונחות זו לצד זו מזכירות לנו מצב מוכר היטב מחיי יום-יום המשולש והמלבן הופכים להיות חפץ ניצב על הקרקע ואילו העיגול הוא כדור המתגלגל ממנו כלפי מטה התחושה שהעיגול חייב, בסופו של דבר, להימצא ליד המלבן בקו אחד עם מקצועו התחתון היא רבת עצמה כל ההתנסות הפיזית שלנו אומרת, כי אין אפשרות אחרת.

נראה, כי הפעם המפתח לחידת האינטואיציה הוא בניסיונו הקודם – ביכולת שלנו לפרש את המצב החדש בעזרת מצב מוכר האם נכון הדבר תמידי האם אפשר להכליל ולומר כי כל אבחנה אינטואיטיבית היא השלכה של ידע קודם בדברנו על האינטואיציה המתקדמת של מתמטיקאים פסלנו לכאורה את האפשרות הזאת בטענה, שהעצמים והתיאוריות שבהם הם עוסקים הם לעתים מבנים חדשים שאינם קשורים קשר של ממש לשום תורה ידועה כך אמרנו גם על התלמידים המתזיקים בתפיסות בלתי מספקות של פונקציה, שכן מושג זה אינו מעוגן בניסיונו הקודם של התלמיד, וזאת בניגוד לרעיונות מסוימים אחרים כגון המושג 'מהירות', הנלמד אמנם בשיעורי פיסיקה, אך מוכר גם מחיי יום-יום

ואולם, יש הבדל בין הטענה כי ההבחנות האינטואיטיביות לגבי מצב כלשהו הן תוצאה של ידע קודם על המצב הזה, לבין הטענה, כי אנו שואבים השראה ממצב מוכר אחר, הנראה לנו דומה למצב החדש ואכן, המקרה של המשולש, המלבן והעיגול התקשר לנו אל המצב של כדור מתגלגל, והאסוציאציה כמו כפתה את עצמה, למרות שאין קשר של ממש בין שני מקרים אלה כעת אין סיבה להניח, כי הדבר אינו אפשרי גם במתמטיקה ואמנם, המתמטיקאים מעידים על כך שרוב אבחנותיהם הספונטניות באות מתוך אסוציאציות עם נושאים מתמטיים ידועים להם היטב אך לא קשורים קשר מורמלי עם הנושא הנחקר זה מה שמשתמע, למשל, משתי העדויות האלה שאספתי במהלך ראיונותיי עם מתמטיקאים מאוניברסיטאות בארץ.

עד כאן, בקצרה, עיקר הרעיון של המודל הסמוי ועד כאן גם היסוד שהוכן עלידי פישביין לאלה הרוצים להמשיך ולחקור את תופעת האינטואיציה¹ בסעיף הבה אציג נדבך חדש הנבנה על גבי יסוד זה בימים אלה

3. ומה לאינטואיציה ולשפה?

בבסיסו של רעיון המודל הסמוי מונחת הסברה, כי אחת התכונות הטבעיות של בני אדם היא הנטייה להשתמש במושגים מתחום אחד בתוך תחומים אחרים שלכאורה אינם קשורים לתחום המקור אם כך, יש הקבלה ברורה בין תופעה זו לבין ההשלכה המטפורית ואכן, מטפורה מוגדרת כהעברת מושגים מתחום לתחום, ובדרך כלל אין קשר של ממש בין תחום המקור ותחום המטרה נראה, על כן, כי ההשלכה המטפורית מונחת ביסודה של תופעת האינטואיציה ומכיוון ששפה היא המכשיר העיקרי של השלכה כזו, הרי מתקבל על הדעת שלשפה תפקיד מרכזי בתופעת האינטואיציה

לפני שאמשיך, אציע לקורא תרגיל מחשבתי לחלן הגדרה של מושג מתמטי פשוט

הגדרה בשם מספרים שמנים נקרא למספרים שלמים המתחלקים ב-3 או ב-7

המשימה היא לרשום במהירות ארבע דוגמאות של מספרים שמנים אני מציעה לקוראים לבצע את התרגיל לפני שימשיכו לקרוא

את המשימה הצגתי פעמים רבות בפני קבוצות מגוונות הצגתי ואף התחכמתי המשיבים לא ידעו שרק חלק מהם קיבלו את ההגדרה הנ"ל, ואילו אחרים עבדו עם הגדרה זוהה בכול, פרט לשם של המספרים, שנקראו הפעם **מספרים רזים** לכאורה, הבדל קטן זה לא היה אמור להשפיע על המספרים שיבחרו ככלות הכול, השם הוא רק שם ואין לו כל נגיעה לדרך שבה מכתיבה הגדרה מתמטית ראויה לשמה מה ייחשב לדוגמת המושג ומה לא כך זה באופן תיאורטי למעשה, התוצאות הראו, כי לשם יש השפעה מובהקת על הדרך שבה מחליטים בני אדם לקבוע את קבוצת ארבע הדוגמאות המייצגות בניסוי

1 אלה הרוצים להתעמק בתיאוריה זו של אפרים פישביין, מוזמנים לקרוא את מאמרם שלו בנושא זה שהתפרסמו בגיליונות 16 ו-22 של עלייה נ"ר פישביין 1993, פישביין, תירוש וברש 1998

מתמטיקאי א: אינטואיציה היא זה שאני יכול לחשוב הגענו שנים או קצת, ובאזנה שהוא תהליך לדמות את זה לדברים אחרים ולחשוב אכן זה מתקשה עם כל מני דברים אחרים שאני מכיר בשטח זה ואז אני יכול לתת לך תשובה ככה מהשהול אני פשוט יודע אם זה נכון או לא נכון עם זאת, אני יכול להיות מאוד החוק מהיכולת להוכיח דבר כזה.
מתמטיקאי ב: אינטואיציה זה היכולת להעביר היענות מתחום אחד לשני, היא באה עם הניסיון, יש כאן טענה מאוד ברורה, שחאינטואיציה היא דבר שבא מהלמדה

מדובר, על כן, במנגנון ההסקה האנלוגית אפשר כעת לסכם ולומר, כי **אינטואיציה אינה אלא יכולת להעביר רעיונות מתחום אחד לאחר**. הנה לנו הגדרה חדשה של אינטואיציה שיש בה גם קצה החוט להסבר התופעה

את קצה החוט הזה הפך אפרים פישביין לתיאוריה של ממש כשהוא הגה את רעיון **המודל הסמוי** בפועלו בהשראת פיאוזה, תיאר פישביין את המודל הסמוי כסכמה מנטלית הבנויה מחומרים ידועים, ברובם 'קונקרטיים', שאנו משתמשים בה בלי לחוש במקומה של סכמה ייחודית שהיינו אמורים לבנות עבור מושג מתמטי מופשט כך, לדוגמה, אוספים של עצמים קונקרטיים משמשים ילדים רבים כמודל סמוי למושג המתמטי **קבוצה**, רעיון של מאזניים תומך בפעילותנו עם **משוואות**, וספירה של עצמים בתוך אוסף הנוצר מצירוף של מספר אוספים שווי עצמה משמש כמודל של **כפל** כוחם של מודלים אלה בכך שהם עוזרים לנו להבין מושג מתמטי מופשט ומייעלים את תהליכי עיבוד והסקת מסקנות מגרענת הברורה בכך, שאין הם תואמים את הסכמה המופשטת הנדרשת בכל פרטיה ואי-התאמה זו חייבת לתת את אותותיה במוקדם או במאוחר כך, לדוגמה, המודל הסמוי של כפל לא יתמוך בכפל שברים והמודל הקונקרטי של קבוצה יפריע לרעיון הקבוצה הריקה כדברי פישביין, 'אנו ממשיכים לפנות, באופן סמוי, אל המקורות הראשוניים של המודלים המתמטיים המופשטים [כלומר למודלים הסמויים] הרבה אחרי שהשפעת המקורות האלו על החשיבה הייתה אמורה לפוג' (פישביין 1995, עמ' 32)

הקטן שלי, אותה תופעה חזרה על עצמה פעם אחר פעם אלה שדיברו על מספרים שמנים נטו לתת כדוגמאות מספרים גדולים יותר מאלה שדיברו על מספרים רזים למשל, מתוך 13 סטודנטים באוניברסיטת חיפה שנשאלו על 'המספרים השמנים', 10 (77%) הצביעו, בין השאר, על מספרים גדולים מ-40 לעומת זאת, מתוך 14 סטודנטים שעסקו במספרים הרזים רק 4 (29%) הזכירו מספרים שמעבר ל-40.

מניסוי מצומצם זה אפשר ללמוד כי השפה שאנו משתמשים בה משפיעה עלינו כמו בעל-כורחנו גם כשהיא אינה אמורה להשפיע התופעה שראינו כאן היא תוצאה של מנגנון ההשלכה המטפורית, שכן המונחים 'שמץ' ו'רזה' נלקחו מתוך השיח היום-יומי, בו הם מתייחסים בדרך כלל לבני אדם ולבעלי חיים, והם ניתבו את בחירת הדוגמאות המטפוריות לאחר שפירוש המילים הותאם אל התוכן החדש

הדוגמה אכן מאירה את הקשר שבין אינטואיציה ובין שפה, אך לא די בה כדי להבין את מלוא עצמתה של המטפורה כמעצבת ראשית של עולם המושגים שלנו אביא, על כן, מספר דוגמאות נוספות ניקח, למשל, את המונח המתמטי 'קבוצה' אנו נוהגים להשתמש בו גם בשיח היום-יומי אנו אומרים, לדוגמה, 'קבוצת ילדים נכנסה לכיתה', ואנו מתכוונים לכך שמספר הילדים שנכנסו לכיתה הוא לפחות שלושה ואולם, במתמטיקה אפשר לדבר גם על קבוצה בת איבר אחד וגם על קבוצה ריקה באופן ברור, רעיון זה אינו מתיישב עם השימוש היום-יומי של המלה 'קבוצה' ומשאיר אותנו במעין פיצול אישיות בחיי יום-יום המונח "קבוצה" בא במיוחד כדי לאותת קיום של יותר משני איברים, במתמטיקה הייחוד הזה נעלם ולכן מקומה של המילה 'קבוצה' בשיח מתמטי שונה לגמרי ממקומה בשיח היום-יומי קשה לחיות עם שני שימושים סותרים שכאלה ואין זה פלא שהתלמידים נוטים להשליך לתוך השיח המתמטי את הדפוסים היום-יומיים, הנראים להם טבעיים ובלתי ניתנים לערעור דרך דיבור היום-יומי היא זו שכופה עליהם התנגדות לרעיון של קבוצה ריקה בתור אחד שינוגד את האינטואיציה

ומה בדבר המילה 'פונקציה' ייתכן, כי השימוש היום-יומי במונח זה הוא המקור של 'המיסקונצפציה' שאותה הזכרתי קודם, ולפיה אין לדבר על פונקציה אלא כאשר שינוי בגודל אחד, x , גורם לשינוי בגודל אחר, y ואכן, כשכתוב בעיתון

ששביעות רצון של עובדי מפעל היא פונקציה של שכרם, הרי שאין הכוונה לכך כי שביעות הרצון נותרה כפי שהייתה גם כשהשכר עלה

רשימת המושגים המתמטיים שינוגדים את האינטואיציה של רוב בני אדם יכלה להיות ארוכה עוד יותר עבור כל אחד מהם אפשר היה להצביע על שימושים לשוניים בהקשר אחר שסותרים את השימוש הנדרש בעקבות ההגדרה המתמטית אני אסתפק בשתי הדוגמאות דלעיל ואציע לקורא לחשוב על ההתנגשות בין שיח יום-יומי ובין שיח מתמטי הבאים לידי ביטוי כשדנים במושגים כמו **כפל**, **גובה**, או **שוויון בין קבוצה לבין קבוצה חלקית לה** (כידוע, שוויון כזה עשוי לחול כשהקבוצות אינסופיות)

אסיים סעיף זה בדוגמה הממחישה מנגנון נוסף שבאמצעותו מובילה אותנו השפה לאינטואיציות חזקות, ולעתים מוטעות נסתכל בשגיאה הנפוצה בין תלמידי תיכון ואף באוניברסיטה, לפיה $1 = \infty / \infty$. השגיאה היא תוצאה של שימוש בתבנית לשונית שאינה מתאימה למילים המופיעות בה השאלה היא כיצד קורה שרבים כל כך נופלים קורבן לאשליה, כי שימוש כזה הוא אכן אפשרי ותקין באיור 3 מתואר באופן סכמתי כיצד הסימן $\propto$ 'מתגנב' בהדרגה לתוך תבניות לשוניות בלתי מתאימות, שהתבנית $x/x = 1$ היא רק אחת מהן. ואמנם, למלה 'אינסוף' יש נטייה להיכנס לתוך תבניות לשוניות המיועדות למספרים אין בכך כל אסון כל עוד מדובר בציון פשוט של ערך גבולי הבעיה מתחילה כאשר המילה 'אינסוף', ולאחר מכן הסימן ∞ , מופיעים גם בפסוקים מתמטיים המבטאים פעולות במספרים לפי איור 3, התהליך מתחיל כאשר אנו עוסקים בגבולות ומבחינים בכך, כי יש הקבלה בין האמירה ' $f(x)$ שואפת ל-5 כאשר $x \rightarrow x_0$ ' ובין האמירה ' $f(x)$ שואפת לאינסוף כאשר $x \rightarrow x_0$ ' ההקבלה הזו די בה, כדי לייחס למילה 'אינסוף', ולאחר מכן לסימן ∞ , תפקיד לשוני דומה, אם לא זהה, לזה של מספרים ואמנם, למילה 'אינסוף' אין בשלב הראשון משמעות משלה ' $f(x)$ שואפת לאינסוף' אינו אלא ביטוי מטפורי לעובדה, שערכי ' $f(x)$ גדלים ללא הגבלה כאשר ערכי x מתקרבים ל- x_0 אמירה זו היא אכן מטפורית, משום שהיא נבנתה בצלמו של המשפט התקין הדן במספרים ' $f(x)$ גדלה ל-5 כאשר $x \rightarrow x_0$ ' לאחר שהסימן ∞ תפס את המשבצת השמורה למספרים בתבנית לשונית אחת, יש לנו נטייה להכניסו לכל התבניות המיועדות למספרים את

סוף הסיפור אפשר להבין מן השלבים המוצגים באיור 3
איור 3 כיצד מובילה אותנו השפה אל 'האינטואיציה'
ש- $\infty/\infty = 1$

תפונות האינטואיציה לפי פישביין: אינטואיציה כחבר, פיניות

על מספרים	על אינסוף
פונקציה F חלה ל-5	פונקציה F חלה ללא הגבלה
פונקציה F שואפת ל-5	פונקציה F שואפת לאינסוף
הגבול של F שווה ל-5	הגבול של F שווה לאינסוף
$\lim F(x) = 5$	$\lim F(x) = \infty$
$5/5 = 1$	$\infty/\infty = 1$

4. במה שונה השכבה החדשה מהשכבה הראשונה?

בסעיף הקודם הצגתי קווי מתאר לבניית נדבך חדש שאפשר לבנות על יסוד תורת האינטואיציה של פישביין יש בוודאי שיטענו כי עוד לא עשיתי הרבה בסך הכול דיברתי על מטפורות במקומות שבהם השתמש פישביין ברעיון המודל הסמוי היש בכך שינוי מהותי כלשהו, שינוי שעשוי להוסיף תובנה

ובכן, אפשר היה לסיים את המאמר בנקודה זו ולומר כי הדיון במטפורות ובשפה אינו אלא תוספת לתורתו של אפרים פישביין – הצעה להסתכלות נוספת, מנקודת ראות חדשה, על אותה תופעה ואותם מגנונים שתוארו בתורתו של פישביין אפשר היה לטעון שלא מדובר כאן בשינוי ראייה, אלא רק בתוספת. כך בוודאי יעדיפו להתייחס אל דיוננו הנוכחי אלה הרואים את עצמם כממשיכי דרכו של פיאז'ה, שייחס לשפה תפקיד של אמצעי לחשיבה אף-על-פי שזהו אמצעי חשוב שאין כמוהו, זה בכל זאת רק אמצעי, ומכיוון שלפי תפיסה זו

אותה מחשבה יכולה להתבטא מאמצעים שונים, תפקידה הקוגניטיבי של השפה הוא משני בלבד

ואולם, אפשרית גם עמדה אחרת, הרואה בשפה גורם מרכזי וקובע הרבה יותר העמדת השפה בלב הדיון עשויה להביא ראייה חדשה, ולא רק תוספת מידע או נקודת ראות. השינוי של ממש בא ברגע שאנו מתחילים לראות בפעילות התקשורת את המפתח להבנת החשיבה. ואכן, יש לנו סיבות טובות לחשוב על החשיבה כעל תקשורת עצמית תקשורת זאת אינה בחכרה מילולית, שהרי אנו מסוגלים לחשוב גם בתמונות ובסמלים אחרים עם זאת, החל מגיל כשנתיים התקשורת העצמית שלנו מתבצעת לרוב באופן מילולי מכאן חשיבותה העצומה של השפה בעיצוב החשיבה אם נוסיף לכך את הרעיון שאפשר למצוא בכתביו של לב סמיונוביץ' ויגוצקי (L S Vygotzki, 1896-1934) שלפיו הדיבור עם אחרים קודם מבחינה התפתחותית לדיבור עם עצמנו, כי אז אנו מתחילים להבין כי בכל הקשור לדרכי החשיבה הגורם החברתי חשוב לא פחות, ואלי אף יותר, ממפגשו 'הישיר' עם העולם החומרי הסובב אותו

שינוי בראיית 'יחסי הכוחות' בין גורם החברה וגורם הסביבה, המקופל בטענה אחרונה זו, הוא משמעותי ביותר והשלכותיו על הבנת החשיבה האנושית הן מרחיקות לכת בשל מגבלות המקום, לא אוכל לפרט ולהמחיש דברים אלה כראוי, ואסתפק בניסיון להציג כיווני מחשבה אפשריים לאלה הרוצים להתעמק בעניין כך, לדוגמה, אני מאמינה כי שימת סימן שוויון בין חשיבה לשיח ומתן תפקיד מרכזי לגורם החברתי עשויים להביא תשובות חדשות לשאלה מדוע לאינטואיציה יש כל אותם מאפיינים שאפרים פישביין זיהה במחקריו ובחן בקפידה כל חייו המידיות, הכפייתיות, הגלובליות והנטייה לאקסטרפולציה מעבר לראיות אמפיריות ייתכן גם, כי ההמשגה החדשה עשויה לשפוך אור חדש על ההבחנה בין אינטואיציות ראשוניות ומשניות, המרכזיות כל כך לתורתו של אפרים פישביין לנושא אחרון זה יש חשיבות מעשית רבה במיוחד, שכן הוא נוגע לשאלה אם יש אינטואיציות 'טבעיות', שאי-אפשר למנוע אותן ואף לא למחקן (אלה האינטואיציות הראשוניות לפי פישביין) או שמא האינטואיציות שלנו הן תוצר חברתית-תרבותי והן מתעצבות כתוצאה של למידה (לפי פישביין, רק אינטואיציות משניות הן בעלות תכונה זו) אלה המאמינים, כי הלמידה היא הגורם הדומיננטי מאמינים למעשה שאת האינטואיציה אפשר 'לחנך' למסקנה זו עשויות

להיות השלכות רבות על תהליכי הוראה האפשרות לחשפיע על המעשה החינוכי בעקבות המחקר הוא בבחינת הגשמת שאיפותיו של אפרים פישביין, אשר בנה את תורתו וערך את מחקריו למטרה מרכזית אחת שיפור הלמידה וההוראה של מתמטיקה

רשימת הספרות

- ספרד, אנה [1993] פסיכולוגיה של החינוך המתמטי – שיחה עם פרופ' אפרים פישביין, עלייה 13, 20-15
פישביין, א' [1995] מודלים סמויים וחשיבה מתמטית עלייה 16, 32-38
פישביין, א', ד' תירוש, וא' ברש [1998]. ידע אינטואיטיבי וידע לוגי כמרכיבים של הפעילות המתמטית, עלייה 22

28-12

