



הנושא : הגרף - סיפור על חקירה מתמטית

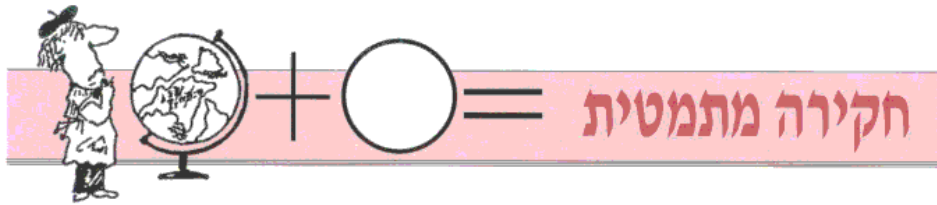
הוכן ע"י : לאה דולב, ביי"ס אורט מגדים בכרמיאל ומנחה למתמטיקה ברשת אורט.

תקציר : המחברת מספרת את סיפורה של חקירה מתמטית, שראשיתה בוצעה על-ידי שתי תלמידות. השאלות, שנשארו פתוחות בסיום עבודתן, הובילו לעיון בתחום המשוואות הדיפרנציאליות.

מילות מפתח : שיטת חקר, חשיבה מתמטית, מקום גיאומטרי, אלגברה, פונקציות, גרף, פונקציה ממעלה ראשונה, ישר, פונקציה ממעלה שניה, פרבולה, אנליזה, חשבון דיפרנציאלי, נגזרת, משיק, משוואה דיפרנציאלית, היפרבולה, מחשב, שיח מתמטי.

החומר פורסם במסגרת : על"ה 27, סתיו תשס"ב, 2001, עמודים 3-9.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה : 7 עמודים.



הגורף – סיפור על חקירה מתמטית

לאה דולב

מורה בבית הספר אורט 'מגדים' - כרמיאל
מנחה למתמטיקה ברשת אורט

פרק ראשון

הצגת בעיית הגורף, תרגום לשפה מתמטית וניסיונות לפתרון שבחלקם הסתבכו וכשלו.

נכתב על ידי שתי תלמידותי, מאי פלד ומיכל הנדלסמן, יא 4 יחיל מתמטיקה. הדברים מובאים מתוך עבודה שנכתבה להגשה לתחרות עבודות פתוחות במתמטיקה – תשנ"ט, של רשת אורט. פרק זה מכיל גם שתי הערות שלי כמנחה של התלמידות בעבודתן.

פרק שני

גילוי הפונקציה.

נכתב על ידי אבא שלי, אברהם בלוך, פנסיונר עם ותק של יותר מחמישים שנות הוראת מתמטיקה לפרחי הוראה ולתלמידי תיכון. הצגתי בפני בלוך את הבעיה לאחר 'הסתבכותי' שמתוארת בפרק הראשון.

פרק שלישי

טיפול נוסף במשוואה הדיפרנציאלית והעשרת הפתרון. כתבתי כתוספת לפתרון של בלוך. בסוף פרק זה יתבקש הקורא לבצע בעצמו מספר חישובים ולשרטט מספר גרפים, וכך יהיה אפשר לקשר בין בעיית הגורף לפיתוח המתמטי המוצג בפרק זה.

פרק רביעי

הכללה ותשלום חוב.

נכתב בעזרת ספרות בנושא משוואות דיפרנציאליות. הצגת התיאוריה אפשרה טיפול בהיפרבולה, והפעם ללא 'הסתבכויות'.

במאמר זה מתוארת חקירה-למידה מתמטית שנעשתה במספר שלבים על ידי חוקרים-לומדים שונים.

לצד הפן המתמטי אנסה לספר גם על תהליך החקירה והתחושות שנלוו אליה. אני מקווה שתיאור זה יעודד אותנו כמורים, ללמוד וללמד מתמטיקה בגישה של חקר, תוך כדי התנסות בעשייה מתמטית.

הטיפול בבעיית החקר המתוארת בהמשך העמיד אותי במצב של חוסר יכולת מתמטית לפתור באופן מידי בעיה שהעלו תלמידותי, אך תהליך החיפוש והחקר יחד עם תלמידים ועמיתים זימנו לי חוויות לימוד מרתקת ומעשירה. על חוויות הלימוד של תלמידותי תוכלו לקרא בגוף המאמר.

אני ממליצה לקרוא את המאמר בליווי דף, סרגל ועיפרון כדי לבצע את הפיתוחים המתמטיים במלואם, להשתכנע בנכונותם ולהבין את קו המחשבה שהוביל את החוקרים.

פרק ראשון:

הצגת בעיית 'הגרף', תירגום לשפה מתמטית וניסיונות לפתרון שבחלקם הסתבכו וכשלו.

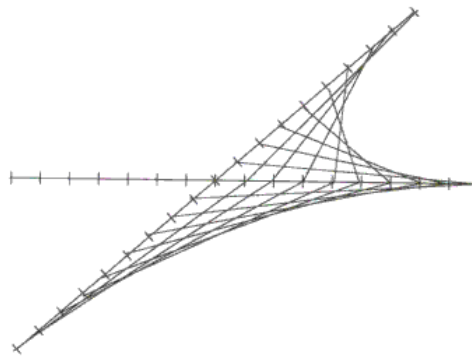
נכתב על-ידי שתי תלמידות; מאי ומיכל, יא
4 יח"ל מתמטיקה. הדברים מובאים מתוך עבודה
שנכתבה להגשה לתחרות עבודות פתוחות
במתמטיקה – תשנ"ט, של רשת אורט.
פרק זה מכיל גם שתי הערות שלי כמנחה של
התלמידות בעבודתן.

הכול התחיל לפני כחמש שנים, בכיתה ז', באחד משיעורי
המתמטיקה בו לימדה אותנו המורה לצייר גרף מיוחד –
הגרף.

בניית הגרף:

מסמנים על שני ישרים, החל נקודות המפגש, כתשעה קטעים,
באורך שווה.

בוחרים שתי קרניים, לא על אותו ישר, ומחברים ע"י ישרים
את נקודות החלוקה באופן כזה: מקרן אחת נקודה ראשונה
עם נקודה אחרונה בקרן השנייה, מקרן אחת נקודה שנייה עם
נקודה לפני אחרונה בקרן השנייה וכן הלאה. חוזרים על
התהליך עבור כל זוג קרניים שלא על אותו ישר. בשרטוט
מוצג ביצוע חלקי, רק שני זוגות קרניים, של הגרף.



גרף 1

ומאז לא הפסקנו לצייר אותו - קישוט יפה ומיוחד, על דפים,
מחברות או סתם פתקים, בצבעים ושיטות שונות. כל זה עד
לאחד משיעורי המתמטיקה במהלך שנה זו, בו 'תפסה אותנו'
המורה מציירות את הגרף במקום להקשיב למחלף השיעור.

ואז במקרה או שלא במקרה היא אמרה: 'גם זה יכול להיות
נושא לעבודה פתוחה' ואנחנו מבלי לחשוב פעמיים ידענו - זה
יהיה נושא העבודה שלנו. ישבנו וניסינו לחשוב איך מקשרים
'ציור' יפה שכזה לעבודה במתמטיקה. חקרנו משוואות ישר,
נקודות מפגש וחיפשנו נוסחאות של עקומים.

מטעמי נוחות החלטנו לצמצם את החקירה לשני ישרים
מאונכים זה לזה, וכך נוצרה הזדמנות להלביש את הגרף על
מערכת צירים.

חילקנו כל קרן של הצירים לשמונה נקודות.

מצאנו את משוואות הישרים, 8 ישרים בכל רביעי, סה"כ 32
משוואות.

לדוגמה: בין נקודות החלוקה (0, 6) ו- (3, 0) השיפוע הוא

$$a = \frac{6-0}{0-3} = -2$$

נקודת החיתוך של הישר עם ציר y: (0, 6), $b = 6$. משוואת
הישר:

$$y = -2 \cdot x + 6$$

לאחר שמצאנו את כל משוואות הישרים שמנו לב לעובדה
שהשיפוע של ארבע המשוואות הראשונות הוא הופכי לשיפוע
של ארבע המשוואות האחרונות. למשל:

$$y = -\frac{1}{8} \cdot x + 1$$

משוואה 8:

$$y = -8 \cdot x + 8$$

בנוסף מצאנו שהמשוואות דומות בכל הרביעים, אך מה
שמבדיל ביניהן הוא שהסימן של השיפוע ושל נקודת החיתוך
עם ציר y משתנה, כלומר:

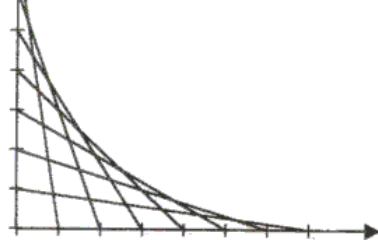
$$\text{רביעי ראשון: } y = -ax + b$$

$$\text{רביעי שני: } y = ax + b$$

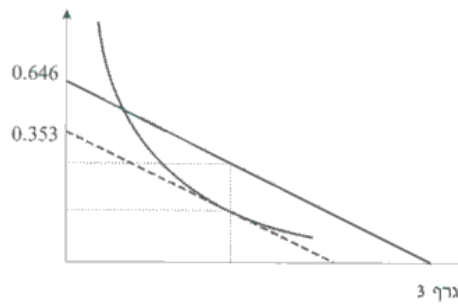
$$\text{רביעי שלישי: } y = ax - b$$

$$\text{רביעי רביעי: } y = -ax - b$$

על בסיס ממצאים אלו החלטנו להתמקד ברביעי הראשון.



גרף 2



הסתבר שמשקל ל- $y = \frac{1}{x}$ וישר של הגרף בעלי אותו שיפוע, אינם מתלכדים.

כנראה שלא היה נכון לקבוע מראש את ערכו של k . נקבע את k על-פי אחד הישרים של הגרף. נבחר מטעמי סימטריה את הישר העובר דרך הנקודות $(0, 4.5)$ ו- $(4.5, 0)$. הישר הוא $y = -x + 4.5$.

$$x = \sqrt{k} = y, \quad \sqrt{k} = -\sqrt{k} + 4.5, \quad k = 5 \frac{1}{16}$$

נציב במשוואת ישר אחר של הגרף, למשל, $y = -\frac{1}{8} \cdot x + 1$, כדי למצוא את נקודת השקה:

$$-\frac{5}{16} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{8} \quad x = \sqrt{40.5} \approx 6.364$$

$$y = -\frac{5}{16} \frac{1}{\sqrt{40.5}} \approx -0.795$$

$$y = -\frac{1}{8} \cdot \sqrt{40.5} + 1 \approx 1.795$$

מסתבר כי k שנבחר כדי שיתאים לישר הסימטרי לא מתאים לישרים אחרים של הגרף.

עד כאן עיקר עבודת החקר של תלמידות. התחושה לא הייתה טובה במיוחד, כי לאחר הרבה משוואות של ישרים, נקודות מפגש בין ישרים, שרטוטים ונגזרות, למעשה לא נמצאה נוסחה מתאימה. סוג מסוים של נחמה היה בעובדה, שכאשר הופנתה הבעיה למורים למתמטיקה הימרו כולם על ההיפרבולה והופתעו כאשר התברר שלא כך הדבר.

בשלב זה ניסיתי, כמנחה, להוביל מחלק של הוכחת הטענות הנ"ל. לא היה יחד להצעת, ואני נשארתי לבד עם משימת ניסוח והוכחה של טענות, שלדבר, ירואים מידי שזה נכון תמיד, התלמידות התקדמו בעבודתן כפי שמתואר בהמשך.

הרעיון שלנו היה לחפש פונקציה שתתלכד באופן כלשהו עם החלק החיצוני של הגרף.

חישבנו את נקודות המפגש של הישרים, רק הנקודות שנמצאות על יחלק החיצוני של הגרף, שש נקודות.

בעזרת ה- EXCEL חיפשנו משוואות עקום המכיל את הנקודות. קיבלנו פונקציה ממעלה שנייה שאינה מכילה את כל הנקודות. החלטנו לזנוח את הרעיון של חיפוש עקום הנקבע על-ידי נקודות המפגש החיצוניות של ישרי הגרף.

החלטנו, בעידוד המורה שלנו, להסתכל על הישרים כעל משיקים של הגרף שאנו מחפשות את נוסחתו.

חשבנו שהעקום שבאופן גרפי נראה מתאים הוא ההיפרבולה

$$y = \frac{k}{x}$$

חיפשנו ערך k שיתאים לגרף וכן את שיעורי נקודות ההשקה.

החקירה התבססה על השוואת הנגזרת של הפונקציה $y = \frac{k}{x}$ לשיפועי הישרים של הגרף:

$$-\frac{k}{x^2} = a$$

קבענו ש- $k = 1$, כדי לחשב את נקודות ההשקה.

$$y = -\frac{1}{8} \cdot x + 1 \quad \text{למשל, ניקח את הישר של הגרף:}$$

$$-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{8}$$

$$x = 2 \cdot \sqrt{2}$$

על העקום מקבלים:

$$y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \approx 0.353$$

על הישר של הגרף מקבלים:

$$y = -\frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 1 \approx 0.646$$

שיעורי נקודות החיתוך של t_0 עם הצירים:

$$x=0 \rightarrow y_1 - y_0 = f'(x_0) \cdot (0 - x_0), y_1 = y_0 - x_0 \cdot f'(x_0)$$

$$y=0 \rightarrow 0 - y_0 = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0), x_1 = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)}$$

כיון שמדובר בנקודה שירצה' על הגרף, ניתן לרשום x במקום x_0 .

הצבת שיעורי נקודות החיתוך באילוץ $x_1 + y_1 = a$:

$$x - \frac{y}{y'} + y - x \cdot y' = a$$

התקבלה משוואה דיפרנציאלית, 'המשוואה שלנו'.

גזירת שני אנפיה:

$$1 - \frac{y' \cdot y' - y \cdot y''}{(y')^2} + y' - 1 \cdot y' - x \cdot y'' = 0$$

$$\frac{y \cdot y''}{(y')^2} - x \cdot y'' = 0$$

$$y'' \cdot \left[\frac{y}{(y')^2} - x \right] = 0$$

נבחן את האפשרות:

$$\left[\frac{y}{(y')^2} - x \right] = 0$$

$$\frac{(y')^2}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \pm \frac{1}{\sqrt{x}}$$

היות שמדובר ברביע הראשון שבו $y' < 0$ יתאים הסימן

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{y'}{2 \cdot \sqrt{y}} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{y})' = -(\sqrt{x})'$$

שתי פונקציות עם גזירות שוות נבדלות זו מזו בקבוע ולכן:

$$\sqrt{y} = -\sqrt{x} + k$$

בגלל קוצר הזמן החלטנו להפסיק בשלב זה את החקירה, כדי שהן תוכלנה לארגן את החומרים במתכונת של עבודה לתחרות.

כפי שיתואר בפרק השני נמצאה הפונקציה המבוקשת, ואני סיפרתי עליה לתלמידות, ללא הסבר כיצד היא נמצאה. הן לקחו את הפונקציה העלו אותה על גרף בעזרת המחשבון הגרפי (שעזר להן מאוד במהלך כל שלבי העבודה) קיבלו התאמה גרפית, שמחו מאוד שיש בכל זאת תשובה לחקירתן, ציטטו את הנוסחה בסוף עבודתן ויצאו ידי חובת הוכחה על-ידי הטענה ש'זה כבר מחקר לעבודה אחרת'. אסיים פרק זה בדברים שכתבו התלמידות בסיכום של עבודתן:

הדרכים שבהן חקרנו הובילו לכיוונים שונים, הממצאים שגילינו התגלו כלא מותאמים לגרף שלנו, אך הדרך עצמה הייתה מיוחדת ומרתקת.

לעתים כשכבר חשבנו – 'הנה מצאנו', גילינו שיש אי-התאמה ואז הכול שוב כמעט מההתחלה. בסופו של דבר אנחנו יודעות את המשוואה האמיתית אך גם בלעדיה התחליף שעברנו היה פורה, מקיף ומעשיר.

פרק שני:

גילוי הפונקציה

נכתב על-ידי אבא שלי, אברהם בלוח, פנסיונר עם ותק של יותר מחמישים שנות הוראת מתמטיקה לפרחי הוראה ולתלמידי תיכון. הצגתי בפני בלוח את הבעיה לאחר 'ההסתבכות' שמתוארת בפרק הראשון.

נתונה משפחת קטעים t , הנוצרים על-ידי ישרים העוברים דרך הנקודות $(0, y_1)$ ו- $(x_1, 0)$ כאשר $x_1 + y_1 = a$. בבעיה המקורית $a = 9$ וכן x_1 ו- y_1 טבעיים.

יש למצוא פונקציה $y = f(x)$ כך שהקטעים הנ"ל יהיו משיקים לה.

נסמן ב- t_0 את המשיק לגרף של $f(x)$ בנקודה (x_0, y_0) שעל גרף זה.

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad t_0: \text{משוואת}$$

$$-\frac{d}{c} + d = a, -d + c \cdot d = c \cdot a, c \cdot (d-a) = d, c = \frac{d}{d-a}$$

$$y = \frac{d}{d-a} \cdot x + d$$

משפחת הישרים הנ"ל עבור, למשל, $a=9$ ו- $d=1, 2, \dots, 8$ מאוד מעניינת. כדאי לנסות לשרטט אותה ברביע הראשון ולצרף לאותו שרטוט גם את הגרף של הפונקציה של בלוד, כלומר הגרף של:

$$y = (\sqrt{9} - \sqrt{x})^2$$

פרק רביעי: הכללה ותשלום חוב

נכתב בעזרת ספרות בנושא של משוואות דיפרנציאליות וההיסטוריה שלהן. הצגת התאוריה אפשרה טיפול בהיפרבולה, והפעם ללא הסתבכויות.

המשוואה הדיפרנציאלית ששפקה את הפתרון לבעיית הגרף דומה, מבחינת התבנית ודרך הפתרון, למשפחת משוואות דיפרנציאליות הנקראות 'משוואות קליר'.

קליר (1713 - 1765 Alexis Claude Clairaut), אפיין את משפחת המשוואות הדיפרנציאליות מהצורה $y = x \cdot y' + \phi(y')$, שנקראת על שמו. בתקופה זו היה קושי בפתרון של משוואות דיפרנציאליות והתקדמות הושגה כאשר הצליחו לסווג משוואות למשפחות שכל אחת מהן התאפיינה בדרך דומה של פתרון.

קליר התפרסם כמתמטיקאי בגיל צעיר מאוד: בגיל עשר התעניין בכתביו של ל. הופיטל (de L'hospital) בנושא חתכי חרוט, בגיל שלוש-עשרה הציג בפני האקדמיה למדעים בפריז מאמר שכתב בנושא גיאומטריה ובגיל שמונה-עשרה התמנה כחבר באקדמיה. בצד מחקריו המתמטיים, בעיקר בתחום האנליזה של משטחים במרחב, כתב קליר שני ספרים: 'יסודות הגיאומטריה' (1741) ו'יסודות האלגברה' (1754) שהיו חלק מתוכנית רחבה שלו לשפר ולחשבי את הוראת המתמטיקה.

בהנחה שגם צירי המערכת משיקים לפונקציה שנמצאה וכדי לשמור על התנאי $x_1 + y_1 = a$ צריך לדרוש שהפונקציה תגוש את ציר Y בנקודה $(0, a)$, כלומר $y_1 = a$.

הצבת $x=0$ בפונקציה:

$$\sqrt{y} = -0 + k, y_1 = k^2 = a$$

$$\sqrt{y} = -\sqrt{x} + \sqrt{a}, \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

ובצורה מפורשת:

$$y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$$

התבנית הזו מתארת חלק של פרבולה שקצותיו בנקודות $(0,0)$ ו- $(a,0)$ קודקוד הפרבולה בנקודה $(a/4, a/4)$. טענה זו אולי מפתיעה והיא מזמינה חקירה מעמיקה על תכונותיה של הפרבולה ושל משיקה, החורגת ממהלך הסיפור הנוכחי.

פרק שלישי: טיפול נוסף במשוואה הדיפרנציאלית והעשרת הפתרון

כתבתי כתוספת לפתרון של בלוד. בסוף פרק זה יתבקש הקורא לבצע בעצמו מספר חישובים ולשרטט מספר גרפים, וכך ניתן יהיה לקשר בין בעיית הגרף לפיתוח המתמטי המוצג בפרק זה.

הטיפול במשוואה הדיפרנציאלית הוביל למשוואה:

$$y'' \cdot \left[\frac{y}{(y')^2} - x \right] = 0$$

בלוד טיפל בגורם שבסוגריים ואני החלטתי לטפל בגורם הראשון, שלכאורה נראה 'חסר טעם'.

$$y'' = 0$$

$$y' = c$$

$$y = cx + d$$

הצבת שוויונים אלו במשוואה הדיפרנציאלית המקורית:

$$x - \frac{y}{y'} + y - x \cdot y' = a$$

$$x - \frac{cx+d}{c} + cx + d - x \cdot c = a$$

$$x - x - \frac{d}{c} + cx + d - cx = a$$

ב- ϕ , מצא בלוק דרך לפתרון מקרה ה'גרף כפי שתואר בפרק שני.

הפתרון הפרמטרי:

$$y = c \cdot x + \frac{y}{c} \cdot x + a$$

$$(c-1) \cdot y = c \cdot (c-1) \cdot x + a \cdot c$$

$$y = c \cdot x + \frac{a \cdot c}{c-1}$$

מהצבת $c = \frac{d}{d-a}$ נקבל $y = \frac{d}{d-a} \cdot x + d$, וזוהי משפחת הישרים שסיכמה את הפרק השלישי. חלק מישרי משפחה זו הם למעשה ה'גרף.

משוואות קליר יכולות לשמש 'בית חרושת' ליצירת משפחות של ישרים עם המעטפות שלהן.

נתונה משפחה חד-פרמטרית של ישרים: $y = m \cdot x - \sqrt{m}$

צריך למצוא משוואת עקום שמהווה מעטפת לישרים הנ"ל.

$$y = m \cdot x - \sqrt{m}, \quad y' = m, \quad y'' = 0$$

הצבה בנוסחת הפתרון הפרמטרי של קליר,

$$m \cdot x - \sqrt{m} = m \cdot x + \phi(m)$$

$$\phi(m) = -\sqrt{m} \quad \text{נתון:}$$

משוואת קליר למקרה זה:

$$y = y' \cdot x - \sqrt{y'}$$

גזירת שני אגפים:

$$y' = y'' \cdot x + y' - \frac{y''}{2 \cdot \sqrt{y'}}$$

$$y'' \cdot \left[x - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y'}} \right] = 0$$

הטיפול בגורם הראשון יתן את הפתרון הפרמטרי, כלומר, את משפחת הישרים $y = m \cdot x - \sqrt{m}$ שממנה פותחה דוגמה זו.

פיתוח הגורם שבסוגריים:

$$\sqrt{y'} = \frac{1}{2 \cdot x}, \quad y' = \frac{1}{4 \cdot x^2}, \quad y = -\frac{1}{4 \cdot x} + k$$

הצבת פתרון זה במשוואה הדיפרנציאלית, $y = y' \cdot x - \sqrt{y'}$, כדי למצוא את קבוע האינטגרציה:

צורתן הכללית של משוואות קליר מוצגת בתבנית:

$$y = x \cdot y' + \phi(y')$$

כאשר עבור פונקציות ϕ שונות תתקבלנה משוואות שונות השייכות למשפחה.

הפתרון מתקבל על-ידי גזירת שני האגפים:

$$y' = y' + x \cdot y'' + y' \cdot \phi'(y')$$

$$y'' \cdot [x + \phi'(y')] = 0$$

כדי לטפל בביטוי שבסוגריים, $[x + \phi'(y')] = 0$, צריך שתהיה נתונה הפונקציה ϕ .

הפתרון המתקבל מפיתוח הביטוי שבסוגריים נקרא 'פתרון סינגולרי', כי אינו תלוי בפרמטר כלשהו: במעבר מ- y' ל- y מיתוסף קבוע אינטגרציה אחד. ערכו של קבוע האינטגרציה נקבע על-ידי הצבת y' ב- y במשוואה המקורית.

הטיפול בגורם הראשון, $y'' = 0$, אפשרי גם במקרה כללי זה:

$$y'' = 0, \quad y' = c, \quad y = cx + d$$

הצבה בתבנית של קליר:

$$cx + d = x \cdot c + \phi(c)$$

$$d = \phi(c)$$

מתקבלת משפחת ישרים חד-פרמטרית הפותרת את משוואת קליר:

$$y = c \cdot x + \phi(c)$$

פתרון זה נקרא 'פתרון פרמטרי'. כאן נעשו שני מעברי אינטגרציה ולכן הצבת הפתרון במשוואה המקורית יקבע רק את ערכו של קבוע אינטגרציה אחד ביחס לשני.

הפתרון הסינגולרי של משוואת קליר נקרא גם 'המעטפת' של הפתרון הפרמטרי. בכל נקודה על הגרף של הפתרון הסינגולרי עובר משיק השייך לפתרון הפרמטרי.

$$a = x - \frac{y}{y'} + y - x \cdot y' = a, \quad \text{יש לנו,}$$

המשוואה שצמחה מה'גרף, בתבנית קליר:

$$y = x \cdot y' + \left(\frac{y}{y'} - x + a \right)$$

$$\phi(y', x) = \frac{y}{y'} - x + a, \quad \text{נקבל פונקציה 'מוזיפת',}$$

כי בתבנית קליר הפונקציה ϕ תלויה רק ב- y' .

בכל מקרה, אין להבדל זה משמעות מבחינת הפתרון הפרמטרי שאינו תלוי ב- ϕ . לגבי הפתרון הסינגולרי, התלוי

למעשה גם החקירה שהוצגה בהמשך סובלת מחוסר הצדקות פורמליות: גזרנו ואינטגרלנו 'חופשי' בלי להעמיד תנאים על הפונקציות, לא נערך דיון בעניין היחידות של הממצאים, הצגת הימשוואה שלנו כתבנית 'קליר' נעשתה על בסיס העובדה שהפיתוח הצליח ולא על בסיס תיאורטי ובוודאי אפשר לציין 'הקלות' נוספות שאימצנו במהלך החקירה.

מול חסרונות אלו אני רוצה להדגיש שלצד התנאה מן החקירות והגילויים בכל זאת התרחש תהליך של למידה:

התלמידות התעמקו, בין היתר, בנושא הפונקציה חקויות, בנושא משיקים לעקום ונעזרו בטכנולוגיה (EXCEL, מחשבון גרפי). אני רעננתי את ידיעותי בנושא משוואות דיפרנציאליות.

בפרק הראשון הזכרתי שסיפור ה'גורף' צמח מתוך עבודה להגשה לתחרות 'עבודות פתוחות במתמטיקה' בראשותה של גבי נעמי ציזיק, מנהלת תחום המתמטיקה ברשת אורט. תלמידי בית הספר שבו אני מלמדת לוקחים חלק בפעילות זו מאז תחילתה לפני ארבע שנים. הסיפור שסיפרתי כאן הוא דוגמה לשיח מתמטי בין תלמידים למורים ובינם לבין עצמם, שיח שהתפתח על רקע הנחיית תלמידים.

אני רוצה להודות לבלוץ על תרומתו המתמטית בגילוי מעטפת ה'גורף' ועידודו ותמיכתו, כמורה-מומחה, כעמית וכאבא, בכתיבת סיפור זה.

רשימת ספרות:

- Boyce, E. W., R. C. DiPrima [1969]. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley and Sons.
- Boyer, B. C. [1974]. *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons.



מתי יגיעו למזרח?

$$-\frac{1}{4 \cdot x} + k = \frac{1}{4 \cdot x^2} \cdot x - \sqrt{\frac{1}{4 \cdot x^2}}, \quad k=0, \quad y = -\frac{1}{4 \cdot x}$$

ובאות שולם 'חוב' לשלב הראשון, כי נמצאה כאן המשפחה הפרמטרית שמעטפתה היא היפרבולה:

אחד המאפיינים של המשפחה הפרמטרית הזו הוא שעבור נקודות החיתוך של כל ישר במשפחה עם הצירים $(x_1, 0)$ ו- $(0, y_1)$ מתקיים $x_1 \cdot y_1 = 1$ כי:

$$y = m \cdot x - \sqrt{m}$$

$$x=0 \rightarrow y_1 = \sqrt{m}$$

$$y=0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

עכשיו גם ברור למה ההיפרבולה, שגרפית נראתה מועמדת מבטיחה, לא התאימה אלגברית ל'גורף' שבו נדרש $x_1 + y_1 = a$.

זו ההזדמנות להציע, לקורא או/ו לתלמידיו, חקירת המשך של המקרה: $x_1 \cdot y_1 = k$.

השורה האחרונה של חקירת המשך ידועה, זו ההיפרבולה, אך ההצעה מתייחסת לדרך החקירה, כלומר למשוואה הדיפרנציאלית המתאימה ולפתרונותיה.

סיכום

לקראת כתיבת הסיכום לסיפור החקירה צדו עיניי דברים שכתבתי בפרק הראשון המתייחסים לתהליך העבודה של התלמידות:

'בשלב זה ניסיתי, כמנחה, להוביל מהלך של הוכחת הטענות הני"ל. לא היה יחד להצעת, התלמידות התקדמו בעבודתן ואני נשארת לבד עם משימת ניסוח והוכחה של טענות, שלדברן, ירואים מיד שזה נכון תמיד.'