

הנושא: לא על החשבון הדיפרנציאלי לבדו

הוכן ע"י: אריה רוקח.

תקציר: במאמר מובא פתרון לבעיה הבאה: במעגל נתון, יש למצוא את המשולש החסום בעל השטח המקסימלי. מוצג פתרון לבעיה בדרך גיאומטרית, ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי. דרך הפתרון המוצעת מורחבת לבעיה כללית יותר, המתייחסת למצולע חסום במעגל בעל שטח מקסימלי, בעיה שפתרונה בדרך השגרתית מייגע.

מילות מפתח: בעיית קיצון, בעיית מקסימום, גיאומטריה המישור, הנדסת המישור, גיאומטריה, הנדסה, מעגל, משולש חסום במעגל, מצולע חסום במעגל, שטח מקסימלי, זווית מרכזית.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 29, סתיו תשס"ג, 2002, עמודים 4-9.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

חקירה מתמטית

לא על החשבון הדיפרנציאלי לבדו



אריה רוקח
קדומים

מאמר זה מוקדש לבתי תחיה, אשר נקטפה מאיתנו בתאונת דרכים, והיא אך בת שבע עשרה שנה. יהי זכרה ברוך.

הקדמה

המשולש ABC חסום במעגל נתון. האם אפשר למצוא משולש אחר, החסום באותו מעגל, הגדול ממנו בשטחו? אין קל מזה. נבנה אנך אמצעי ל- AB ונסמן את נקודת החיתוך שלו עם המעגל ב- D . כיוון שאורך הגובה של המשולש ADB , היוצא מקדקוד D ופוגש את הצלע AB , גדול מאורך הגובה של המשולש ACB מ- C אל הצלע AB , המשותפת לשני המשולשים, הרי שמצאנו משולש שווה-שוקיים ששטחו גדול מהשטח של המשולש המקורי. האם נוכל למצוא משולש אחר, החסום באותו מעגל, הגדול בשטחו מהמשולש החדש? שוב, אין קל מזה. נסתכל על הצלע AD במשולש ADB , ונחזור על התהליך. כלומר נבנה משולש שווה שוקיים חדש שבסיסו AD . בכל שלב בתהליך מקבלים משולש הגדול בשטחו מהמשולש הקודם.

נניח כעת, שידוע לנו שיש משולש החסום במעגל, והוא בעל השטח הגדול ביותר.

טענה: המשולש בעל השטח הגדול ביותר החסום במעגל נתון הוא משולש שווה-צלעות.

הוכחה (בדרך השלילה): נניח שמשולש מסוים, החסום במעגל הנתון, הוא בעל השטח הגדול ביותר, והוא אינו שווה-צלעות. אם כך, שתיים מצלעותיו אינן שוות. נבחר בתור בסיס את הצלע השלישית, ונפעיל את התהליך שלעיל. (להלן: 'התהליך הבסיסי'). על פי אותו תהליך, נקבל משולש חדש הגדול בשטחו משטח המשולש המקורי, וזו סתירה.

מסקנה: אם ידוע שיש משולש בעל שטח מקסימלי, הוא חייב להיות משולש שווה צלעות.

שאלה: ואם לא ידוע שיש משולש כזה, האם נוכל, ללא מושגי גבול וחשבון דיפרנציאלי להגיע לכך?

נתונה הבעיה הבאה: במעגל נתון, יש למצוא את המשולש החסום בעל השטח המקסימלי. בעיה זו ניתנת לפתרון בעזרת חשבון דיפרנציאלי. מניחים שהמשולש שווה שוקיים (אחר כך נראה מדוע), ומגדירים את זווית הראש כמשתנה הגזירה. בונים את פונקציית השטח, וגוזרים. מקבלים כי זווית הראש של המשולש המקסימלי היא 60° , ומכאן גם שתי הזוויות הנותרות שוות לה. המשולש המתקבל הוא משולש שווה צלעות, וזה אולי צפוי, שכן המשולש שווה הצלעות הוא בעל סימטריה מקסימלית, וזה בעל השטח המקסימלי אינו יכול להיות 'סתם' משולש.

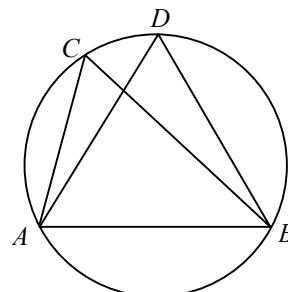
האם אפשר להגיע לתוצאה זו ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי? במאמר זה נראה דרך כזו.

ומה לגבי מצולעים בעלי מספר כלשהו של צלעות? האם גם לגביהם הטכניקה שתוצג, תקפה? אם כן, זה ממש כדאי, כי בשיטות רגילות של חשבון דיפרנציאלי לא קל לפתור את הבעיה!

ובכן, התשובה חיובית, ולא זו בלבד, אלא שמציאת המצולעים הופכת למשחק מתמטי משעשע. אז, הבה נצא לדרך, ונבחן תחילה את מקרה המשולש.

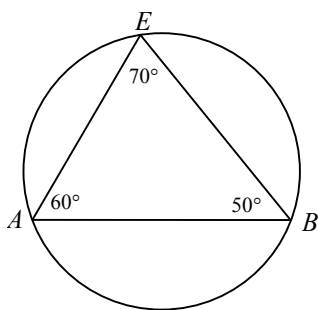
המשולש-תהליך בסיסי

נתבונן בציור 1:



ציור 1

שטחו של משולש זה, כאמור, גדול יותר משטח המשולש ABC , אך אם נמשיך כך לא נגיע למשולש שווה צלעות. אולם, עדיין יש תקווה. נשים לב כי במעבר מהמשולש ABC המקורי אל המשולש ABD מידת הזווית A קטנה מ- 65° ל- 55° . בעצם, כדי להגדיל את שטח המשולש, מספיק היה להקטין את מידת הזווית A ל- 60° בלבד, שהרי כל תנועה לכיוון הקדקוד D האופטימלי מגדילה את שטח המשולש. משולש כזה AEB מופיע בציור 4:



ציור 4

כעת, נותר אך שלב אחד בלבד: נסתכל על הצלע EB , ונפעיל עליה את 'התהליך הבסיסי'. נגיע למשולש בו כל הזוויות הן בנות 60° , משולש שווה-צלעות! אם התהליך נכשל עבור צלע מסויימת, מנסים את שאר הצלעות. סיבת כשלון עבור צלע מסויימת היא שממוצע הזוויות שלידה קטן מ- 60° . לא נתעכב כדי להוכיח כי התהליך עובד עבור כל משולש, כי בכל מקרה נצטרך לערוך שינויים בתהליך הבסיסי המשופר כאשר נעבור למרובע חסום, ולמצולעים בעלי מספר אחר של צלעות. שם נקפיד על הפורמליות.

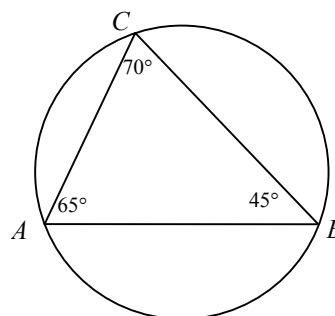
המרובע - תהליך בסיסי

כאשר עוברים למרובע, אי אפשר עוד להתייחס לזוויות ההיקפיות, שכן הן אינן קובעות את המרובע באופן חד ערכי (ר' מאמרי: 'על דמיון מצולעים החסומים במעגל', עלי' 24, מרץ 1999). במקרה זה צריך להתייחס אל הזוויות המרכזיות, הקובעות באופן חד ערכי את המרובע. כך גם ננהג כשנטפל במצולעים בעלי מספר אחר של צלעות.

הפרק הבא מראה, שאכן, ניתן להגיע לתשובה כזו ללא שימוש במושגים אלה. נזכור איפוא כי מהות 'התהליך הבסיסי' היא בניית משולש בעל שטח גדול יותר ממשולש נתון, דרך שמירה של צלע, קרי שני קדקודים, וסימון קדקוד שלישי חדש באמצע הקשת הנשענת על אותה צלע.

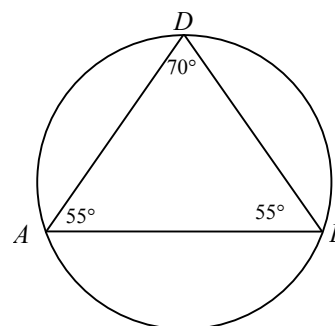
המשולש - תהליך בסיסי משופר

התהליך הבסיסי המופעל על משולש סתמי (אין בו זווית בת 60°), אמנם מגדיל את שטחו בכל שלב, אולם לעולם לא יביא אותנו למשולש שווה צלעות. המידות של הזוויות אמנם תשאפנה ל- 60° כל אחת, אבל התהליך אינסופי ואינו משיג את גבולו. אנחנו מעוניינים בתהליך סופי המתחיל במשולש כלשהו, שאינו שווה-צלעות, מגדיל את שטחו, או לפחות אינו מקטין אותו, ונעצר לבסוף במשולש שווה-צלעות. תהליך כזה, אם קיים, מוכיח שאכן המשולש שווה-הצלעות הוא בעל השטח המקסימלי, כיוון שמכל משולש ניתן להגיע אליו על ידי טרנספורמציות המגדילות את שטחו של המשולש בכל שלב. נכנה תהליך זה בשם 'תהליך בסיסי משופר'. נתבונן בציור 2:

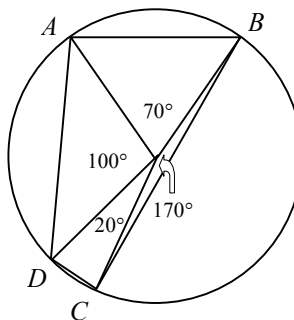


ציור 2

אם נפעיל את התהליך הבסיסי על הצלע AB , נגיע בשלב הראשון למשולש הבא:



ציור 3



ציור 5

הפעלת 'התהליך הבסיסי' על המרובע, מתבצעת על ידי הפעלת התהליך הבסיסי על משולש שנוצר מצלעות סמוכות ואלכסון. למשל, מפעילים את התהליך הבסיסי על המשולש BAD תוך שמירת הצלע, כלומר האלכסון BD . כלומר, מגדילים את שטח המשולש על ידי בניית קדקוד חדש A' באמצע הקשת DB . באופן זה מגדילים לא רק את שטחו של המשולש BAD , אלא גם את השטח של המרובע כולו. אחר כך חוזרים על התהליך עבור האלכסון השני, וחוזר חלילה. ההנחה שלנו היא שהמרובעים המתקבלים בכל שלב 'מתכנסים' לקראת המרובע המשוכלל, הלא הוא הריבוע. אך, כאמור, זהו תהליך אינסופי, שאינו מתכנס במדויק לזוויות מרכזיות (קשתות) בנות 90° (הזוויות המרכזיות של ריבוע).

נשים לב כי המרובע $A'DOB$ (מרכז המעגל) הוא מעויין, על כן $\angle DOA' = \angle A'OB$, כלומר, כל אחת מהן שווה ל- $85^\circ = (100^\circ + 70^\circ) \div 2$. ובהכללה: בכל שלב אנו בונים, לכל זוג זוויות מרכזיות 'שכנות' (קשתות שכנות), קדקוד חדש הנמצא באמצע הקשת המורכבת משתי הקשתות.

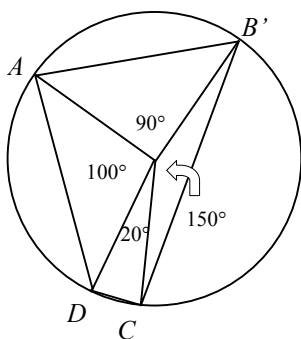
המרובע - תהליך בסיסי משופר

התהליך הבסיסי משנה את המרובע כך 'שיתקרב' למרובע המשוכלל, קרי לריבוע, שכן אנו מניחים שהמרובע בעל השטח המקסימלי הוא ריבוע, כלומר מרובע בעל ארבע זוויות מרכזיות בנות 90° כל אחת. הטוב ביותר היה לו היינו מצליחים לבנות תהליך כזה שמשיג שתי מטרות בכל שלב:

- בכל שלב נוצר מרובע בעל שטח שאינו קטן משטחו של המרובע שבשלב הקודם.

- בכל שלב בו גדל השטח (ולא רק נשמר) מתקבלת זווית מרכזית נוספת בת 90° .

כדי לבנות תהליך שכזה, 'תהליך בסיסי משופר', נתבונן שוב בציור 5. ניקח כדוגמא את זוג הזוויות שמידותיהן 70° ו- 170° . הפעלת התהליך הבסיסי על האלכסון AC תוביל לבניית קדקוד חדש שייצור זוג זוויות מרכזיות בנות $120^\circ = (70^\circ + 170^\circ) \div 2$ כל אחת. ואולם, זווית מרכזית שמידתה 90° , הקטנה מזווית בת 120° 'ונמצאת בדרך' בין 70° ל- 120° , גם היא מגדילה את שטח המרובע על ידי הגדלת שטח המשולש ABC , אם כי לא באופן מקסימלי. תהליך זה מודגם בציור 6.



ציור 6

שטחו של המרובע החדש $AB'CD$ גדול משטח המרובע המקורי (כי $S_{AB'C} > S_{ABC}$), עקב הפעלת התהליך הבסיסי המשופר, וכבר יש במרובע שנוצר זווית מרכזית אחת בת 90° .

נשאלת השאלה: בהינתן זוג זוויות מרכזיות שכנות, באיזה תנאי ניתן להפעיל עליהן תהליך בסיסי משופר (שמגדיל את השטח של המרובע)? כדי לענות על כך נבחין בין שלושה מקרים.

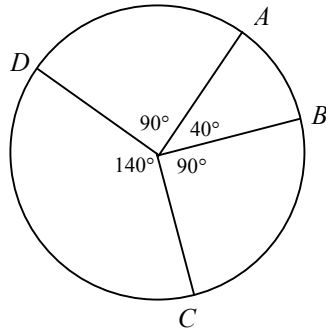
מקרה א: כל אחת משתי הזוויות גדולה מ- 90° .

במקרה זה, אי אפשר להפעיל את התהליך הבסיסי המשופר, כי המידה הממוצעת של שתי הזוויות גדולה מ- 90° . במצב זה, יצירת זווית מרכזית בת 90° עשויה להקטין את השטח במקום להגדילו.

מקרה ב: כל אחת משתי הזוויות קטנה מ- 90° .

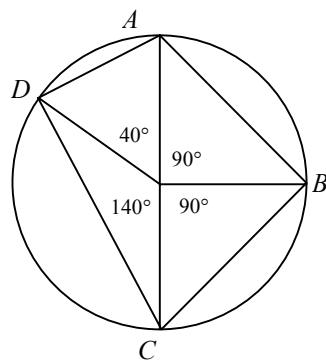
גם במקרה זה לא ניתן להפעיל את התהליך הבסיסי המשופר. כי: הקדקוד החדש שיתקבל בתהליך לא

הגענו למטרתנו הנכספת! ריבוע מול עינינו! יצאנו ממרובע כלשהו, 'ובתהליך בסיסי משופר' הגדלנו את השטח עד שהגענו למרובע המשוכלל - הריבוע. האם התהליך שתיארנו 'יעבוד' תמיד? המקרה בציר 9 מטיל צל של ספק על ישימות התהליך לכל מקרה.



ציר 9

בעיה! על אלו זוויות שכנות נפעיל את התהליך? הזוויות הבאות בחשבון הן שכנות של זוויות בנות 90° , והרי לא נקלקל את הזוויות בנות 90° על מנת לתקן אחרות! אז מה עושים? מסתבר שצריך לדעת לבחור את השכנים הנכונים... אילו רק יכולנו להחליף בין השכנים... רגע! מהי המשמעות של החלפה בין זוויות מרכזיות? כיצד משפיעה החלפה כזו על שטח של המרובע המקורי? נחליף בין הזוויות שמידותיהן 40° ו- 90° , ונתבונן בציר 10.



ציר 10

טענה: שטח המרובע $A'BCD$ שווה לשטח המרובע $ABCD$.

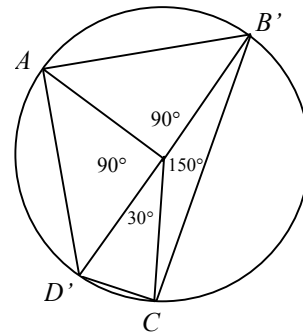
נמצא 'בדרך' אל אמצע הקשת – באופן שהשטח גדל – אלא אחריו, כך שייטכן שהשטח יקטן! **מקרה ג:** אחת הזוויות, α , גדולה מ- 90° , והשניה, β , קטנה מ- 90° .

מסתבר, למזלנו (!), שבמקרה זה הפעלת התהליך הבסיסי המשופר כדאית. גם כאן יש להבחין בין שני מקרים:

מקרה 11: ממוצע הזוויות גדול מ- 90° . במקרה זה נגדיל את β ל- 90° . הקדקוד החדש שיתקבל 'נמצא בדרך' אל אמצע הקשת המקורית, על כן השטח גדל.

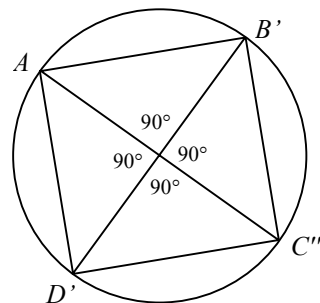
מקרה 12: ממוצע הזוויות אינו גדול מ- 90° . במקרה זה נקטין את α ל- 90° . שוב, הקדקוד החדש המתקבל 'נמצא בדרך' אל אמצע הקשת המקורית, ושוב השטח גדל.

נפעיל במרובע $AB'CD$ שבציר 6 את התהליך על זוג הזוויות בנות 100° ו- 20° . זהו מקרה 12. נקבל את ציר 7:



ציר 7

כעת נפעיל שוב את התהליך הבסיסי המשופר על זוג הזוויות בנות 30° ו- 150° . זהו מקרה 12. נקבל את המרובע שבציר 8.



ציר 8

הוכחה: נסתכל על המרובע כאוסף של ארבעה משולשים בעלי קדקוד משותף במרכז המעגל O . החלפה בין זוגות של זוויות מרכזיות שכנות מחליפה בין מקומם של שני משולשים כאלה ולא משנה את שטחם, כך שגם שטח המרובע נשאר קבוע.

כלומר: לתהליך הבסיסי המשופר התוספה טרנספורמציה רבת ערך: החלפה בין זוגות של זוויות מרכזיות שכנות. מכאן נובע: ניתן להפעיל את התהליך הזה מספר רב של פעמים, ולכן: ניתן להחליף בין כל שתי זוויות מרכזיות, מבלי לפגוע בשטח המרובע, כלומר החלפת המיקום בין שתי זוויות מרכזיות היא טרנספורמציה משמרת שטח.

כעת ברור לנו שהפעלת התהליך הבסיסי המשופר על כל מרובע מסתיימת ביצירת ריבוע.

אך האם לא ייתכן כי קיים מרובע אחר, שאינו ריבוע, החסום במעגל ולו שטח גדול יותר?

טענה: מכל המרובעים החסומים במעגל, הריבוע הוא המרובע בעל השטח הגדול ביותר.

הוכחה (בדרך השלילה): נניח שהמרובע בעל השטח הגדול ביותר אינו ריבוע. אם כך, יש בו שתי צלעות סמוכות שאינן שוות באורכן. נפעיל את התהליך הבסיסי המשופר על המשולש הנוצר על ידי שתי צלעות אלה ועל ידי האלכסון המתאים, ונגיע למרובע בעל שטח גדול יותר. זאת בסתירה להנחת השלילה.

מ.ש.ל.

הנה כמובטח הגענו למסקנה בדבר מרובעים ומשולשים חסומים במעגל בעלי שטח מקסימלי בשיטות גיאומטריות אלמנטריות.

יתר על כן, השיטה ניתנת ליישום באופן זהה גם על מצולעים בעלי מספר אחר של צלעות. ומכאן נוכל לטעון:

מבין כל המצולעים בעלי מספר נתון של צלעות החסומים במעגל, המצולע המשוכלל הוא בעל השטח הגדול ביותר.

תהליך בסיסי משופר עבור מצולע כלשהו

הבה נגדיר תהליך מסודר בעזרתו נגיע ממצולע כלשהו אל המצולע המשוכלל, תוך שמירה או הגדלה של

השטח:

- יש לחשב את הזווית המרכזית של המצולע המשוכלל. נסמן את מידתה ב- α .
- לולאה:
 - יש למצוא שתי זוויות מרכזיות, בין אלו השונות מ- α , שמידתה של האחת גדולה מ- α והשניה קטנה מ- α .
 - **טענה:** בכל קבוצת מספרים לא הומוגנית שהממוצע שלה הוא α , קיים זוג מספרים כאלה שהאחד גדול מ- α והשני קטן מ- α . הקוראים מוזמנים להוכיח טענה זו.
 - יש לבצע החלפות בין מקומות של זוויות מרכזיות כך ששתי הזוויות שנמצאו בשלב קודם תהיינה 'שכנות'.
 - יש לבצע את התהליך הבסיסי המשופר עבור זוג זוויות אלו, כך שתוצאת התהליך תהיה זוג חדש של זוויות שאחת מהן היא בעלת מידה α .
 - יש להזיז את הזווית החדשה שמידתה α שהתקבלה בשלב הקודם, כך 'שתשכון' בסמוך לקבוצה קיימת של זוויות שמידתן α שנבנו בביצוע קודם של הלולאה.
 - אם נשארו עוד זוויות מרכזיות השונות מ- α , יש לבצע את הלולאה שוב.
- אחרת - הגענו למחוז חפצנו: קיבלנו מצולע משוכלל בעל זוויות מרכזיות השוות כולן ל- α .

סיכום ומוסר השכל בצידו

כלל ידוע הוא: 'האויב של הטוב הוא הטוב ביותר'. ואכן נוכחנו כי כך הדבר גם במאמר זה. כיצד? התהליך הבסיסי הרגיל, אמור להיות הטוב ביותר, שכן כל שלב בו מגדיל שטח של משולש שהוא חלקי למצולע באופן המקסימלי. אולם, התהליך אינסופי, השואף אמנם ליצירת מצולע משוכלל, אך לעולם אינו מגיע אליו. לעומת זאת, התהליך הבסיסי המשופר לא מגדיל בכל שלב את שטח המצולע באופן המקסימלי, אך למרות זאת בסופו של דבר:

- התהליך נעצר
- המצולע המתקבל הוא 'באורח פלא' בעל השטח המקסימלי!!!

בשולי המאמר

למי שצלח את המאמר עד סופו, יתכן וגם הסיפור העומד מאחוריו יעניין אותו.

את המאמר הראשוני כתבתי כשהייתי בן שש-עשרה, ושלחתי לעורך "גליונות מתמטיקה", פרופסור גיליס ז"ל. המאמר לא התפרסם, וגם לא קיבלתי עליו כל תגובה. טוב שהמאמר לא התפרסם, כי הוא התבסס על התהליך הבסיסי האינסופי, ולא על התהליך הבסיסי המשופר שהובא כאן.

כעבור שנים, פגשתי את פרופסור גיליס והזכרתי לו מאמר זה. הוא הופתע לחלוטין, והסתבר כי לא קיבל אותו מעולם. בינתיים, בעקבות הרהורים במשך השנים,

נולד מאמר אחר, הלא הוא "על דמיון מצולעים החסומים במעגל", על"ה 24, מרץ 1999. בלב המאמר התמקדות בזוויות מרכזיות במקום בזוויות היקפיות. התבוננות זאת הביאה למסקנות ביחס להבדלים בין מצולעים בעלי מספר זוגי של צלעות, לבין מצולעים בעלי מספר איזוגי של צלעות.

ועדיין, נשארה פתוחה שאלת הוכחת הטענה המרכזית של מאמר זה.

והנה, לפני זמן קצר, נאלצתי לצאת ממשרדי כדי שיוכלו לנקותו. בפרק זמן זה עלו במוחי הרעיונות שהובילו להגדרת התהליך הבסיסי המשופר...
אכן, נפלאות הן דרכי המתמטיקה...