

הנושא: הערה למאמר של יעקב קופיץ

הוכן ע"י: מאיר וון – רייק.

תקציר: בחומר מובאת תגובה למאמר של יעקב קופיץ: "הערות להוראת הפונקציה המעריכית", שהתפרסם בעל"ה 24 (אדר תשנ"ט, מרץ 1999). הכותב מוכיח את המונוטוניות של שתי סדרות (אחת מונוטונית עולה והשנייה מונוטונית יורדת), תוך שימוש באי-שוויון ברנולי.

מילות מפתח: אלגברה, סדרות, סדרה כללית, סדרה מונוטונית עולה, סדרה מונוטונית יורדת, אי שוויון, אי – שוויון ברנולי.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 29, סתיו תשס"ג, 2002, עמודים 67-68.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

הערה למאמר של יעקב קופיץ



מאיר וון-רייק

המרכז ללימודים קדם אקדמיים, האוניברסיטה העברית, ירושלים

ובכן עלינו להוכיח כי:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \end{aligned}$$

כדי להוכיח כי: $\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}$ נבין את אגף

שמאל לשימוש באי-שוויון ברנולי:

$$\begin{aligned} \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} &= \frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+1} - \frac{1}{n^2+2n+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

לפי אי-שוויון ברנולי נקבל:

$$\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}$$

נותר על-כן להראות כי:

$$1 - \frac{n}{(n+1)^2} > \frac{n+1}{n+2}$$

אולם:

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

לכן נותר להראות כי:

$$\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$$

במאמר 'הערות להוראת הפונקציה המעריכית' שהתפרסם בעל'ה 24, מרץ 1999, מוכיח יעקב קופיץ

שהסדרה $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ואילו הסדרה

$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת. ההוכחה נשענת על

אי-שוויונים שמקורם אצל O. Stolz and J.A. Gmeiner, *Theoretische Arithmetik*, II Abteilung, Leipzig, 1915.

אי-שוויונים אלה הם למעשה הכללה של אי-שוויון בסיסי, המכונה אי-שוויון ברנולי (Bernoulli):

כל x ממשי, המקיים: $x \geq -1$, ולכל n טבעי מתקיים:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

אי-שוויון זה הוא חזק עבור: $x > -1$, $x \neq 0$, $n \geq 2$.

לא קשה להוכיח את אי-שוויון ברנולי בעזרת אינדוקציה מתמטית.

בהערה זו אוכיח את המונוטוניות של הסדרות

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty} \text{ ו- } \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} \text{ בעזרת אי-שוויון}$$

ברנולי בלבד.

טענה 1: הסדרה שהאיבר הכללי שלה נתון על-ידי

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ מונוטונית עולה.}$$

הוכחה: נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n < a_{n+1}$

$$\text{כלומר: } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

כלומר צ"ל:

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$$

אולם לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} < 1$$

מ.ש.ל.

בדרך דומה מוכיחים גם את הטענה הבאה:

טענה 2: הסדרה שהאיבר הכללי שלה נתון על-ידי

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

הנוסחה: מונוטונית יורדת.

הוכחה: נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n > a_{n+1}$

כלומר:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

עלינו להוכיח כי:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-n-1} > \frac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} > \frac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} > \frac{n+1+1}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

שוב נציג את בסיס החזקה כך שיתאים

לשימוש באי-שוויון ברנולי:

$$\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n} + \frac{1}{n^2 + 2n} = 1 + \frac{1}{n^2 + 2n}$$

לפי אי-שוויון ברנולי מתקיים:

$$\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}$$

(אין שוויון כי $n+1 > 2$)

נותר להראות כי:

$$1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

כלומר יש להוכיח כי:

$$\frac{n+1}{n^2 + 2n} > \frac{1}{n+1}$$

או:

$$\frac{(n+1)^2}{n^2 + 2n} > 1$$

אולם אי-שוויון זה נכון לכל $n \in \mathbb{N}$ כי:

$$\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = 1 + \frac{1}{n^2 + 2n} > 1$$

מ.ש.ל.

כפי שראינו, השימוש באי-שוויון ברנולי חסך את הצורך

$$\text{להתייחס לסדרה} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n_{n=1}^{\infty}$$

גם את המונוטוניות העולה של הסדרה $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n_{n=1}^{\infty}$

ניתן להוכיח בדרך דומה, או, כמו שקופץ קובע במאמרו, שעבור $n \geq 2$ מתקיים:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n/(n-1)}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}$$

כלומר הסדרה $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ זהה לסדרת ההפכיים של

הסדרה המונוטונית היורדת $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, עבור $n \geq 2$, ולכן היא מונוטונית עולה.