הנושא: **הפרבולה כצורה גיאומטרית**

הוכן ע״י: חמוטל דוד.

תקציר: המאמר פורש מעט מהתכונות הגיאומטריות של פרבולה, שאינה בהכרח גרף של פונקציה ריבועית ותומך בפיתוח דימוי מושג גיאומטרי לפרבולה. תלמידינו מכירים את הפרבולה בעיקר, אם לא רק, דרך העיסוק בפתרון משוואות ריבועיות, או בחקירת הגרפים של הפונקציות הריבועיות. בעזרת חלק מהתכונות הגיאומטריות המובאות במאמר, ניתן בקלות להסיק, כי עקום המעטפת של ׳הקישוט׳ שתואר במאמרה של לאה דולב (על״ה 27) ושל ׳קישוטים׳ נוספים הדומים לו, הוא פרבולה.

מילות מפתח: אלגברה, פונקציות, גיאומטריה אנליטית, פרבולה, מקום גיאומטרי, דימוי מושג, הוכחה, מחשב.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 29, סתיו תשס״ג, 2002, עמודים 22-29.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

הפרבולה כצורה גיאומטרית

חמוטל דוד
הטכניון חיפה(*)

בגליון סתיו תשס״ב של על״ה (27) התפרסם מאמרה של לאה דולב, המספר את סיפורה של חקירה מתמטית שביצעו שתי תלמידות, הכותבת ואביה, אברהם בלוך. החקירה עסקה באפיון צורתו של עקום. כלי החקירה בהם השתמשו החוקרים נלקחו מתחומי התוכן הבאים: אלגברה, גיאומטריה אנליטית ומשוואות דיפרנציאליות. תוצאת החקירה הייתה, אולי, מפתיעה. העקום, שהתקבל כעקום מעטפת של ישרים ששורטטו בתוך זווית, הוא פרבולה.

בתקופה בה קראתי את מאמרה של לאה דולב עסקתי בעיצוב סדנה בנושא התכונות הגיאומטריות של פרבולה. לדעתי, חשוב לפתח את הדמוי הגיאומטרי של הפרבולה, שכן תלמידינו מכירים אותה בעיקר, אם לא רק, דרך העיסוק בפתרון משוואות ריבועיות, או בחקירת הגרפים של הפונקציות הריבועיות. כהמשך לגישה זו חיפשתי דרך להצדיק את הטענה שצורתו הגיאומטרית של 'הקישוט' היא פרבולה, בדרך שאינה אנליטית, אלא גיאומטרית.

המאמר שלפניכם פורש מעט מהתכונות הגיאומטריות של פרבולה, שאינה בהכרח גרף של פונקציה ריבועית. בעזרת חלק מהתכונות האלה, ניתן בקלות להסיק, כי עקום המעטפת של 'הקישוט' שתואר במאמרה של לאה דולב ושל 'קישוטים' נוספים הדומים לו, הוא פרבולה.

הקדמה

הפרבולה נחקרה לראשונה במאה הרביעית לפני הספירה על ידי מנכמוס כאחד מחתכי החרוט (חתכים קוניים). אחריו עסקו בחקר הנושא: אפולוניוס (220 לפסה״נ), ארכימדס (212 לפסה״נ) ועוד רבים אחרים. הפרבולה היא עקום החיתוך של חרוט אינסופי עם מישור מקביל לקו היוצר שלו. המעגל, האליפסה וההיפרבולה הם עקומי חיתוך של חרוט אינסופי עם מישורים אחרים. המעגל מתקבל מחיתוך חרוט עם מישור המאונך לציר הסימטריה שלו; האליפסה היא עקום סגור המתקבל מחיתוך חרוט עם מישור שאינו מאונך ואינו מקביל לציר הסימטריה; ואילו ההיפרבולה היא עקום פתוח המתקבל מחיתוך חרוט עם מישור שאינו מאונך לציר הסימטריה שלו, אך יכול להיות מקביל או לא מקביל לו!

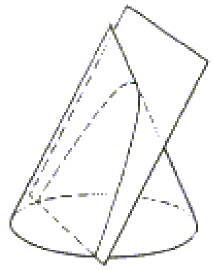
תכנית הלימודים בבית הספר העל יסודי נוגעת בחתכי החרוט במפורש רק ברמה של 5 יח״ל במסגרת הגיאומטריה האנליטית. הפרבולה, מלווה את התלמידים בכל רמות הלימוד כבר מחטיבת-הביניים, אולם שמה מוזכר בהקשר של פונקציות ריבועיות בלבד. הקשר זה מבסס *תפיסה מוטעית, על-פיה המונח פרבולה הוא שם נרדף לגרף של פונקציה ריבועית*. על-פי תפיסה שגויה זו, אין פרבולות שאינן גרפים של פונקציות ריבועיות. יתר על כן, נשמעת לא מעט ההתייחסות אל גרפים של פונקציות שונות שאינן ריבועיות, כאילו הם פרבולות או שחלקים מהם הם כאלה. למעשה, הגרפים של הפונקציות הריבועיות מהווים תת-קבוצה של קבוצת הפרבולות.

הגדרת הפרבולה

לפרבולה שתי הגדרות גיאומטריות מקובלות:

- מקום גיאומטרי של נקודות, המרוחקות מרחקים שווים מנקודה נתונה (מוקד) ומישר נתון (מדריך).
- עקום המהווה את השפה של חתך חרוט עם מישור המקביל לקו היוצר של החרוט. (איור 1).

(*) תודתי לעטרה שריקי אשר הייתה שותפתי לתהליך היצירה והעיבוד של חלק מהתכנים המופיעים במאמר זה.



איור 1 – הפרבולה כחתך חרוט

להוכחת השקילות של ההגדרות ר' [5]. נצדיק להלן את הזכות שלנו לכנות גרפים של פונקציות ריבועיות בשם 'פרבולה'.

טענה: הגרף של פונקציה ריבועית מהצורה:
$y = ax^2 + bx + c \quad ; \quad a,b,c \in \Re$ הוא פרבולה.

הוכחה: נסתכל בפונקציה:
$y = ax^2 \quad ; \quad a \in \Re \quad , \quad b = 0 \quad , \quad c = 0$

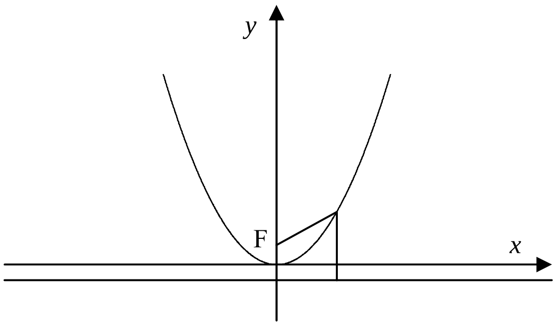
כדי להוכיח שהגרף שלה הוא פרבולה, עלינו להצביע על נקודה המתאימה להיות המוקד שלה ועל ישר המתאים להיות המדריך שלה ולהראות, כי כל אחת מנקודות הגרף נמצאת במרחקים שווים מהמוקד ומהמדריך.

נחפש מוקד ומדריך. תכונת הסימטריה של הגרף ביחס לצירים ידועה. על סמך תכונה זו נוכל לנחש, ניחוש חכם, כי המוקד ימצא על ציר ה-y ואילו המדריך יהיה ישר המקביל לציר ה-x. נסמן את המוקד ב- $F(0, y_F)$. כדי שקדקוד הפרבולה ימצא במרחקים שווים מהמוקד ומהמדריך משוואת המדריך תהיה: $y = -y_F$.

עבור כל נקודה (x, ax^2) על הגרף נדרוש את שוויון המרחקים. אם נקבל שערכו של שיעור ה-y של המוקד אינו תלוי בנקודה שבחרנו, אלא רק בפרמטר a נוכל לטעון בבטחון כי הניחוש שלנו היה מוצלח וכי הגרף של הפונקציה הוא אכן בעל צורה של פרבולה.

ואמנם:

$$\underbrace{(x-0)^2 + (ax^2 - y_F)^2}_{\text{ריבוע המרחק מהמוקד}} = \underbrace{(ax^2 + y_F)^2}_{\text{ריבוע המרחק מהמדריך}}$$



שרטוט 1 - נקודות הגרף של פונקציה ריבועית מקיימות את התנאי הנדרש בהגדרת הפרבולה כמקום גיאומטרי

פיתוח התבנית מוביל לקשר: $y_F = \frac{1}{4a}$.

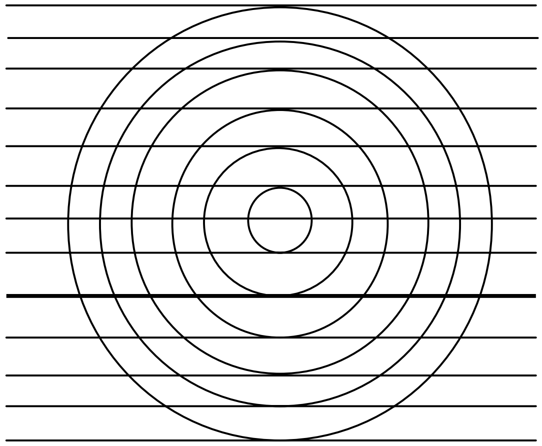
ומכאן שהגרף של הפונקציה $y = ax^2$ הוא אכן פרבולה. כל גרף של פונקציה מהצורה:
$y = ax^2 + bx + c \quad ; \quad a,b,c \in \Re$
מתקבל מהזזות של גרף הפונקציה $y = ax^2$, במקביל לצירים, ולכן גם הוא פרבולה.
מ.ש.ל.

פעילויות 'ליצירת' פרבולות

לאחר שהשתכנענו, כי הגרפים של הפונקציות הריבועיות הם אכן פרבולות, תוך מתן תשומת לב לכך שהן מתקבלות בדרך אנליטית, כלומר כגרפים של פונקציות, נחפש דרכים גיאומטריות 'ליצירת' פרבולות. להלן קבוצת פעילויות, המזמינה את הקורא (ואת תלמידיו) 'ליצור' פרבולות.

פעילות א (ללא עזרת מחשב)

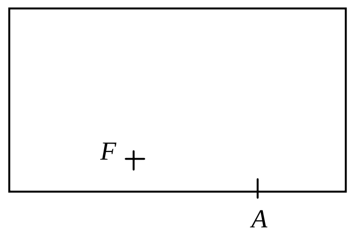
בשרטוט 2 שלפניכם מופיעים מעגלים בעלי מרכז משותף וישרים מקבילים. המרחק בין כל שני ישרים סמוכים הוא יחידה אחת וכל ישר משיק למעגל.
מצאו בשרטוט נקודות המונחות על פרבולה משותפת.
רמז: היעזרו בישר המודגש ובמרכז המשותף.



שרטוט 2 - ישרים ומעגלים

פעילות ב (ללא עזרת מחשב)

על דף נייר מלבני סמנו נקודה F קרוב לאחת משפתיו. סמנו נקודה כלשהי A על השפה הקרובה לנקודה F שסימנתם, כמתואר בשרטוט 3.
קפלו את הדף, כך שהנקודה A תתלכד עם הנקודה F.
הדקו את הקפל ופיתחו אותו.
חיזרו על שני השלבים האחרונים עם נקודות אקראיות נוספות שתבחרו על אותה שפה של הדף.
הביטו בעקבות הקפלים שיצרתם ובחלק הדף שאין בו עקבות כאלה. איזה מקום תוחם, לדעתכם, את השטח שלא נראים בו קפלים?



שרטוט 3

פעילות ג (בעזרת מחשב)

שרטטו ישר AB כלשהו על צג המחשב.
סמנו נקודה C כלשהי מחוץ לישר.
סמנו נקודה D כלשהי על הישר AB.
שרטטו את הקטע CD.
העבירו אנך אמצעי לקטע CD.
העבירו מנקודה D אנך לישר AB וסמנו את נקודת החיתוך שלו עם האנך האמצעי.

הפעילו בתפריט את האפשרות 'עקבות' על נקודת החיתוך שסימנתם בסעיף הקודם וגררו את הנקודה D לאורך הישר AB.
הביטו בעקבות שמשאירה נקודת החיתוך של שני האנכים – מהו, לדעתכם, המקום הנוצר?

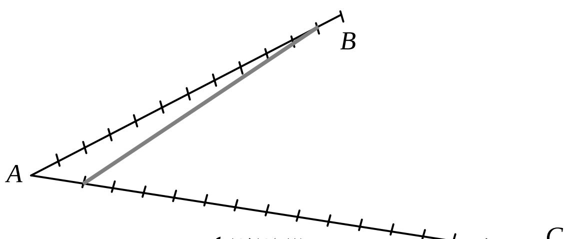
פעילות ד (בעזרת/ ללא עזרת מחשב)

שרטטו ישר AB ונקודה C שאינה עליו.
העבירו דרך C מעגל שישיק לישר.
סמנו את מרכז המעגל.
חיזרו על שני השלבים האחרונים, כלומר צרו מעגלים נוספים, המשיקים לישר ועוברים בנקודה C וסמנו את מרכזיהם.
הביטו במרכזי המעגלים שסימנתם. מהו, לדעתכם, המקום עליו הם מונחים?

פעילות ה (בעזרת/ללא עזרת מחשב)

שרטטו שני קטעים נחתכים AB ו- AC (תוכלו ליצור זוויות שונות בין הקטעים).
חלקו את הקטעים AB ו- AC למספר שווה n של חלקים, על ידי סימון $n-1$ נקודות על כל אחד מהקטעים.
חברו בקטע את הנקודה שעל הקטע AB, הקרובה ביותר ל- B , עם הנקודה על AC הקרובה ביותר ל- A. (היעזרו בשרטוט 4).
חברו בקטע את הנקודה הבאה על AB הקרובה ביותר ל- B עם הנקודה על AC הקרובה ביותר לנקודה שכבר חיברתם על AC.
התקדמו כך עד שתחברו בקטע את הנקודה הקרובה ביותר ל- C עם הנקודה על AB הקרובה ביותר ל- A.

מהו, לדעתכם, המקום התוחם את השטח בתוך הזווית שלא עוברים בו קטעים?

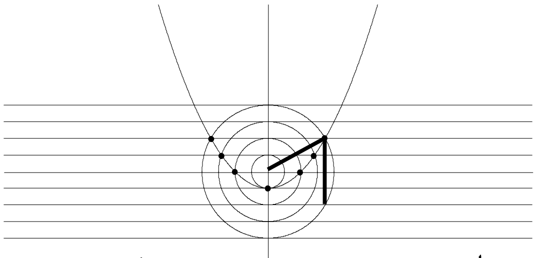


שרטוט 4

דיון

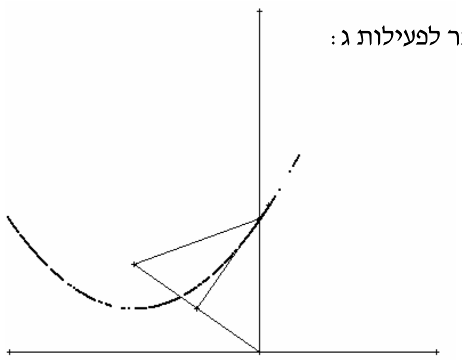
לכל העקומים שהתקבלו בפעילויות א-ה יש צורה המזכירה פרבולה. עלינו להוכיח שהם אכן פרבולות, על ידי בדיקת קיום הגדרה. נשתמש בהגדרה של פרבולה כמקום גיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחקים שווים מנקודה נתונה ומישר נתון.

מהגדרה זו נובע באופן מיידי שהעקומים המתקבלים בפעילויות א, ג, ד הם פרבולות. ניתן לראות זאת בקלות בשרטוטים שלהלן. הסבר לפעילות א:

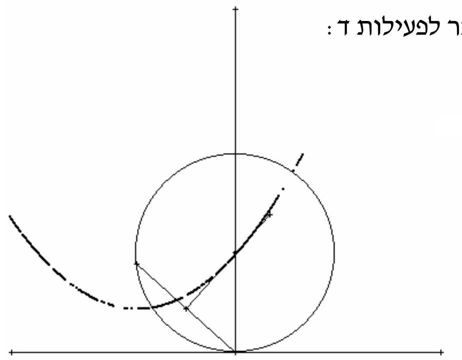


אורך כל אחד משני הקטעים המודגשים- 4 יחידות

הסבר לפעילות ג:



הסבר לפעילות ד:



שרטוט 5

קל לראות בשרטוטים המתאימים לפעילויות ג,ד, כי כל נקודה על הפרבולה נמצאת על אנך אמצעי לקטע, ולכן במרחקים שווים מקצותיו: המוקד והמדריך, המאונך לאנך האמצעי.

מה נחוץ להצדקת הטענה עבור פעילות ב?

תמונת הקפלים המתקבלת בפעילות ב דומה מאד (ואולי זהה) לתמונה המתקבלת בפעילות ג, שכן הקפלים הם האנכים האמצעיים לקטעים המחברים את הנקודה F עם הנקודות A שמסומנות על שפת הדף. מה ההבדל?

בפעילות ג מסמנים במפורש את נקודות העקום– נקודות החיתוך של שני האנכים. לעומת זאת, בפעילות ב איננו רואים במפורש את נקודות העקום, אלא מסמנים עקום תוחם לקפלים. עקום תוחם זה הוא, למעשה, משיק לכל אחד מהקפלים. על כן, כדי להוכיח כי העקום התוחם הוא אותה פרבולה כפי שהתקבלה בפעילות ג, עלינו להוכיח שתי טענות:

1. האנכים האמצעיים הם המשיקים לפרבולה.
2. נקודת ההשקה של כל אנך אמצעי כזה נמצאת בחיתוך שלו עם האנך לשפת הדף (בנקודת הקצה של הקטע אותו הוא חוצה). הוכחת טענה זו ברורה מפעילות ג.

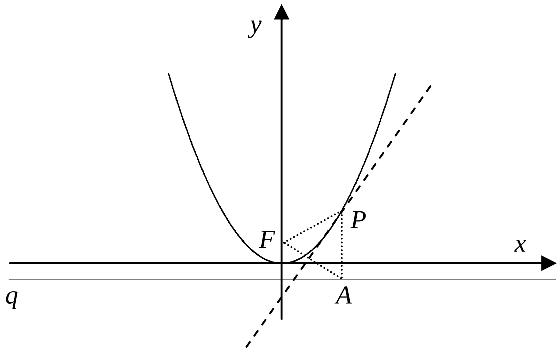
הוכחת 1:

אפשר כמובן להוכיח את הטענה בשימוש בכלים אנליטיים, אך נביא כאן הוכחה הנשענת על שיקולים גיאומטריים טהורים.

נביט בשרטוט 6: נוכיח כי אנך אמצעי (הקפל) המתקבל במהלך הבניה בפעילות ב, פוגש את הפרבולה, אשר המדריך שלה q הוא שפת הדף והמוקד שלה בנקודה F שסומנה על הדף, בדיוק בנקודה אחת (והוא, כמובן, אינו מקביל לציר הסימטרייה שלה). כל נקודה P על האנך האמצעי נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע אותו הוא חוצה. בפרט נמצאת עליו גם נקודה של הפרבולה, זו אשר מרחקה מהמוקד שווה למרחקה מהישר, כלומר: $PA\perp q$, $PF = PA$.

נניח כי קיימת על האנך האמצעי נקודה נוספת P' הנמצאת גם היא על הפרבולה.

מכאן: $P'A\perp q, P'A=P'F$ כך שבנקודה A יש לישר q שני אנכים, דבר שהוא כמובן בלתי אפשרי. לכן לאנך האמצעי ולפרבולה יש בדיוק נקודה משותפת אחת והוא משיק לפרבולה.



שרטוט 6

הקוראים מוזמנים להשלים את ההוכחה על ידי הוכחת הכיוון ההפוך.

לצורך הוכחת הטענה כי העקום המתקבל בפעילות ה הוא פרבולה נזדקק למידע נוסף.
כדאי לשים לב לכך שהעקום שנחקר במאמרה של לאה דולב (על״ה 27) נוצר באופן דומה, אלא ששם נדרשה זווית ישרה. כלומר פעילות זו היא מקרה מכליל עבור 'הקישוט' שנחקר שם.

לפרבולה תכונות גיאומטריות

מטרת המאמר היא, כאמור, לחדד את התפיסה של הפרבולה כצורה גיאומטרית. עד כאן עסקנו בהגדרתה הגיאומטרית. בסעיף זה נחקור תכונות שלה בכלים גיאומטריים בלבד, כפי שאנו רגילים לחקור תכונות של משולשים, מרובעים או מעגלים.

לפניכם רשימת טענות המתייחסות לפרבולות. תוכלו לאשש (או להפריך) את נכונותן באמצעות תוכנה של גיאומטריה דינמית ואולי אף לנסח ולבדוק תכונות נוספות.

טענה 1: משיק לפרבולה בנקודה x_0 שעליה, הוא אנך אמצעי לקטע המחבר בין המוקד לבין היטל הנקודה x_0 על המדריך, ולהפך.

טענה 2: כאשר משקפים את המוקד F ביחס למשיק לפרבולה, מתלכדת תמונתו עם עקב האנך היורד מנקודת ההשקה למדריך.

טענה 3: נורמל לפרבולה בנקודה x_0 שעליה מקביל לקטע שהמשיק לפרבולה בנקודה x_0 הוא האנך האמצעי שלו.

טענה 4: שני משיקים של פרבולה בעלת מוקד F, המשיקים לה בנקודה A ובנקודה B ונחתכים בנקודה S, יוצרים משולשים דומים.

טענה 5: נקודת החיתוך של שני משיקים לפרבולה נמצאת על ישר המקביל לציר הסימטרייה של הפרבולה, העובר דרך אמצע המיתר המחבר את נקודות ההשקה.

טענה 6 (משפט אפולוניוס):
תהא הנקודה S נקודה מחוץ לפרבולה. נעביר דרכה שני משיקים לפרבולה בנקודות A ו- B. יהא PQ משיק שלישי לפרבולה המשיק לה בנקודה O וחותך את SA בנקודה P ואת SB בנקודה Q. במצב זה מתקיימת הפרופורציה הבאה:

$$\frac{SP}{PA}=\frac{OQ}{OP}=\frac{BQ}{SQ}$$

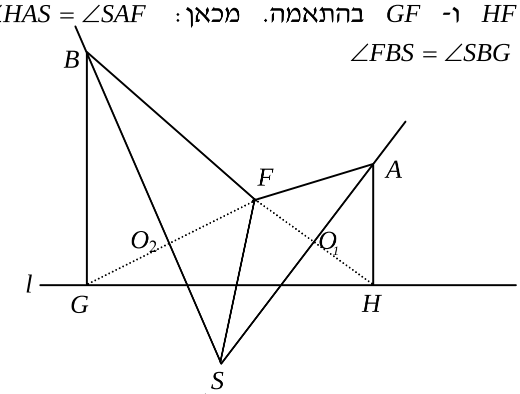
טענה 7: המשפט ההפוך למשפט אפולוניוס גם הוא נכון. כלומר: אם שלושה קטעים SA, SB ו- PQ מקיימים את המבנה המתואר בתנאי המשפט ואת הפרופורציה שבמסקנתו, אזי הנקודות A, B ו- O מונחות על פרבולה אחת.

הוכחות

לא קשה להצדיק את שלוש הטענות הראשונות על סמך
האמור לעיל. נביא כאן הוכחות לטענות האחרות.

טענה 4: שני משיקים של פרבולה בעלת מוקד F, המשיקים לה בנקודה A ובנקודה B ונחתכים בנקודה S, יוצרים משולשים דומים.
בניסוח אחר: אם SA ו- SB הם שני משיקים לפרבולה בעלת מוקד F ומדריך l, כך ש- A ו- B הן נקודות ההשקה, אז $\Delta FSB \sim \Delta FAS$ (שרטוט 7).
הוכחה לטענה 4
נבנה: $AH \perp l$, $BG \perp l$ ונשרטט את הקטעים AF ו- BF.

על פי הגדרת הפרבולה ושימוש בטענות קודמות נקבל: $AH=AF$, $BG=BF$, $SA\perp HF$, $SB\perp GF$
ונקודות החיתוך: O_1 ו- O_2 הן אמצעי הקטעים HF ו- GF בהתאמה. מכאן: $\angle HAS=\angle SAF$
$\angle FBS=\angle SBG$



שרטוט 7

בנוסף: $\angle HAS=\angle FHG$ וכן: $\angle GBS=\angle FGH$ כי שוקיהן מאונכות בהתאמה זו לזו.
לכן: $\angle FAS=\angle FHG$ וגם: $\angle SBF=\angle FGH$.
כיוון שמתקיים: SA אנך אמצעי ל- HF, הרי שגם: $SH=SF$, ובאותו אופן: $SG=SF$.
לכן הנקודות G, F, H מונחות על מעגל אחד שמרכזו ב- S. הזוויות $\angle FSH$ ו- $\angle FSG$ הן זוויות מרכזיות במעגל. הזוויות $\angle FGH$ ו- $\angle FHG$ הן זוויות היקפיות הנשענות בהתאמה על אותן קשתות כלומר:

$$\angle FHG=\frac{1}{2}\angle FSG=\angle FSB$$

$$\angle FGH=\frac{1}{2}\angle FSH=\angle ASF$$

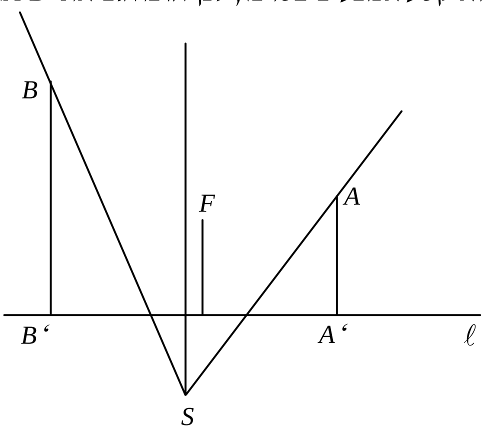
לכן: $\angle FAS=\angle FSB$ וגם: $\angle FBS=\angle FSA$
ומכאן $\Delta FSB\sim\Delta FAS$
מ.ש.ל.

טענה 5: נקודת החיתוך S של שני משיקים לפרבולה בעלת מוקד F נמצאת על הישר המקביל לציר הסימטרייה של הפרבולה, העובר דרך אמצע המיתר המחבר את נקודות ההשקה.

הוכחה לטענה 5

נביט בשרטוט 8: F הוא מוקד הפרבולה, A ו- B הן נקודות ההשקה על הפרבולה, הישר l הוא המדריך, והנקודות A' ו- B' הן ההיטלים של נקודות ההשקה A ו- B על המדריך בהתאמה.

נתבונן במשולש $A'B'F$: כפי שכבר ידוע, שני המשיקים הם אנכים אמצעיים לצלעות משולש $A'B'F$.
ציר הסימטריה של הפרבולה עובר במוקד F ומאונך למדריך.
לכן האנך האמצעי השלישי במשולש $A'B'F$ מקביל לציר הסימטרייה ועובר גם הוא בנקודה S.
המרובע $AA'B'B$ הוא טרפז.
הקטע המקביל לציר הסימטריה, העובר במרכז המיתר הוא קטע אמצעים בטרפז, לכן חוצה גם את $A'B'$.



שרטוט 8

כלומר: קטע זה הוא אנך אמצעי שלישי במשולש $A'B'F$. ולכן גם הוא עובר בנקודת החיתוך של שני המשיקים לפרבולה.
מ.ש.ל.

טענה 6 (משפט אפולוניוס)

תהא הנקודה S נקודה מחוץ לפרבולה. נעביר דרכה שני משיקים לפרבולה בנקודות A ו- B, SA ו- SB. יהא PQ משיק שלישי לפרבולה המשיק לה בנקודה O, חותך את SA בנקודה P ואת SB בנקודה Q. במצב זה מתקיימת הפרופורציה הבאה:

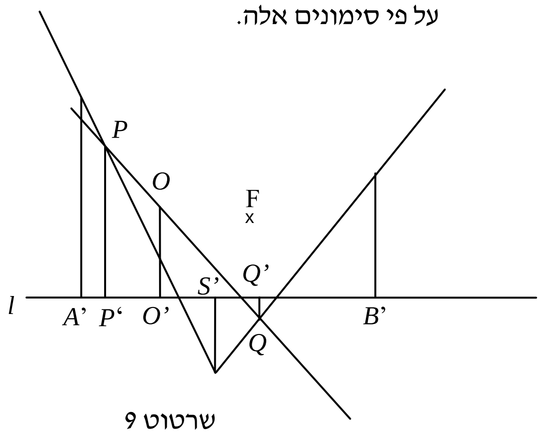
$$\frac{SP}{AP}=\frac{QO}{PO}=\frac{BQ}{SQ}$$

הוכחה לטענה 6

נביט בשרטוט 9: נסמן את הקטעים המופיעים בפרופורציה באופן הבא:

$SP=\alpha$, $AP=a$
$QO=q$, $PO=p$
$BQ=b$, $SQ=\beta$

נסמן את ההיטלים של הקטעים a,α,b,β,p,q על המדריך l בהתאמה כך: a' , α' , b' , β' , p' , q' על פי סימונים אלה.



שרטוט 9

עלינו להוכיח כי:

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{q}{p}=\frac{b}{\beta}$$

נביט בזוג המשיקים: SA,PQ.

נקודת החיתוך שלהם היא P.

על פי טענה 5 הנקודה P נמצאת על מקביל לציר הסימטרייה העובר באמצע המיתר AO.

על כן:

$$a'=p' \tag{1}$$

באותו אופן הנקודה Q היא נקודת החיתוך של המשיקים: SB ו- PQ ולכן:

$$b'=q' \tag{2}$$

ומאותה סיבה, כיוון שהנקודה S היא נקודת החיתוך של המשיקים: SA ו- SB מתקיים:

$$a'+\alpha'=b'+\beta' \tag{3}$$

ההיטל של PQ על המדריך הוא: $p'+q'$.

אולם ניתן להביע היטל זה גם באופן הבא:

$$p'+q'=\alpha'+\beta' \tag{4}$$

נשתמש ב- (1) ו- (2) ונקבל:

$$a'+b'=\alpha'+\beta' \tag{5}$$

נרשום שוב את (3):

$$a'+\alpha'=b'+\beta' \tag{3}$$

נחסר את (3) מ- (5) ונקבל: $b'-\alpha'=\alpha'-b'$

כלומר:

$$b'=\alpha' \tag{6}$$

נחזור על התהליך תוך החלפת אגפים בשוויון (3):

$$a'+b'=\alpha'+\beta' \tag{5}$$

$$b'+\beta'=a'+\alpha' \tag{3*}$$

שוב נחסר את (3*) מ- (5) ונקבל: $a'-\beta'=\beta'-a'$

כלומר:

$$a'=\beta' \tag{7}$$

על פי (7)-(1) ומשפט תלס (היחס בין הקטעים עצמם שווה ליחס בין היטליהם) נוכל לכתוב:

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\alpha'}{a'}=\frac{b'}{a'}$$

$$\frac{b}{\beta}=\frac{b'}{\beta'}=\frac{b'}{a'}$$

$$\frac{q}{p}=\frac{q'}{p'}=\frac{b'}{a'}$$

בכל אחד מהיחסים האחרונים שלושת הגדלים הימניים זהים ולכן גם שלושת הגדלים השמאליים שווים זה לזה, ומכך נובע היחס המבוקש:

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{q}{p}=\frac{b}{\beta}$$

מ.ש.ל.

טענה 7 (המשפט ההפוך למשפט אפולוניוס):

אם שלושה קטעים SB,SA ו- PQ מקיימים את המבנה המתואר בתנאי משפט אפולוניוס ואת הפרופורציה שבמסקנתו, אזי הנקודות B,A ו- O מונחות על פרבולה אחת.

כלומר: אם זווית $\angle ASB$ נחתכת על ידי ישר כך שנקודת החיתוך על השוק SA היא P ונקודת החיתוך על השוק SB היא Q ואם על הקטע PQ מסומנת נקודה O כך שמתקיים שוויון היחסים הבא:

$$\frac{SP}{AP}=\frac{QO}{PO}=\frac{BQ}{SQ}$$

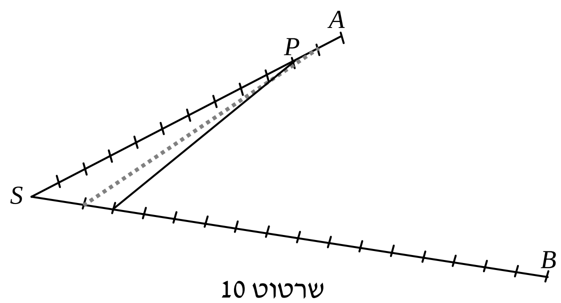
אזי:

הישרים PQ,SB,SA הם משיקים לפרבולה אחת, אשר שלוש הנקודות: A,B,O נמצאות עליה והן בהתאמה נקודות ההשקה.

הוכחת הטענה מתבצעת בקלות בדרך השלילה ומסתמכת על טענה 6.

הוכחה לטענה כי 'הקישוט' הוא פרבולה

נביט בשרטוט 10 המתקבל לאחר שרטוט שני קטעים מחברים במהלך פעילות ה:



שרטוט 10

נזכור כי הקטעים SA ו- SB חולקו למספר שווה של חלקים שווים.

מכאן ברור כי מתקיים השוויון: $\frac{AP}{SP}=\frac{SQ}{BQ}$ ולכן,

לפי טענה 7, הקטעים SA, SB ו- PQ הם משיקים לפרבולה אחת.

טענה זו נכונה, כמובן לכל קטע המשורטט במהלך בניית הקישוט ולכן הקטעים המרכיבים את הקישוט הם משיקים לפרבולה. כולם משיקים לאותה פרבולה, שכן מספיקים שני המשיקים SA ו- SB כדי לקבוע באופן חד ערכי את הפרבולה ושני אלה מופיעים בכל אחת משלשות המשיקים הנבחנות במהלך בניית הקישוט.

משפט אפולוניוס מספק לנו כלי למצוא את נקודת ההשקה במדויק.

סיכום

הופעתן של פרבולות בתכנית הלימודים כמעט רק בהקשרים אלגבריים מונעת מתלמידים לפתח התייחסות גיאומטרית אליהן. במאמר הוצגו פעילויות המדגישות את אופיה הגיאומטרי של הפרבולה.

טיפול בפרבולה דרך הוכחת תכונות גיאומטריות שלה עשוי לסייע לבסס את תפיסתה כצורה גיאומטרית בעלת תכונות מוגדרות וקשיחות בדומה לנעשה בתכנית הלימודים ביחס לישר ולמעגל.

רשימת מקורות והמלצות לקריאה נוספת

1. ברוקהיימר מ., סלומון י. מספר הערות אודות הפרבולה. *שבבים – עלון למורי מתמטיקה – תיק 4.*
2. דולב ל. (2001), הגרף – סיפור על חקירה מתמטית, *עלי"ה 27*, עמ' 3-9.
3. שריקי ע., דוד ח. (2001), *פרבולה וחתכי חרוט אחרים*, אצל: שריקי ע., *"קידמה" – קידום ידע בדידקטיקה ובמתמטיקה, אוגדן למורה*, "קשר חם" – המרכז הארצי לקידום, שיפור ורענון החינוך המתמטי, הטכניון, חיפה.
4. Dorrie H. (1965), *100 Great Problems of Elementary Methematics, Their History and Solution*, Dover publications, Inc. New York.
5. Ogilvy, C. S., (1969), *Excursions in Geometry*, Dover publications, Inc. New York, Chpter 6.
6. Olmstead, E.A., (1998), Exploring The Locus Definitions of the Conic Sections, *Mathematics Teacher*, Vol. 91, No. 5, p. 428-434.
7. Scher, D. P., (1996), Folded Paper, Dynamic Geometry,and Proof: A Three-Tier Approachto thr Conics. *Mathematics Teacher*, Vol. 89, march, p. 188-193.