הנושא: מה מבינים תלמידנו במושג 'אינדוקציה'

הוכן ע״י: יונתן אחיטוב.

תקציר: ברשימה מובא ניתוח של פתרון של תלמיד לשאלה באינדוקציה, במבחן הבגרות ברמה של 4 יח״ל. השאלה אמורה להאיר את הצורך בשלב הבדיקה של האינדוקציה המתמטית, אך התלמיד ענה על השאלה בדרך לא שגרתית, המעוררת תהיות ביחס למהות ההוכחה באינדוקציה מתמטית בפרט ולמהות הוכחה מתמטית בכלל.

מילות מפתח: אינדוקציה מתמטית, הוכחה, התחלקות.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 29, סתיו תשס״ג, 2002, עמודים 40-41.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

מה מבינים תלמידינו במושג 'אינדוקציה'

יונתן אחיטוב

בית-הספר המקיף דנציגר, קרית שמונה

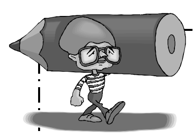
להלן מובאת כלשונה שאלה 4 ממבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 4 יחידות לימוד, קיץ תשנ"ח:

א. הוכח שאם בשביל n מסוים הביטוי 10^n+1 מתחלק ב- 11, אזי גם בשביל $n+2$ הביטוי מתחלק ב- 11.

ב. קבע איזו משתי הטענות 1 או 2 היא הנכונה, ונמק את קביעתך (היעזר בסעיף א).

1. הביטוי 10^n+1 מתחלק ב- 11 לכל n זוגי.
2. הביטוי 10^n+1 מתחלק ב- 11 לכל n אי-זוגי.

להלן תשובה מקורית וחריגה של אחד הנבחנים, מצוטטת כמעט במלואה:



א. נתון ש: $\frac{10^n+1}{11}$ נותן מספר שלם.

אני מציב 1, 3 ו- 5.

בדיקה:

$$\frac{11}{11}=1 \quad , \quad \frac{1001}{11}=91 \quad , \quad \frac{100001}{11}=9091$$

אני מקבל מספרים שלמים.

אני מחליף את n ב- k ומניח $\frac{10^k+1}{11}$ נותן מספר שלם.

הוכחה:

צ"ל: מספר שלם $= \frac{10^{k+2}+1}{11} \overset{*}{\leftarrow} \frac{100\cdot 10^k+1}{11}$

$\frac{10^k+1}{1}$ נותן לנו מספר שלם.

בגלל ש- $\frac{1}{11}+\frac{10^k}{11}$ מספר שלם, [נובע]

$\frac{10^k}{11}$ תמיד[1] שווה למספר שלם פחות $\frac{1}{11}$, ולכן גם אם אני אכפיל 10^k שחסר לו $\frac{1}{11}$ ב- 100 ישאר לו אותו חסרון של $\frac{1}{11}$ להיות מספר שלם[2]. אז כשנוסיף לו את אותו $\frac{1}{11}$ הוא יהיה מספר שלם, וכך גם לגבי 10,000[3].

{אם נכפיל את $\frac{10^k}{11}$ ב- 10 הוא לא יצטרך תוספת של $\frac{1}{11}$ כדי להיות מספר שלם, אלא הוא יצטרך תוספת של $\frac{10}{11}$ כדי להיות מספר שלם. וכך גם לגבי מכפלה ב- 1,000 - תוספת של עוד $\frac{10}{11}$ ולא $\frac{1}{11}$}[4]. ולכן גם עבור $k+2$ המספר מתחלק ב- 11.

---

* החץ כאן בא במקום סימן השוויון, ושימוש זה עשוי לעורר כמה שאלות מעניינות אחרות.

[1] הוא מניח במובלע שמדובר במעריך בלתי זוגי, כמו בדוגמאות לעיל.

[2] כאן, אמנם חסר הסבר מפורט יותר, לאמור: חסרון של $\frac{1}{11}$ כשהוא מוכפל ב- 100 נותן 'חסרון' של $9\frac{1}{11}=\frac{100}{11}$, כלומר 9 שלמים ועוד חסרון של $\frac{1}{11}$. אני מניח שזאת היתה מחשבתו.

[3] במקור כתוב בטעות 100,000

[4] החלק המוקף כאן בסוגריים אינו נחוץ לגוף ההוכחה, אבל מראה שהתלמיד הרגיש צורך להבהיר את המעבר מ- n ל- $n+2$, תוך דילוג על $n+1$.

ב. כמו שכבר שמנו לב בסעיף א, רק טענה מספר 2 נכונה, בגלל שהמכפלה של 10^k ב- 100 וב- 10,000 וכן הלאה, בתוספת 1 חלקי 11 תיתן לנו, ורק היא, מספר שלם, ו- 100 ו- 10,000 הם 10^2 ו- 10^4 ייצור לנו: 10^3 ו- 10^5, (וגם 10^7, במקרה של עשרה מיליון), וכפי שאנו רואים במקרה הזה n נשאר אי-זוגי. (כי הוא היה אי-זוגי בהתחלה, 1, יישאר אי-זוגי כי כל הזמן נוסיף לו 2).

וכאן מוסיף הפותר הערה חשובה ומפתיעה ביותר, ואף מדגיש אותה במסגרת:

הוכחתי בדרך הגיונית ולא בדרך של אינדוקציה

ובכן, מהי הוכחה בדרך האינדוקציה? ומה טיב יכולתו המתמטית של תלמיד אלמוני ומיוחד זה? ואם כבר 'בגרות' - איזה ציון הייתם נותנים לפתרון כזה?