הנושא: **מתמטיקה ומוסיקה**

הוכן ע"י: מייקל נ. פריד.

תקציר: במאמר נסקרים היבטים של תורת המוסיקה המתמטית, כפי שהיא נתפסה עד תקופת הרנסנס. בעיקר נבחנים תורת ההרמוניה של הפיתגוראים, מושג הכוונון הטבעי ומושג הכוונון המשווה. בחלק ב' מוצגת המתמטיקה כאחת מהאמנויות הליברליות.

מילות מפתח: מתמטיקה, מוסיקה, היסטוריה של המתמטיקה, פיתגוראים, מיתר, צליל, הרמוניה, אוקטבה, קווינטה, קווארטה, סקונדה, אומנות, מספרים, יחסים בין מספרים, יחס חלוקה, חזקות, סדרות, ממוצע חשבוני, ממוצע גיאומטרי, ממוצע הרמוני.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 30, אביב תשס"ג, 2003, עמודים 59-50.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 10 עמודים.

היסטוריה

מתמטיקה ומוסיקה

מייקל נ. פריד
המרכז להוראת המדעים והטכנולוגיה, אוניברסיטת בן גוריון

מבוא

במסורת הפיתגוראית, מוסיקה הייתה נושא מרכזי בתחום המתמטיקה. לאחר מכן, התייחסו היוונים אל המוסיקה כנושא מתמטי, והוגים כמו אויקלידס ופתלומי כתבו חיבורים מתמטיים על תורת המוסיקה. בימי הביניים המוסיקה, יחד עם גיאומטריה, אריתמטיקה, ואסטרונומיה, נכללה בין האמנויות המתמטיות. מאוחר יותר מתמטיקאים כמו קפלר, ואפילו אוילר כתבו על תורת המוסיקה בלי לראות בכך סטייה מעבודה מתמטית אחרת שלהם. בימינו, המוסיקה הפסיקה להיות נושא מרכזי במתמטיקה, אם כי מכירים באופיו המתמטי של הנושא.

דברי יתחלקו לשנים: בחלק הראשון, אסקור כמה היבטים של תורת המוסיקה המתמטית, כפי שהיא נתפשה עד הרנסנס. בעיקר אתייחס לתורת ההרמוניה של הפיתגוראים ובהקשר זה גם למושג כוונון טבעי, לבעיות שנבעו ממנו, ומעט לפתרון המודרני – כוונון משווה. בחלק השני, אתייחס למקומה של המוסיקה במתמטיקה כאחת האמנויות הליברליות.

חלק א'

פיתגורס ומוסיקה

קשה מאד להפריד את דמותו של פיתגורס כאבי המתמטיקה מדמותו כאבי תורת המוסיקה. קשה לדעת אם פיתגורס האמין כי 'הכל מספרים' בגלל הגילויים שלו במוסיקה או שאלה הצדיקו את דעתו על מקומם של מספרים ביקום. ידוע, כי אצל הפיתגוראים, המוסיקה והמתמטיקה לעולם לא היו רחוקות זו מזו. ואכן, בתאוריו של אריסטו את אמונתם של הפיתגוראים, שכל דבר 'עשוי' ממספרים, הוא תוהה על סמך מה הסיקו מסקנה זו, ועונה: *"על הבסיס שהתכונות של מספרים טבועות בהרמוניה מוסיקלית, בתנועות של השמיים הנראים, ודברים רבים מלבד אלה"* (Metaphysica 1090a). מה היו הגילויים של פיתגורס על המוסיקה, ואיך גילה אותם? לפי אגדה, המופיעה פעמים בספרות[1], פיתגורס הגיע לרעיונותיו אודות המוסיקה, בעת ששמע צלילי פטישים וקישר בין הצלילים לבין משקלם של הפטישים[2]. מכאן, כנראה, המשיך וקישר בין אורכו של חליל ואורכו (או אולי מתיחותו) של מיתר לבין גובה הצליל הבוקע מהם. בתחריטים מימי הביניים וברנסנס, מתוארות אגדות אלו בציור. ניתן לראות תמונות מעין אלו אצל בויאר (Boyer,1985) ואצל כהן (Cohen, 1994). נראית שם, למשל, דמותו של פיתגורס - קל לזהותו שוקל פטישים במאזניים!

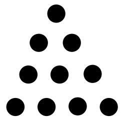
---

[1] פיתגורס חי, כנראה, במאה ה-6 לפני הספירה, אך אין בידנו דבר שנכתב על-ידי פיתגורס עצמו. אפילו עדות כתובה בת-זמנו אינה בנמצא. כל הידוע על פיתגורס, הפיתגוראים ותורתם, נסמך על מקורות שנכתבו שנים רבות לאחר תקופתם. בין המקורות המוקדמים יותר, נמנים הכתבים של אפלטון (429-347 לפה"ס) ואריסטו (384-322 לפה"ס). אריסטו, כנראה, כתב ספר שנקרא *על הפיתגוראים*, אך אינו בנמצא כיום. בכתביהם של אריסטו ואפלטון מצויות בעיקר הערות מתוך ספרים אחרים, כמו המטפיסיקה שנזכרה לעיל. עבודות שלמות על פיתגורס שנמצאות בידנו הן מתקופה הרבה יותר מאוחרת – מהמאה הראשונה עד המאה הרביעית לספירה. בין עבודות אלו, ראויות לציון הביוגרפיות שנכתבו על-ידי דיוגנס לארטיוס (Diogenes Laertius מאה ה-3), פורפיריוס, (Porphyry בערך 232-305) ויאמבליקוס (Iamblichus, בערך 250-350). רוב האגדות על פיתגורס מופיעות בעבודות אלו. מקור חשוב למתמטיקה הפיתגוראית הוא *המבוא לאריתמטיקה* שנכתב על-ידי ניקומוכוס של גארסה (Nicomachus of Gerasa, המאה ה-2) (השם גארסה מתייחס לעיר ג'רש שכיום בירדן).

[2] כך למשל אומר קאסיודורוס (Cassiodurus, c. 486- c. 575 A. D.): *"אדם בשם גאודנטיוס, כאשר הוא כתב על המוסיקה, אמר שפיתגורס גילה את ההתחלות של [אמנות המוסיקה] בצלילי פטישים ובפריטת מיתרים מתוחים"* (*Institutiones*, V.1). איסדור מסביליה (Isadore of Seville, d. 636 A. D.) חוזר על אותו הסיפור כמעט מילה במילה (*Etymologiarum*, III. 16).

כשם שלא ידוע *כיצד* גילה פיתגורס עצמו את תורתו על המוסיקה, מעבר לאגדות הנזכרות לעיל, כך לא ידוע בוודאות גם *מה* באמת גילה הוא בעצמו. לעומת זאת ידוע לנו בביטחון תוכן המחקרים במוסיקה בהם עסקו חסידיו של פיתגורס, והמתמטיקאים שהמשיכו מחקרים אלה. לכן, יהיה נכון יותר לדבר על 'תורת המוסיקה הפיתגוראית' מאשר על 'תורת המוסיקה של פיתגורס' עצמו. נתעניין אם כן בשאלה: מה היו הגילויים של תורת המוסיקה הפיתגוראית?

הגילוי הראשון והגדול בתורת המוסיקה הפיתגוראית הוא שהמרווחים בין הצלילים ההרמוניים במוסיקה קשורים ליחסים בין מספרים שלמים קטנים. אם פורטים על מיתר אחד או על מיתר שני, הזהה לו באורכו, יבקעו מהם צלילים זהים. הצרוף הנוצר לא כל כך מעניין, אך הוא הרמוני; היחס בין האורכים של המיתרים הוא 1:1. אם פורטים על מיתר אחד או על מיתר שני השווה באורכו למחצית האורך של הראשון, יבקעו מהם צלילים הנבדלים זה מזה במרווח הנקרא אוקטבה. גם צרוף זה הרמוני, והיחס בין אורכי המיתרים הוא 1:2. צירופי הצלילים הבוקעים ממיתרים שהיחסים בין אורכיהם הם 2:3 (קווינטה) או 3:4 (קווארטה) גם הם הרמוניים. המרווחים הקשורים ליחסים 3:4 , 2:3 , 1:2 נשמעים בסדר זה בארבעת הצלילים הראשונים של ההמנון הצרפתי 'לה מרסאיאז' (La Marseillaise). חשוב לציין שהיחס הבא, 4:5 (טרצה) – המרווח בין שני הצלילים הראשונים של השיר 'רוץ בן סוסי', לא נחשב בעבר הרמוני[3], אם כי הוא מרווח חשוב מאד במוסיקה בת זמננו, כמו גם בהיסטוריה של תורת המוסיקה שאנו סוקרים כאן. נחזור לדיון זה בהמשך. אגב, למספרים 1,2,3,4 ולסכומם 10 (ה'דקאד'), הייתה אצל הפיתגוראים משמעות מיוחדת. הם סידרו שורות של עיגולים בצורה של משולש, כמתואר באיור 1, וכינו, כתוצאה מסידור זה, את קבוצת המספרים הזאת בשם 'טטראקטוס':



איור 1

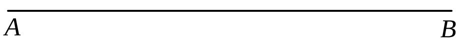
[3] עד היום, בתורת המוסיקה *'מרווחים מושלמים'* הם רק אוניסון (צירוף שני צלילים זהים), אוקטבה, קאוורטה וקווינטה.

ה'טטראקטוס' היווה סמל לפיתגוראים ונושא לשבועתם[4].

היחסים שהוזכרו בין אורכי המיתרים נחקרו בעזרת כלי פשוט בשם 'מונוקורד' ('יחד-מיתר') או 'קנון' שפרושו ביוונית 'סרגל'. (אצל כהן (Zo….,) ניתן למצוא תמונה של קנון או מונוקורד); על הסרגל ניתן לסמן שנתות, למדוד אורכים, ולבדוק את יחסי החלוקה של המיתר, אלה שמהם נוצרו הצלילים – המרווחים השונים. ספר של אויקלידס על מוסיקה נקרא בשל כך 'חותכים את הקנון' (ביוונית קאטאטומה קאנונוס)[5]. התאמה (מיזוג) בין סרגל ומיתר היא סמל טוב לתורת המוסיקה הפיתגוראית; ובכן, מה אפשר ללמוד משימוש בקנון?

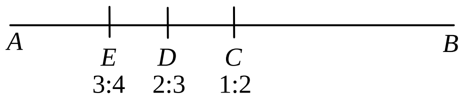
ממוצעים

נייצג סרגל לא מסומן, או קנון שלם בעזרת קטע AB:



כעת, 'נחתוך' את הקנון בנקודות C, D, E, … המחלקות את AB ביחסים 1:2, 2:3, 3:4, כלומר:

$$3:4 = BE:AB\ ,\ \ 2:3 = BD:AB\ ,\ \ 1:2 = BC:AB$$



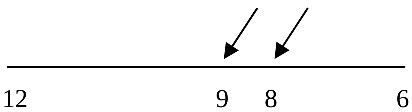
[4] תאון (Theon of Smyrna, 2nd cent. A.D.) מציין 10 דברים אותם מסמל הטטראקטוס:
- מספרים: 1, 2, 3, 4;
- כמויות: נקודה, ישר, שטח (המשולש), מוצק (הטטראדר);
- גופים יסודיים: אש, אויר, מים, אדמה;
- צורות בגופים יסודיים: פירמידה, והאוקטאדר, האייכסאדר, קוביה;
- דברים חיים: גרעין, גידול באורך, גידול ברוחב, גידול בעובי;
- חברה: אדם, כפר, עיר, מדינה;
- כוחות נפש: הגיון, ידע, דעה, תחושה;
- חלקי יצורים חיים: הגוף ושלושת החלקים של הנפש;
- עונות השנה: אביב, קיץ, סתיו, חורף;
- גילי האדם: ילדות, נערות, בגרות, זקנה;

(*Cornford, Plato's* Comology, p.70)

[5] פרוקולוס (Proclus Diadochus, 410-485), פרשן של ה*אלמנטים* של אוקלידס ומרינוס (Marinus of Sichem, 5th cent.A.D.), פרשן של *הדטה* של אוקלידס, מזכירים ספר אחר של אוקלידס בנושא המוסיקה, *האלקמנטים של המוסיקה* (האי קאטא מוסיקיין סטויכייוסייס). כמו כן נזקף לזכותו של אוקלידס עוד ספר על מוסיקה, *המבוא להרמוניה* (איסאגוגה הרמוניקה), אך לפי ח. הית (Thomas Heath, *History of Greek Mathematics* - I, 444), ספר זה *"....בוודאות לא של אוקלידס אלא של קליאוניד (Cleonides), חסידו של אריסטוכנוס (Aristoxenus)*. יש שתי סיבות לקביעה זו: 1) סגנון *המבוא להרמוניה* קרוב מאוד לעבודותיו של אריסטוכנוס 2) רוח הספר מתאימה לאריסטוכנוס שהדגיש יותר את צד האמפירי של המוסיקה מאשר את הצד המתמטי (Strunk, *Source Readings in Music History*, pp. 25-44, בספר מופיע קטע *ממבוא להרמוניה* מאת קליאונידס).

אם נפרוט על המיתר קרוב ל- B ובאותו זמן ניגע ב- C יבקע מהמיתר צליל שהוא גבוה באוקטבה אחת מזה שיבקע ממנו אם נפרוט קרוב ל-B על מיתר משוחרר. אם נפרוט על המיתר קרוב ל- B ובאותו זמן ניגע ב- D יבקע ממנו צליל הגבוה בקווינטה מאשר זה שבוקע ממיתר משוחרר, וב- E, באותו אופן, נפיק צליל הגבוה בקווארטה.

אפשר להמיר את העיסוק ביחסים בין אורכים לעיסוק במספרים אם נבחר לייצג אורך של מיתר שלם AB על ידי מספר מסוים (שרירותי), נניח 12 יחידות (מכאן ואילך ארשום רק '12' במקום '12 יחידות'). במצב זה, אורך BC הוא 6 ($6:12=1:2=BC:AB$) אורך BD הוא 8 ($8:12=2:3=BD:AB$) ואורך BE הוא 9 ($9:12=3:4=BE:AB$). כאשר מטפלים במספרים במקום ביחסים, מקבל תהליך 'חיתוך הקנון' מימד אחר: עתה נוכל לחשוב על תהליך זה 'כהכנסה' (מיקום) של מספרים מסוימים בין מספרים אחרים, במקרה שלנו, המספרים 8 ו-9 בין 6 ל-12:



תהליך מציאת מספר אחד 'בין' שני מספרים נתונים מזכיר תהליך של מציאת ממוצע בין שני מספרים. אך, כפי שראינו כרגע, יש יותר מדרך אחת 'להכניס' מספר בין שניים אחרים, ולפיכך, יש יותר מסוג אחד של ממוצע – ניקומוכוס מגארסה (Nicomachus of Gerasa) (המאה ה-2) מתאר עשרה (כמובן!) סוגים שונים של ממוצעים![6] ואמנם, היבט חשוב של תורת המוסיקה הפיתגוראית היה חקר ממוצעים.

נוסיף לסדרה 6 , 8 , 9 , 12 את המספר 4 (מוסיקלית, הוספת 4 היא הוספת צליל קווינטה מעל האוקטבה), ונוכל לגלות בסדרה החדשה הנוצרת את שלושת הממוצעים החשובים ביותר בתורת המוסיקה העתיקה וגם במתמטיקה של זמננו: הממוצע החשבוני (הממוצע 'הרגיל'), הממוצע הגיאומטרי והממוצע ההרמוני. כדי להגדיר את הממוצעים האלה כפי שנעשה בתורת המוסיקה, נסמן ב- c את הממוצע (כלשהו) של המספר a והמספר b ($a>b$). c הוא הממוצע החשבוני של a ו- b אם a גדול מ- c באותה המידה בדיוק בה c גדול מ- b או בסימנים: $a-c=c-b$ או $\frac{a-c}{c-b}=\frac{a}{a}$.

c הוא הממוצע הגיאומטרי של a ו- b אם המספר בו a גדול מ- c מתייחס למספר בו c גדול מ- b כמו היחס בין a ל- c, או בסימנים: $\frac{a-c}{c-b}=\frac{a}{c}$.

c הוא הממוצע ההרמוני של a ו- b אם המספר בו a גדול מ- c מתייחס למספר בו c גדול מ- b כמו היחס בין a ל - b, או בסימנים[7]: $\frac{a-c}{c-b}=\frac{a}{b}$.

עם זאת, אפשר לוודא שבסדרה 4 , 6 , 8 , 9 , 12, המספר 9, שמתאים לקווארטה, הוא הממוצע האריתמטי בין 6 ל- 12, שהם המספרים המתאימים לאוקטבה (6 הוא גם הממוצע האריתמטי של 4 ו- 8 המתאימים גם הם לאוקטבה); המספר 8, שמתאים לקווינטה, הוא הממוצע ההרמוני של 6 ו- 12; המספר 6 הוא הממוצע הגיאומטרי של 4 ו- 9; 8 הוא הממוצע האריתמטי ו- 6 הוא הממוצע ההרמוני של 4 ו- 12. אם נוסיף את המספר 16, כלומר עוד אוקטבה מעל זו המתאימה למספרים 4 ו- 8, נקבל כי 8 הוא גם ממוצע גיאומטרי של 4 ו- 16, כמו כן, 12 הוא הממוצע הגיאומטרי של 9 ו- 16.

בשלב זה כדאי להתבונן שנית בתמונה הנמצאת אצל כהן (Cohen, 1994), בה נראה פיתגורס מצלצל בפעמונים, פורט במיתרים, ומחלל בחלילים, והכלים כולם מסומנים במספרים 4, 6, 8, 12,9, 16!

קושיות בתורת המוסיקה הפיתגוראית

נניח שאנו רוצים למצוא יחס המתאים לקווינטה מעל אוקטבה. איך אפשר לחשב את זה? נחשוב על זה במונחים של מונוקורד. כדי לקבל מרווח של אוקטבה מחלקים את המיתר ביחס 1:2, כלומר פורטים על חצי המיתר השלם; כדי לקבל קווינטה מעל האוקטבה מחלקים את חצי המיתר הקודם ביחס 2:3. לכן, היחס בין אורך המיתר המתקבל למיתר השלם הוא $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

---

[6] ניקומוכוס, *אריתמטיקה* 28II. ראה גם Heath, *History of Greek Mathematics*, I, 87

[7] אלה, כמובן, לא הנוסחאות המוכרות לנו. אך קל לבדוק שהן שקולות: מהיחס $\frac{a-c}{c-b}=\frac{a}{a}=1$ נובע ש- $a+b=2c$ או $c=\frac{a+b}{2}$; מהיחס $\frac{a-c}{c-b}=\frac{a}{c}$ נובע $c^2=ab$ או $c=\sqrt{ab}$; ומהיחס $\frac{a-c}{c-b}=\frac{a}{b}$ נובע $\frac{2ab}{a+b}$ או $\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$.

ברור שאם נרצה לחזור ולהוריד את הקווינטה מהאוקטבה נוכל לחלק $\frac{1}{3}$ ב- $\frac{2}{3}$. אם נכליל תהליך זה, נקבל שני כללים בסיסיים:

1. כדי <u>לחבר</u> מרווח למרווח (כגון קווינטה לאוקטבה), יש <u>לכפול</u> את היחסים המתאימים להם.
2. כדי <u>לחסר</u> מרווח ממרווח, יש <u>לחלק</u> את היחסים המתאימים להם.

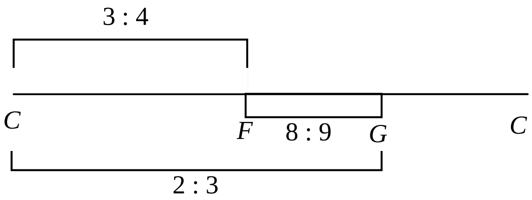
לדוגמא, קווינטה ועוד קאוורטה (כמו שני המרווחים הנשמעים בפתיחת 'כה אמר זרתושטרא' של ריכרד שטראוס) הוא $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$, אוקטבה! (ולכן, הצליל הראשון והשלישי בפתיחת 'כה אמר זרתושטרא' מהווים אוקטבה). או אם נרצה לדעת את היחס המתאים למרווח שבין הקווארטה לקווינטה, הסקונדה (זה המרווח בין שני הצלילים הראשונים של 'סביבון סוב-סוב-סוב'), אנחנו מחשבים את המנה $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{8}{9}$.

עם כללים אלה, אפשר לגשת לשאלה תמימה, לכאורה, מהם הצלילים בהם אפשר להשתמש במוסיקה? הרי באופן כללי יש רצף – אינסוף צלילים שונים באוקטבה אחת; יש לבחור מספר צלילים מהם ניתן להרכיב את המוסיקה. זאת הבעיה של בניית סולם מוסיקלי שלם. ההצעה הראשונה היא לבנות את סולם הצלילים באמצעות המרווח 'ההרמוני ביותר' אחרי האוקטבה - הקווינטה, המרווח המתאים ליחס 2:3. בדרך זו, הצליל הראשון נתון ומתאים ליחס 1:1; הצליל השני גבוה בקווינטה מהראשון ומתאים ליחס 2:3; הצליל הבא גבוה בקווינטה מהשני ומתאים, לפי הכלל הבסיסי הראשון, ליחס $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$; הצליל הרביעי גבוה בקווינטה מהשלישי ומתאים, שוב לפי הכלל הבסיסי הראשון, ליחס: $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$, וכו'. אם נמשיך את התהליך הזה 12 פעמים נגיע למרווח שקרוב מאד לצליל הגבוה בשבע (7) אוקטבות מהראשון, דהיינו, המעגל נסגר – <u>כמעט</u>. בין הצליל האחרון של 'ערמת' הקווינטות לצליל האחרון ב'ערמת' האוקטבות יש מרווח קטן, וקל לחשב אותו. המרווח הנוצר על ידי שבע אוקטבות מתאים ליחס $\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}$ ואילו המרווח הנוצר על ידי שתים עשרה הקווינטות מתאים ליחס $\left(\frac{2}{3}\right)^{12}=\frac{4096}{531441}$. את ההפרש בין מרווחים אלה ניתן לחשב לפי הכלל הבסיסי השני:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{12}:\left(\frac{1}{2}\right)^7=\left(\frac{4096}{531441}\right):\left(\frac{1}{128}\right)=\left(\frac{524288}{531441}\right)\approx\frac{73}{74}$$

אכן, מרווח קטן, אך ניתן להבחנה בשמיעה. המרווח הקטן המתאים ליחס 73:74 (בערך) נקרא 'הכומה הפיתגוראית', והוא סימן אחד לקושי שבבניית תורת המוסיקה על בסיס עקרונות פיתגוראיים טהורים[8]. אולם בניית סולם באמצעות הקווינטה, כפי שעשינו כאן, אינה הדרך היחידה לגשת לבעיה.

דרך אחרת לבנות סולם על בסיס עקרונות פיתגוראיים טהורים היא להשתמש, לא רק במרווחי קווינטה וקווארטה, אלא גם בסקונדה הנגזרת מהם. נתחיל בארבעת הצלילים הנקבעים על ידי צליל מסוים ומרווחי קווארטה, קווינטה ואוקטבה. נסמן אותם באותיות C, F, G ושוב C:



נוסיף לצליל הראשון סקונדה, נקרא לצליל החדש D. ל-D נוסיף עוד סקונדה, נקרא לצליל המתקבל E. אם נוסיף סקונדה ל-E נעבור את הקווארטה כי $\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}=\frac{512}{729}<\frac{3}{4}$ (נזכור, שככל שהיחס קטן יותר, הצליל גבוה יותר יחסית לצליל הבסיס). את היחס המתאים למרווח בין E ל-F נכנה d ונמשיך להוסיף סקונדות מהצליל F, וכך נקבל את הצלילים החדשים A ו- B. היחס המתאים למרווח בין B ל- C הוא אותו היחס המתאים למרווח שבין E ל- F, כי המרווח בין G ל- C (הגבוה) גם הוא קווארטה. עד כה, אפשר לסמן את היחסים והצלילים כך:

C 8:9 D 8:9 E d F 8:9 G 8:9 A 8:9 B d C

---

8 עוד בעיה היא זאת: למצוא מרווח שמחלק את האוקטבה <u>באופן שווה</u>: הבעיה המתמטית היא למצוא יחס $\frac{b}{a}$ כך ש- $\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{2}$ כלומר למצוא יחס $\frac{a}{b}$ כך ש- $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$. האם כך גילו הפיתגוראים, שאין מספרים שלמים a ו-b כך שהריבועים שלהם מתייחסים זה לזה כמו 2 ל- 1 או במונחים מודרניים ששורש 2 לא רציונלי?

כדי למצוא את היחס d, נשתמש בכלל הבסיסי השני לעיל. היחס המתאים למרווח C-E הוא $\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}=\frac{64}{81}$, והיחס המתאים למרווח C-F הוא $\frac{3}{4}$, לכן, היחס d המתאים למרווח E-F נתון על ידי המנה $\frac{3}{4}:\frac{64}{81}=\frac{243}{256}$.

מרווח זה נקרא <u>סקונדה קטנה פיתגוראית</u>. האם בזה פתרנו את כל הבעיות? לרוע המזל, לא. כי אם רוצים לשמור את הסדר המקורי של היחסים, 1:1, 2:3, 3:4, אז הסולם שלנו צריך לכלול את גם את היחס הבא 4:5, והוא צריך (לפי הסדר) להתאים למרווח C-E, ולא כך המצב: בסולם שלנו היחס המתאים ל-C-E הוא $\frac{64}{81}$ ו- $\frac{4}{5}=\frac{64}{80}\neq\frac{64}{81}$. לפי הכלל הבסיסי השני לעיל, ההפרש בין המרווח C-E שלנו לזה הנקבע על ידי היחס 4:5, 'הטרצה הטהורה' נתון על ידי היחס $\frac{80}{81}=\frac{64}{80}:\frac{64}{81}$. יחס זה מתאים למרווח קטן מאד הנקרא 'הכומה הסינטונית'[9].

הפתרון המודרני: כוונון משווה

בעיית הטרצה התגלתה כמשמעותית מאד כאשר חל שינוי בסגנון המוסיקה. במאות ה- 12 וה- 13, מלחינים כמו לאונין (Leonin 12th cent.) ופרוטן (Perotin c.1150-c.1240) התחילו לחקור לעומק את האפשרויות של מוסיקה פוליפונית, מוסיקה בה שומעים בו זמנית יותר מקול אחד. במוסיקה פוליפונית מגוון המרווחים הנדרש גדול מאד. כך, עם הפוליפוניה, החלה הטרצה לקבל מעמד של מרווח הרמוני ואף הפכה להיות מרווח מרכזי ביצירות מוסיקליות.

עושר ההרמוניה, שבא עם הפוליפוניה, גרם גם למוסיקאים, שביצעו מוסיקה זו, לסטות יותר ויותר מהכוונון הטהור הפיתגוראי – הכוונון הטבעי, על מנת להימנע מדיסוננסים לא רצויים. הקושי להיות נאמן לכוונון טבעי גדל ככל שמורכבות הפוליפוניה גדלה. והיא אכן גדלה: במאות ה- 15 וה- 16 חוברו יצירות בהן ארבעה, חמישה, או אפילו ששה קולות נשמעו בו זמנית על ידי מלחינים כמו יקוב אוברכט (Jacob Obrecht 1450-1505), היינריך איזק (Heinrich Isaac 1450-1517), ויותר מכולם, ז'וסקן דה פרה (Josquin des Pres 1440-1521).

בתחילת המאה ה- 16 החלו להתגבש הצעות לפשרה בין הדרישות המדעיות, דהיינו, שהמוסיקה תתבסס על יחסים של מספרים שלמים, לבין דרישות האוזן המוסיקלית של המבצעים את יצירות המוסיקה. הרעיון הכללי של הפשרה היה לחלק את האוקטבה לשנים-עשר מרווחים שווים (משתים-עשרה הסקונדות הקטנות בסולם המתואר בסעיף הקודם). באופן מדויק[10], בעזרת יחס (לאו דווקא של מספרים שלמים) המתאים למרווח d. כך d צריך לקיים $d^{12}=\frac{1}{2}$ או $d=\sqrt[12]{\frac{1}{2}}\approx 0.9439$. פתרון זה, מכונֶה <u>כוונון משווה</u>.

בגלל שוויון המרווחים שיטת הכוונון המשווה פתרה לא רק את הבעיה הנזכרת לעיל, אלא אף אפשרה למלחינים חופש לעבור מסולם לסולם. יוהן סבסטיאן באך (J. S. Bach) ניצל אפשרות זו היטב ביצירתו 'הפסנתר המושווה', שנקראת כך בגלל השימוש בכוונון משווה. הפתרון אכן היה פשרה. המוסיקולוג וקטור זוקרקנדל מסביר בצורה יפה:

"The fact that Bach came out as a strong supporter of the new system by writing a series of keyboard compositions in all keys — a thing unheard of before — and calling it The Well-Tempered Clavichord, is sufficient proof that equal temperament well serves the art of music. Nobody's ear need be more sensitive

---

[9] פתלומי (Ptolemy – 1st cent. A.D.), האסטרונום הגדול, הציע פתרון לבעיית הטרצה. בפתרון שלו, הוא משתמש ב<u>שני יחסים שונים</u> לסקונדה: 8:9 ו- 9:10. היחס 9:10 מתקבל כאשר מורידים את הסקונדה שיחסה 8:9 מהטרצה הטהורה שיחסה 4:5, דהיינו, מורידים את המרווח D-C מהמרווח <u>התיאורטי</u> E-C. לפיכך, פתלומי משתמש ביחס 9:10-4:5/8:9 עבור המרווח D-E. השינוי הזה בשיטה של פתלומי מהווה גם שינוי ביחס המתאים לסקונדה קטנה: 15:16=3:4/4:5~(F-C) - (E-C). לכן, הסולם של פתלומי נראה כך:

C 8:9 D 9:10 E 15:16 F 8:9 G 9:10 A 8:9 B 15:16 C

אומנם, שיטה זו של פתלומי פותרת את הבעיה של הטרצה, אבל השיטה אינה נקייה מבעיות אחרות. למשל המרווח D-A הוא קווינטה (לספור את מספר הסקונדות וחצי טונים), אך

$$\begin{aligned}&81:120=27:40=\\&=9:10\cdot 8:9\cdot 15:16\cdot 9:10\sim(A+G)+(G-F)+(F-E)+(E-D)=\\&=D-A\end{aligned}$$

במקום 80:120=2:3. לכן, בין הקווינטה הזו לבין הקווינטה הטהורה יש לנו שוב 'כומה סינטונית' 80:81.

[10] הראשון שהציע זאת היה נגן האורגן ארנולט שליק (Arnolt Schlick) ב-1511, אך האופן בו שליק הציע את הרעיון היה מאד לא מדוייק: להוריד קצת פה להוסיף קצת שם וכו' (ר' Cohen, *Quantifying Music* p.41).

וויצ'נזו גליליי (Vincenzo Galilei, c.1533-1591), אביו של גליליאו גליליי המפורסם, הציע חלוקה רציונלית של האוקטבה, בה למרווח היסודי מתאים היחס 17:18. אבות הפתרון המודרני שעזבו חלוקה רציונלית הם סימון סטבין (Simon Stevin, 1548-1620) ומרן מרסן (Marin Mersenne, 1588-1648).

than Bach's. The beautiful whole number ratios, however, the holy numbers, are gone. In their stead we get a series of seven digit decimals[11].

חלק ב

מוסיקה כאמנות ליברלית

עד עכשיו, דנו בהיבט המתמטי של המוסיקה, בעיקר כפי שהוא נתפש במסורת הפיתגוראית. אך יש להדגיש שהפיתגוראים התייחסו למוסיקה כאל <u>תחום מתמטי בפני עצמו</u>, וכך נתפסה המוסיקה בעולם האינטלקטואלי עד סוף ימי הביניים. ראוי להדגיש, כי הדברים שונים: יש הבדל בין חקירה <u>מנקודת מבט מתמטית</u> לבין תפיסת הנושא <u>כתחום מתמטי</u>. כך למשל, גם לסוציולוגיה היבט מתמטי, אך סוציולוגיה איננה נתפשת כנושא הכרחי בהשכלה מתמטית! בחלק זה, נדבר על משמעותה של המוסיקה כתחום (דיסציפלינה) מתמטי.

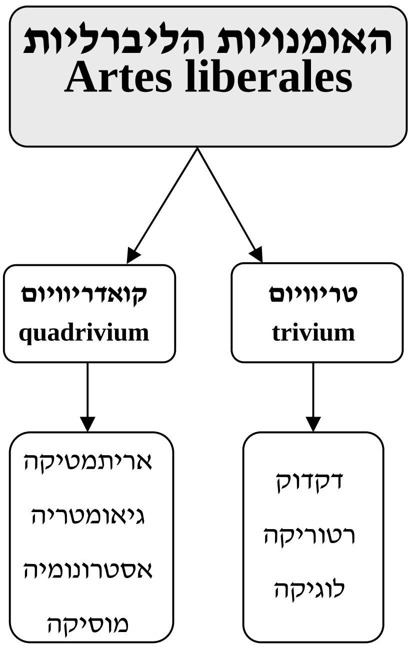
בעולם הקלאסי, ניתן להבחין בין שני זרמים בחינוך האינטלקטואלי: האחד קשור לכושר ביטוי ושכנוע, והשני קשור לידע מדעי, וכך בפרט – מתמטי. כנציגי הזרם הראשון, אפשר לציין את בתי הספר הרטוריים ברוח של אייסוקרטס (Isocrates – 436-388 B.C.), וכנציגי הזרם השני, אפשר לציין את בתי הספר הפילוסופיים, כמו האקדמיה של אפלטון, שהיו מושפעים מהמסורת הפיתגוראית. בסוף התקופה הקלאסית ובתחילת ימי הביניים, אוחדה ההתייחסות אל קבוצת תחומים אלה והם כונו בשם <u>האמנויות הליברליות</u> (artes liberals). נמנו שבע אומנויות ליברליות[12]. שלוש משבע האומנויות השתייכו לזרם הראשון הנזכר לעיל, וביחד היו ידועות כ'טריוויום' (trivium) שפרושה 'דרך השלושה'. ארבע האמנויות האחרות, שהשתייכו לזרם השני, הנזכר לעיל, נודעו כ'קואדריוויום' (quadrivium) – 'דרך הארבעה'[13]. להלן החלוקה המדויקת (אותה ניתן מצוא מתוארת גם

[11] Victor Zuckerkandl, *The Sense of Music*, p. 77

[12] הדמויות החשובות שבתהליך הקנוניזציה של שבע האמנויות הליברליות הם וורו (Varr, 1st cent. B.C.) (למרות שהוא דיבר על <u>תשע</u> אמנויות, כי חוץ מדקדוק, רטוריקה, לוגיקה, אריתמטיקה, גיאומטריה, אסטרונומיה ומוסיקה, וורו גם ציין ארכיטקטורה ורפואה כאמנויות ליברליות), מרטיאנו קפאללה (Martianus Capella, 5th, cent. A.D.), קאסיודורוס (Cassiodurus, c. 485, c. 575 A.D.), בואתיוס (Boethius, c. 480-524 A.D.) ואיסדור מסביליה (Isadore of Seville, d. 636, A.D.).

[13] נראה שבואתיוס היה הראשון שהשתמש במונח 'קואדריוויום' לאמנויות המתמטיות.

בתמונה אצל בויאר (Boyer, 1985) מציגה את אומנויות הליברלים בתחריט של המאה ה-16:



לפני שנדון בשאלה מדוע המוסיקה נמנית כאחד מארבעת התחומים המתמטיים בקואדריוויום, ראוי להתייחס למונח 'אומנות ליברלית'.

המושג 'אומנויות ליברליות' צמח, כך נראה, מהמושג היווני 'egkuklios paideia'[14], שפירושו באופן מילולי 'התוכנית (Curriculum) לילדים'. מכאן מתאים לחשוב שהמילה 'ליברלי' במושג 'אומנויות הליברליות' נגזר מהמלה הלטינית liberi שפרושה 'ילדים'. אך למרות המובן המילולי של 'egkuklios paideia', היוונים הבינו מונח זה בדרך כלל כ'תכנית כוללת'; כמו כן, המילה 'ליברלי' במושג 'אמנויות הליברליות' נגזרת מהמלה הכללית יותר liber שפרושה 'חופשי', דהיינו, ה'אומנויות הליברליות' הן אומנויות לאנשים חופשיים. אף על פי כן, ניתן למצוא קשר בין liberi לבין liber ובין 'התוכנית לילדים' לבין 'תוכנית כוללת'. קשר כזה נמצא במוסד אותו אנו מייחסים לילדות ונערות יותר מכל מוסד אחר, <u>בית הספר</u>, או בלועזית, <u>school</u>. גם מקורה של המלה school, כידוע, במלה יוונית, schole, שפרושה 'פנאי'; אכן, ילדים, יותר מהוריהם, מבורכים בפנאי.

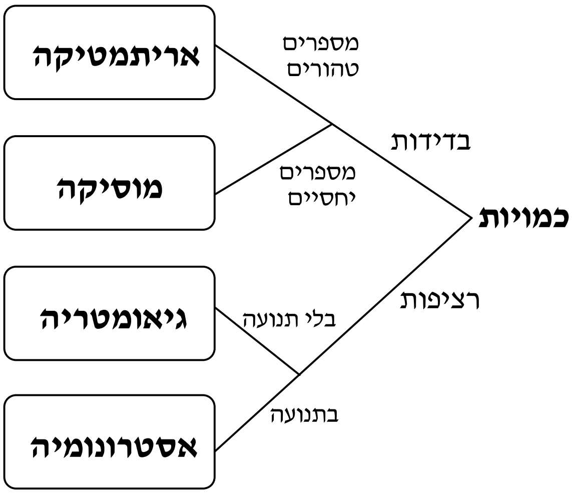
[14] H. I. Marrou, *A history of Education in Antiquity*, pp. 176-177
David L. Wagner, *The Seven Liberal Arts in the Middle Ages*, p. 32

בפרט, בבית הספר, למרות הרושם הרגיל (!), ילדים חופשיים לעשות את מה שמותר לאדם לעשות רק בזמן הפנאי – להסתכל ולנסות להבין את העולם ולהבהיר ולבטא מחשבות ביחס לעולם וביחס לעצמם. אפילו פרופסור באוניברסיטה אינו חופשי דיו לעיסוקים מעין אלה: כמו כל אדם שאינו ב-school, הוא עובד לפרנסתו ומאוים תמיד – "publish or perish"! ה'אומנויות הליברליות', במובן זה, הם הלימודים המתאימים לאדם כה חופשי[15].

עם זאת, האומנויות המתמטיות – ה'קואדרוויום' – מספקות מסגרת לבחינה טהורה של טבע העולם ללא חיפוש תועלת עבור מטרה אחרת[16]. מה מקומה של המוסיקה במסגרת זו?

ב'קואדרוויום' מופיעה חלוקה ראשונית בין גיאומטריה ואריתמטיקה מחד ולבין אסטרונומיה ומוסיקה מאידך. בימינו מתאימה חלוקה זו להבחנה בין מתמטיקה טהורה למתמטיקה שימושית – הגיאומטריה והאריתמטיקה מתייחסות למופשט ואסטרונומיה ומוסיקה מתייחסות למוחשי. אף על פי כן, גם אם הסבר זה מדויק, עדיין לא ברור מדוע נבחרו *דווקא* מוסיקה ואסטרונומיה? הרי גם בזמן העתיק עסקו בתחומים מדעיים מתמטיים *נוספים*, כמו אופטיקה -- אז למה מוסיקה ולא אופטיקה? כדי לענות על שאלה זו נבין ראשית את ההבדל בין גיאומטריה לאריתמטיקה. שני התחומים עוסקים ב<u>כמות מופשטת</u>: גיאומטריה עוסקת בכמויות רציפות ואילו אריתמטיקה עוסקת בכמויות בדידות, כלומר, מספרים. <u>בכמות מופשטת</u> הכוונה לכמות שאינה משתנה. כמויות רציפות, שאינן מופשטות, הן אלה הקשורות לתנועה. מספרים שאינם מופשטים הם מספרים יחסיים. כך, האסטרונומיה מתייחסת לכמויות רציפות בהקשר של תנועה ומוסיקה מתייחסת למספרים כאל גדלים שאינם מוחלטים. היינו המוסיקה לא מתייחסת אל קביעות מוחלטות הקשורות למספרים כגון: *'המספר שלוש גדול משתיים וקטן מארבע'*, אלא בוחנת יחסים (פרופורציות) כגון: *שלושה* חצאים גדול *מארבעה שלישים* למרות שהמספר שלוש עצמו קטן מהמספר ארבע[17]. אפשר לסכם את מבנה הקואדריוויום בשרטוט הבא[18]:

<u>הקאודריוויום</u>



במבנה זה, נראות אנלוגיות בין אריתמטיקה לגיאומטריה, בין גיאומטריה לאסטרונומיה, ובין אריתמטיקה למוסיקה. ניכומכוס טוען שהאריתמטיקה היא מעל הגיאומטריה, כי אפשר לדבר על מספרים בלי לדבר על אובייקטים גיאומטריים ואילו אי אפשר לדבר

---

[15] כאן התמקדתי על המלה 'ליברלי' ולא על המלה 'אמנות'. זאת רק בגלל אילוצי מקום וסבלנות הקורא! אך ההיסטוריה של המלה השניה לא פחות מעניינת: המלה ars (ברבים artes) היא מקבילה למלה היוונית techne והיא מקור המלים 'טכני' ו- 'טכנולוגיה'. פרושה המדויק של techne לא קל להבנה, אך הוא קרוב למלה העברית 'אומנות'; המלה מתארת תחום שנלמד באמצעות הכשרה ונסיון. בעולם העתיק, היה מתח בין נושאים שהשתייכו ל- techne לבין אלה שהשתייכו ל- theoria 'תאוריה'. במידה מסוימת, יש מפגש בין theoria ל- techne במכלול ה'אומנויות הליברליות'.

[16] זה גם המקור של ההתנגדות לאהמנויות הליברליות בין כותבים נוצרים כמו פטר דאמיאן (Peter Damian) וג'רום (Jerome): האומנויות הליברליות מכוונות לעולם ולא לאלוהים ודברים רוחניים. האירוניה בזה היא שכותבים אלו היו משכילים מאד באותן האומנויות הליברליות ובכתובים שלהם דוגמאות למופת לאומנויות הליברליות! (ראה, F. Morrison, "incentives for Studying the Liberal Arts" ב- Karl Wagner, op. cit.).

[17] להסבר דומה אך יותר מפורט למשמעות של מספרים יחסיים, ר' אריסטו, Metaphysica, 1020b-1021a, ולדיון מעמיק בן זמננו, ר' Jacob Klein, *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*, pp. 28-36.
כדאי כאן לציין שההבדל בין המוסיקה לאריתמטיקה מקביל להבדל שבין האסטרונומיה לגיאומטריה – עניין של תנועה. הקבלה זו יוצרת קשר הדוק יותר בין המוסיקה לאסטרונומיה. אצל אפלטון אנו קוראים, למשל: "נראה, אמרתי, שכמו שהעיניים שלנו בנויות לאסטרונומיה, כך גם האוזניים שלנו בנויות לתנועות הרמוניות (hos pros enarmonion phoran ota paghnai) ואלה במובן מסוים תחומי מדע אחים..." (*Rep*. VII 530d).

[18] נקומכוס מסכם במלים כך:
"… it is clear that two scientific methods will lay hold of a deal with the whole investigation of quantity ` arithmetic, absolute quantity, and music, relative quantity.
"and once more, inasmuch as part of 'size' ; is in a state of rest and stability, and another part in motion and revolution, two other sciences in the same way will accurately treat of 'size', geometry the part that abides and is at rest, astronomy that which moves and revolves" (*Arith*., I.3).

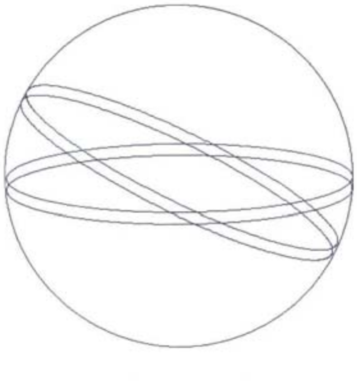
על אובייקטים גיאומטריים בלי לדבר על מספרים[19]. באשר למוסיקה ולאסטרונומיה נאמר שוב ושוב שהן 'אחיות'[20]. יותר מכך, לדעת אפלטון וגם לדעת ניקומכוס, 'המוסיקה היא מעל האסטרונומיה' בדיוק כמו 'שהאריתמטיקה מעל הגיאומטריה', ולכן, אם הן אחיות אז מוסיקה היא האחות הגדולה!

מוסיקה ואסטרונומיה – הטימאיוס של אפלטון

ביטוי יפה ביותר לדרך שבה המוסיקה מקדימה את האסטרונומיה אפשר למצוא בדיאלוג של אפלטון המתייחס לבניית העולם הנראה, *הטימאיוס* (*Timaeus*). בדיאלוג זה, נאמר שה'בורא' מערבב את ה'ישי' (being) הבלתי מחולק והבלתי משתנה עם ה'ישי' שבגופים הניתן לחלוקה ותמיד משתנה כדי ליצור סוג שלישי של 'ישי'. אז, הוא מערבב את ה'זהה' (same) הטהור והבלתי משתנה עם ה'זהה' שבגופים, וכן ה'שונה' (other) הטהור עם ה'שונה' שבגופים, כדי לקבל סוג שלישי של ה'זהה' וה'שונה'. ה'בורא' אז מערבב את שלוש התוצאות האלה (הוא מודה שהיה קשה לערבב אותן!) – ה'ישי' המעורב, ה'זהה' המעורב, וה'שונה' המעורב, על מנת ליצור את חומר נפש העולם (Timaeus, 35a). מהחומר הזה הוא חותך חתיכות, ראשית לפי המספרים 1, 2, 4, 8 ואז לפי המספרים1, 3, 9, 27. אחר כך, הוא 'ממלא' את הרווחים בין המספרים בחומר לפי מה שאנחנו מזהים כממוצעים החשבוניים וההרמוניים. כך הוא מקבל רצועה שמחולקת באופן הבא:

1 4/3 3/2 2 8/3 3 4 9/2 16/3 6 8 9 27/2 18 27

טימאיוס מעיר שבין הרווחים המקורים (אלה שנוצרו בין המספרים השלמים) יש מרווחים של יחסים כמו 2:3 , 3:4 , 8:9, ומהם גם 243:256, כלומר היחסים המתאימים לקווינטה, קאוורטה, סקונדה וסקונדה קטנה! את הרצועה הזאת ה'בורא' ממשיך וחוצה לאורכה, ואז הוא מדביק את שני החלקים באמצע כדי ליצור צורה של X, אש הוא מעקם כל אחד לצורה של מעגל, כך ששני המעגלים שנוצרו נפגשים גם בצד השני (ראה תמונה 5).



תמונה

מעגלים בנפש העולם

לפי אפלטון בדיאלוג *הטימאיוס* (36b-c)

אחד המעגלים האלה הופך להיות קוו המשווה של היקום (כלומר המעגל שבכיוון התנועה היומיומית הנראית של הכוכבים – הוא נוצר למעשה על ידי התנועה היומיומית של כדור הארץ סביב צירו) והמעגל השני הופך להיות ה'אקליפטיקי' (ecliptic) (כלומר המעגל שבכיוון התנועה הנראית של השמש במשך השנה – הוא נוצר למעשה על ידי התנועה של כדור הארץ סביב השמש).

בשלב זה נוכל להבהיר סוף סוף את פרושה של המלה 'הרמוניה'. השתמשנו במלה זו, כאשר התייחסנו לקווארטה, קווינטה, ואוקטבה כמרווחים 'הרמוניים': כוונתנו הייתה שאלה מרווחים 'שנשמעים טוב'. אולם בקטע הקודם, על פי *טימאיוס*, הופיעו רק <u>היחסים</u> שבמוסיקה <u>ללא הצלילים</u> שבה. המלה 'הרמוניה' היא מלה יוונית, קשורה לפועל 'הרמוזיין' (harmozein), שפירושו הבסיסי אינו קשור כלל למוסיקה. פירוש הפועל: 'להכניס יחד', 'להתאים יחד' 'לשלב' או 'לחבר', כמו שמכניסים יחד קרשים בדופן של אונייה מעץ. למשל, במשפט הראשון בספר הרביעי של *האלמנטים* של אויקלידס מופיעה הבעיה "להכניס (en-harmosai) במעגל מיתר שווה לקטע נתון...". בראשית הדיאלוג נאמר, שהחיבורים היפים ביותר, ולכן המתאימים ביותר בשביל גוף היקום, הם הפרופורציות בין יחסים[21]. כך כאשר טימאיוס אומר ש"הנפש עצמה

[19] Nich., *Arith.* I.4

[20] למשל בקטע מאפלטון שצוטט למעלה. ר' גם Nich. Arith. I.3, ארכוטס (Archytas of Taras, fl. 375 B.C.) ב-פורפורי *Commentary on Ptolemy's Harmonics* (Porphyry, c.234 – c.305 A.D.)

[21] *Tim.* 31c. בטכסט מופיעה רק המלה 'פרופורציה' (analogia), אך פרופורציה היא <u>תמיד</u> בין יחסים (logoi).

אמנם בלתי נראית [ואפשר להניח, בלתי נשמעת] אבל היא משתפת בהגיון (logismou de metexousa) ובהרמוניה (harmonias) ..." (Timaeus, 36e-37a) הוא מתכוון שהנפש בנויה לפי פרופורציה; הרמוניה קיימת במבנה היסודי של העולם, לאו דווקא בצלילו. יותר מאוחר, כאשר טימאיוס מדבר על צליל ומוסיקה באופן מפורש, הוא שוב מדבר על הרמוניה, אך הפעם תוך התייחסות ל'התאמה יחד' בין מבנה נפש העולם לבין נפש האדם: "מוסיקה, ...במידה שמוסיקה משתמשת בצלילים נשמעים, נתונה למען הרמוניה. והרמוניה, שהיא בעלת תנועות דומות לסיבובים בנפשנו, נתונה לנו על-ידי המוזה לאדם, שמנצל את המוזה בחכמה, לא להנאה אי-רציונלית (hedonen alogon), כפי שמניחים כיום, אלא כעזרה לסיבובים הפנמיים של נפשנו כאשר יש בהם דיסוננס (anarmoston, כלומר 'חוסר הרמוניה') וכדי לעזור להחזיר סדר והרמוניה [כאן לא harmonia אלא מלה מוסיקלית אחרת, symphonia] (Timaeus, 47d) במובן זה, הצלילים של המוסיקה רק מעבירים את ההרמוניה האמיתית הנמצאת ביחסים בין המספרים המרכיבים את היקום. לפיכך, באוסף הכתובים על מוסיקה מהמאה התשיעית הנקראים *סכוליה אנכיריאדיס* (Scholia enchiriadis) כתוב: "מה שיפה במנגינות נוצר על ידי מספר באמצעי הממדים הפרופורציוניים בצלילים...צלילים נעלמים מהר, אך מספרים, שמוסתרים על ידי המרכיב הגופני שבצלילים ובתנועות, אלו נשארים"[22].

סיכום: האמנויות הליברליות בעידן המודרני

הדיון על הטימאיוס של אפלטון מסביר מדוע המוסיקה, ולא תחום אחר בעל היבט מתמטי, תופסת מקום כה מרכזי באומנויות הליברליות. הוא מחזק ראייה של האומנויות הליברליות כמכלול בעל מבנה אחיד ואחוד, כמסגרת להסתכלות בעולם כולו. בתקופה המודרנית התרחשו שינויים מהותיים במבנה האומנויות הליברליות ובמקומן בתפיסה שלנו לגבי חינוך והשכלה.

אחד השינויים הבולטים ביותר הוא שהמוסיקה עברה מהאומנויות המתמטיות לאומנויות הקשורות לביטוי, ובפרט לביטוי עצמי, דהיינו לטרוויום. יחד עם זאת, הלוגיקה עברה מהטרוויום לקואדריוויום, ואף הפכה להיות תחום מרכזי, המאפיין את המתמטיקה. יתר על כן, אפשר להצביע על המקום המרכזי של הפיסיקה המודרנית, ובכלל של המדעים המדויקים, בקואדריוויום המודרני. הירידה במעמד המוסיקה היא, במידה רבה, תוצאה של עלייתה של הפיסיקה כתחום יסודי: אכן, כבר במאה ה-17 המוסיקה המדעית נתפשה כנושא מתוך הפיסיקה, ותו לא[23]. אי אפשר להתעלם מהרחבת הידע שהתרחשה יחד עם השינויים הנזכרים לעיל, ואף אחד לא יכול לשאוף לחזור לרמת הידע במדעים של ימי הביניים. למרות זאת, יש מקום לשאלה: האם יש מה ללמוד ממסורת האומנויות הליברליות של אז? לדעתי, התשובה חיובית. ראשית, השאלות המתבקשות תוך כדי עיסוק באומנויות הליברליות מלכתחילה עדיין רלבנטיות: (1) מהם הלימודים המתאימים לאדם חופשי? כמובן, לשאלה זו היבטים פוליטיים, כאשר חושבים על אדם חופשי בתוך חברה חופשית או חברה דמוקרטית. אך השאלה אינה מכוונת ללימודים המתאימים לאזרח בדמוקרטיה, אלא גם להתנגשויות ולמיזוגים האפשריים בין לימודים אלה לבין לימודים המתאימים לאדם בעל schole, פנאי, כלומר בעל זמן בו הוא משוחרר מכל התחייבויות לחברה או לצורכי פרנסה. (2) האם הלימודים שלנו מהווים מסגרת כוללת? כפי שאמרנו האמנויות הליברליות היו מכלול שלם והעיסוק במוסיקההעמיד בפנינו אפשרות של הסתכלות בעולם כשלם. אנו נחשפים למידע רב ועולה צורך בחינוך להתמודדות עם כמות גדולה של עובדות שמשתנות כל הזמן. אך מרוב אינפורמציה, נראה לי שאיבדנו את היכולת ואת הרצון לשאול שאלות יסודיות המפנות אותנו למבט על העולם כולו. ניתן ללמוד מהאמנויות הליברליות שעוד קיימת אפשרות לשמוע לא רק את צלילי העולם אלא גם את ההרמוניה שלו.

---

[22] Strunk, p.137. בואתיוס מבדיל בין שלושה סוגים של מוסיקה: *מוסיקה של העולם* musica mundane וזאת המוסיקה שללא צלילים, כמו זאת עליה דברנו בהקשר *הטימאיוס*), *מוסיקה של האדם* (musica human – זאת המוסיקה שבין הנפש והגוף. כאשר מדברים על מוסיקה שנוגעת בנו או מניעה אותנו, אזי מדברים על musica humana), *ומוסיקה כלית* (musica instumentalis) (*De institutione musica*, I.2) ר' גם Theodore C. Karp, 'Music' ב-Wagner, pp. 175.

[23] אף על פי כן, תהליך זה לקח זמן ובקשר זה, יש לציין שאוילר (L. Euler) כתב ספר הנקרא Tentamen Novae Theoriae Musicae, 1739, בן כ-200 עמודים המוקדש לתורה מתמטית של המוסיקה. בשנים האחרונות יש התעוררות מסוימת בגישה מתמטית למוסיקה גם בין מלחינים כמו מלטון בבית (Milton Babbit) ואיאניס זנאקיס (Iannis Xenakis) וגם בין מתמטיקאים (ראה Donald B. Parker, "Number Harmony").

ביליוגרפיה

שלח, אביב. *לקסיקון דביר מוסיקה*. תל-אביב: דביר הוצאה לאור, 1990.

שליטא, ישראל. אנציקלופדיה למוסיקה. תל-אביב: יהושע צ׳צ׳יק הוצאת ספרים בע״מ

Cohen, H. F. "Musical Intervals." In *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. Vol. I*. I. Gratten Guinness, ed. London/ New York: Routledge, 1994.

Cohen, H. F. *Quantifying Music: The Science of music at the First Stage of the Scientific Revolution, 1580-1650*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1984.

Cornford, Francis MacDonald. *Plato's Cosmology: The* Timaeus *of Plato*. Indianapolis: Library or Liberal Arts (Bobbs-Merrill Company, Inc), 1975.

Crocker, Richard L. *A History of Musical Style*. New York: Dover Publications Inc. 1986.

Heath, Thomas L. *A History of Greek Mathematics*. 2 vols. Oxford: Clarendon Press, 1921.

Klein, J. 1965. "On Liberal Education." Lecture delivered March 25, 1965, at the Colloquium held at St. Mary's College, California.

Klein, J. 1968. Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra. Trans. by Eva Brann (from "Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra" in Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik (Abteilung B: Studien), 3 (fasc. 1, 1934), 18-105 and 3 (fasc. 2, 1936), 122-235), Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press.

Marrou, H. I. *A History of Education in Antiquity*. George Lamb trans. New York: Mentor Books, 1964.

Mueller, Ian. "Mathematics and Education: Some Notes on the Platonic Program" In PERI TON MATHEMATON, *Apeiron*, vol xxiv, no.4, 1991.

Nicomachus of Gerasa. *Introduction to Arithmetic*. Martin Luther D'Ooge, trans. Annapolis, MD.: St. John's College Press.

Papadopoulos, Athanase. "Mathematics and Music Theory: From Pythagoras to Rameau." *The Mathematical Intelligencer*, vol. 24, no.1, 2002.

Parker, Donald B. "Number Harmony." *The Mathematical Intelligencer*, vol.8, no.4, 1986.

Plato. *Opera Omnia*. J. Burnet (ed). Oxford, 1900-1907.

Strunk, Oliver. *Source Readings in Music History: From Classical Antiquity through the Romantic Era*. New York: W. W. Norton & Company, Inc., 1950.

Thomas, Ivor. *Greek Mathematical Works*. 2 vols. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1980.

Wagner, David L. *The Seven Liberal Arts in the Middle Ages*. Bloomington, Indiana: Indiana University Press, 1986.

Wheelwright, Philip. *The Presocratics*. Indianapolis, Indiana: Bobbs_Merrill Educational Publishing, 1960.

Zuckerkandl, Victor. *The Sense of Music*. Princeton: Princeton University Press, 1959.

Zarlino, Gioseffo. *The Art of Counterpoint: Part Three of* Le Istitutioni Harmoniche, 1558. Trans. Guy A. Marco and Claude V. Palisca. New Haven/London: Yale University Press, 1968.