הנושא: מלימודי המתמטיקה האלמנטרית לעבודה נסיונית בלימודי הנדסה

הוכן ע"י: אריה כרוך ז"ל.

תקציר: בחומר מובאים כלשונם ההקדמה והפרק השני בחוברת בשם "מלימודי המתמטיקה האלמנטרית" שכתב מורה למתמטיקה – אריה כרוך ז"ל. החוברת התפרסמה בהוצאת "השכלה" בשנת תרפ"ח. הפרק המובא כאן מתאר דרך ממחישה לטיפול במשפטים בגיאומטריה העוסקים במצולעים שווי שטח.

מילות מפתח: הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטרית המישור, שטח, מרובע, מלבן, מקבילית, משולש, שיטות וגישות הוראה, הוראה אינדוקטיבית.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 31, תשס"ד 2004, עמודים 51-54.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.

בטעם של פעם

מלימודי המתמטיקה האלמנטרית

– לעבודה נסיונית בלימודי הנדסה –

אריה כרוך ז״ל

אריה כרוך ז"ל שימש כמורה למתמטיקה בביה"ס הריאלי בחיפה וכתב ספרי לימוד. במהלך עבודתי נתקלתי בחוברת מעניינת בשם 'מלימודי המתמטיקה האלמנטרית' בהוצאת 'השכלה', שהתפרסמה לראשונה בשנת תרפ"ח. בחוברת הופיעו שני פרקים: הראשון בשם פעולות החשבון במספרי אומד. השני – לעבודה נסיונית בלימודי הנדסה. בחרתי להביא כאן כלשונם את ההקדמה לחוברת כולה ואת הפרק השני, המציע דרך ממחישה לטיפול במשפטים בגיאומטריה העוסקים בצורות שוות שטח. הוכחת שוויון השטחים מתבצעת על-ידי גזירה (פירוק) של צורות שוות שטח לצורות חופפות. בשנת תשס"ד ניתן בודאי להרכיב פעילות מקבילה בעזרת מחשב.

ערך מוסף לפרסום אני רואה כאן, היות ובית הספר הריאלי העברי בחיפה מציין השנה את שנתו ה- 90.

חמוטל דוד

הקדמה

החומר הכלול בחוברת זו נכנס עוד לפני כמה שנים לתכנית הלימודים של החשבון והנדסה הפרופדיאותית בכיתות ב׳ ו-ג׳ [כיתות ח׳ ו-ט׳] של בית הספר הריאלי העברי בחיפה. והנני מקווה שגם בתי-ספר אחרים בארץ-ישראל ימצאו עניין בפרובלימות אלו. מתכוון אני גם לכיתות הגבוהות של בתי הספר העממיים.

פרק א כולל את תורת החשבון במספר האומד (מספרים בלתי מדויקים). לחשבון הזה יש מלבד הערך העיוני גם ערך שימושי רב. במקום להשתמש בלוחות הלוגריתמים או בסרגל הלוגריתמי נכון יותר לערוך את הפעולות לפי כללי החשבון במספרים בלתי מדוייקים. על-ידי כך אפשר להשתחרר במקרים רבים מחשבון השגיאות, היות והתוצאה המתקבלת בחשבון זה נמצאת כבר בתחומי השגיאות האפשריות. יש לאופן החשבון הזה גם ערך בתור קיצור הפעולות במספרים מדוייקים, אם דיוקה של התוצאה או מספר ספרותיה נקבע מראש.

הכלל של התפרקות הצורות הפלנימטריות אשר בפרק ב נותן, לפי דעתי, את הפתרון לפרובלמה החשובה של המחשת המושג על שטח המצולעים. ואולם הרבה מושגים הנדסיים ומתמטיים בכלל עוד לא מצאו את פתרונם בהמחשתם בדרך בלתי אמצעית. הנה, למשל, נפח הגופים אינו מוצא לו כלל הדומה לזה של שטח הצורות הפלנימטריות; היינו, לא כל הגופים השווים בנפחם אפשר לפרק לחלקים תואמים שווים.

כל השאלות הללו מחכות לפתרונן וכדאי להתעסק בהן.

חוברת זו היא הראשונה לשורת חוברות שאני אומר להוציא בלמודי המתמטיקה האלמנטרית, כאשר החומר בהן בא בעיקר מתוך עבודתי בביה״ס הריאלי בחיפה. הנני מקווה, כי חוברת זו תמצא לה ידידים וכל הערה והוראה אקבל ברצון.

בהזדמנות זו אני מודה לפרופ׳ ד״ר י. גרוסמן בעד הערותיו החשובות לתוכן החוברת ולה.ד. שלונסקי שהשתתף איתי בעיבוד החומר וסייע לי בהוצאתה ועריכתה של החוברת.

חיפה, כסלו תרפ״ח אריה כרוך

לעבודה נסיונית בלימודי הנדסה

העבודה הנסיונית בלימודי הנדסה מגבירה את התעניינות התלמיד במתמטיקה. בעזרתה רוכש לו

התלמיד מושגים מתמטיים ביתר הבנה ובהירות ובטחונו בהם גדל. העבודה והנסיון נותנים לתלמיד את האפשרות להיווכח באמיתותם של המשפטים והוא בוטח בהם בדרך זו יותר מאשר בדרך ההוכחה המופשטת הדדוקטיבית, שאת עומקה והיקפה טרם יכול להבין. רק לאחר שסיגל לעצמו את המושגים והכללים מתוך עבודה ונסיונות מוחשיים הרי הוא יכול לגשת גם לפרובלימה בכללותה. אל כל מושגי המשפט המופשטים נקשרת אצל התלמיד תמונה ברורה מתוך עבודתו הקודמת.

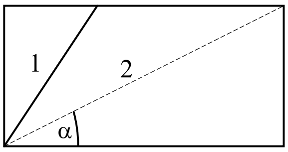
רצוי שהתלמיד יעבוד בשיטה נסיונית על אותם הכללים והמושגים, שבהמשך לימודיו הוא נתקל בהם לעיתים קרובות, שכן באופן זה תמלא העבודה את תפקידה הפדגוגי, שהוא: לתת יסוד מוחשי לכל המושגים והמשפטים היסודיים.

הנני מביא בזה לדוגמא כלל אחד ידוע, היכול לשמש אמצעי יפה לעבודה נסיונית בהנדסה ולעורר התעניינות אצל התלמידים. וזה הכלל:
שני מצולעים השווים בשטחם, שווים גם בהתפרקותם.
היינו: תמיד אפשר לחלק כל אחד משני המצולעים למספר חלקים שווה, וחלקי מצולע אחד יהיו חופפים את החלקים המתאימים של המצולע השני, או בנוסח אחר: תמיד אפשר למצוא חלקים כאלה אשר מהם נוכל לבנות את שני המצולעים גם יחד. המשפט הזה משמש אמצעי יפה להוכיח בו משפטים הנדסיים רבים בדרך שרטוט וגזירה, היינו: באופן בלתי אמצעי.

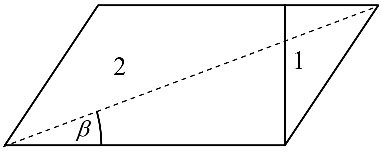
בגישתנו, למשל, למשפט זה: שני משולשים השווים בבסיסם וגובהם שווים גם בשטחם – יכול התלמיד להיווכח, היינו: לנסות את המשפט, אם ישרטט את שני המשולשים על נייר מילימטרי ויספור את מספר המילימטרים המרובעים אשר בכל משולש ומשולש לחוד. הדרך הזאת אינה מדויקת ואינה נוחה. אבל אם נשתמש במקום זה בכלל הנ״ל, היינו: אם נפרק את שני המשולשים לחלקים מתאימים שבעזרתם נוכל לבנות את שני המשולשים גם יחד, ייווכח התלמיד באופן בלתי אמצעי שהמשפט נכון הוא ויבטח בו.

הנני מביא בזה לדוגמא כמה משפטים הנדסיים המבוארים בדרך ההתפרקות:

א. מלבן ומקביליות השווים בבסיסם וגובהם, שווים בשטחם וגם בהתפרקותם. שרטוטים 1א ו-1ב מראים את אופן הפרוק במקרה שהזווית α גדולה מ- β והשרטוטים 2א ו-2ב את אופן הפרוק במקרה שהזווית α קטנה מ- β.

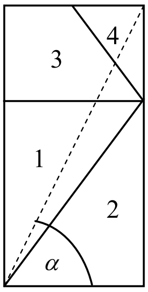


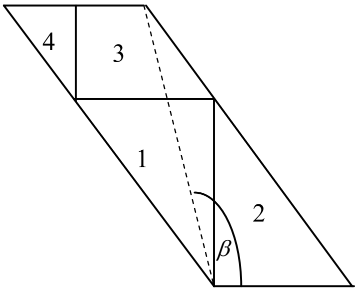
שרטוט 1א



שרטוט 1ב

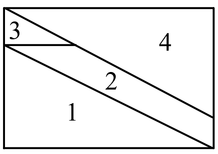
בהתאם לשרטוטים (1, 2) אפשר תמיד לפרק מקבילית לחלקים שמהם יבנה מלבן השווה לה בבסיסו וגובהו. בדרך זו אפשר גם לפרק לחלקים מתאימים שתי מקביליות השוות בבסיסן ובגובהן.

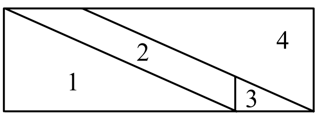




שרטוט 2א שרטוט 2ב

ב. השרטוטים 3א ו-3ב מראים את אופן הפרוק של שני מלבנים השוים בשטחם.





שרטוט 3א שרטוט 3ב

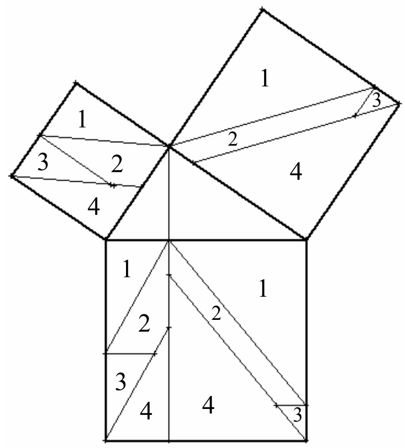
צריך לחתוך בשני חתכים מקבילים, שני משולשים שבסיסם – בסיס של מלבן אחד וגובהם – גובה של המלבן השני. ע״י כך מקבלים מכל מלבן שני משולשים החופפים זה את זה וכמו כן את המשולשים של המלבן השני.

נשארות, איפוא, שתי מקביליות השוות בשטחן ובבסיסן ועל כן גם גובהן. המקביליות האלה שוות בשטחן מפני שהחסרנו שני משולשים חופפים משני מלבנים השווים בשטחם.

הפרוק של שתי מקביליות השוות בבסיסן וגבהן מתברר מתוך השרטוטים 1 ו-2.

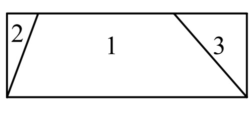
יוצא מזה שאפשר תמיד לפרק שני מלבנים השווים בשטחם לחלקים מתאימים שווים.

בעזרת השרטוטים 3א ו-3ב נוכל להיווכח שריבוע הבנוי על ניצב של משולש ישר-זווית, שווה בהתפרקותו למלבן שבסיסו – היתר, וגובהו – השלכת הניצב על היתר. את זה מראה שרטוט 4 וזוהי הדרך הנסיונית להוכחת משפטו של פיתגורס*.

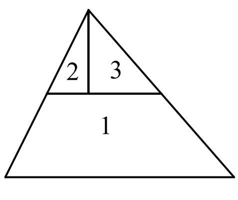


שרטוט 4

ג. א) משולש ומלבן השווים בבסיסם וגובה המשולש כפלים כגובה המלבן, שווים בהתפרקותם. פרוק זה אפשרי תמיד. על-ידי חתך מקביל לבסיס המשולש דרך אמצע הגובה, מתקבלים שני חלקים שמהם נבנית מקבילית. בהתאם לשרטוטים 1, 2 נבנה מן המקביליות מלבן.



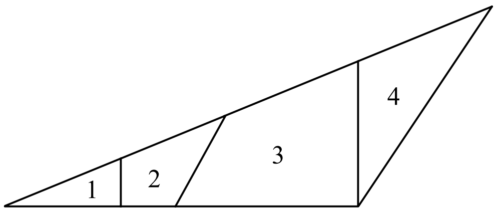
שרטוט 5א



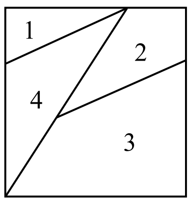
שרטוט 5ב

* הסבר: שטחו של הריבוע השמאלי (ימני), שצלעו היא הניצב הקצר (הארוך), שווה לשטחו של המלבן השמאלי (הימני), אשר צלעותיו הן יתר המשולש וההיטל של הניצב הקצר (הארוך) על היתר.

ב) משולש ומלבן השווים בגובהם ובסיס המלבן כפלים כבסיסו של המשולש שווים בהתפרקותם.



שרטוט 6א

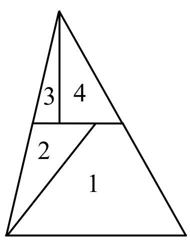


שרטוט 6ב

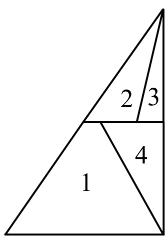
גם הפרוק הזה אפשרי תמיד על-ידי חתך, דרך אמצע הבסיס מקביל לצלע. מתקבלים שני חלקים היוצרים מקבילית שגובהה הוא גובה המשולש ובסיסה – חצי בסיס המשולש. המקבילית הזאת שווה בהתפרקותה למלבן, על כן גם המשולש שווה בהתפרקותו למלבן.

ד. שני משולשים השווים בבסיסם וגובהם, שווים גם בהתפרקותם.

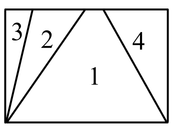
שני משולשים שווים (בהתאם לשרטוט 5, 6) למלבן אחד משותף שבסיסו כבסיס המשולשים או שגובהו כגובה המשולשים.



שרטוט 7א



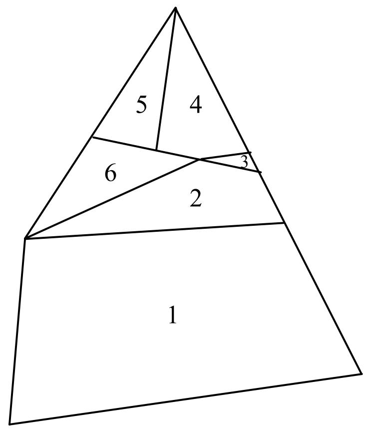
שרטוט 7ב



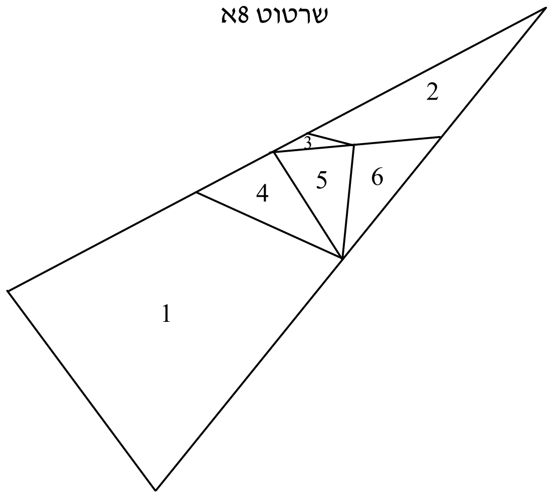
שרטוט 7ג

המלבן הזה השווה בהתפרקותו גם למשולש האחד וגם למשולש השני, מתפרק לחלקים שמהם אפשר לבנות את כל אחד משני המשולשים. על כן שווים שני המשולשים בהתפרקותם.

ה. השרטוטים 8 מראים את אופן הפרוק של מרובע ומשולש השווים בשטחם.

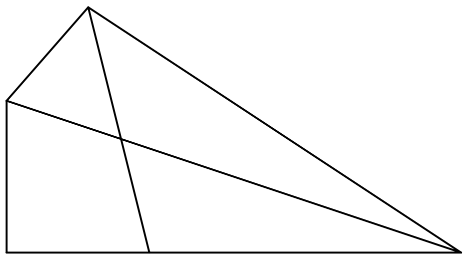


שרטוט 8א



שרטוט 8ב

הנני מביא בזה את הוכחת הכלל הנ״ל בדבר פרוק שני מצולעים השווים בשטחים.
כל מצולע אפשר להפוך למשולש השווה לו בשטחו בעזרת המשפט האומר כי שני משולשים השווים בבסיסם וגובהם שווים גם בשטחם.
בהתאם לשרטוט 7 מתפרקים שני משולשים השווים בבסיסם וגובהם לחלקים מתאימים שווים.
בהתאם לשרטוט ההופך מצולע למשולש, נוכל, אפוא לפרק גם כל מצולע לחלקים מתאימים כדי לבנות מהם משולש השווה לו בשטחו.



שרטוט 8ג

בדרך זו מתקבלים במקום שני מצולעים, שני משולשים השווים בשטחם. את שני המשולשים האלה אפשר, בהתאם לשרטוטים 5, 6 לפרק לשני מלבנים השווים בשטחם למשולשים הללו, והיות והמשולשים שווים זה לזה בשטחם – יהיו גם שני המלבנים שווים זה לזה בשטחם.
בהתאם לשרטוטים 3א ו-3ב, שווים בהתפרקותם שני מלבנים ששטחם שווה. יוצא מזה שגם שני המצולעים הנ״ל שווים בהתפרקותם.

אם כן, לכל תרגיל מן הסוג הנ״ל יש פתרון. בזה – חומר רב לעבודה לשאלות ולתרגילים שונים.