



## הנושא: **מי צריך מתמטיקה?** **העיתונאי אבי כצמן משוחח עם עופר ליבה**

הוכן ע"י: עופר ליבה.

תקציר: במאמר מציג עופר ליבה את תפיסתו ביחס למתמטיקה כפי שעלתה בראיון אישי עם העיתונאי אבי כצמן. הראיון שודר ברדיו ירושלים לפני כארבע שנים, במסגרת התוכנית השבועית: "שישה מאזינים ואורח".

מילות מפתח: ראיון אישי, תפיסת המתמטיקה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 31, תשס"ד 2004, עמודים 55-62.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

# מי צריך מתמטיקה?

## העיתונאי אבי כצמן משוחח עם עופר ליבה\*

ראיון אישי

עופר ליבה, האם יהיה נכון להגדיר  
מתמטיקאי?

למה כשאנו אומרים 'מתמטיקה', ישנה מין  
'תגובת צמרמורת'? אני לא מדבר עליך או על  
מתמטיקאים כמו, אלא על אנשים 'מהשורה'.

אני אפתיע אותך, גם לי יש פחד ממתמטיקה, ואני  
אבהיר: אם מדובר בנושא שאני מכיר מלימודי, או  
שלימדתי אותו מספר פעמים, אז 'הכל בסדר'. אך אם  
מדובר בנושא חדש שאני מנסה להתמודד איתו, אז יש  
לי צמרמורת לא קלה...

מדוע המתמטיקה 'מצמררת'?

אין ספק שמדובר בדיסציפלינה קשה. ההפשטה  
מרחיקת-לכת, הסמלים מפחידים, המושגים מפחידים  
ואפילו שמותיהם: אם אני נכנס לכתה ואומר "היום  
נלמד לוגריתמים", והתלמידים מעולם לא שמעו את  
המילה, אז הם נבהלים מהמילה עצמה, עוד לפני שדנים  
במשמעותה.

כשאנו אומרים 'מתמטיקה', למה אנו בעצם  
מתכוונים? ראשית, אולי, על כמה ענפים מדובר?

בספר, שלדעתי הוא התנ"ך של התרבות המתמטית,  
'החוויה המתמטית', מאת פיליפ דיוויס וראובן הרש,  
אשר התפרסם לפני כ-20 שנה, כתוב שקיימים כ-  
3000 ענפי מחקר. סטטיסטיקה יותר דרמטית מדברת  
על כ-200,000 משפטים חדשים, אשר מתפרסמים כל  
שנה ברחבי העולם, ולא מדובר במשפטים כמו אלה  
שלמדנו בגיאומטריה התיכונית, שהוכחתם תופסת  
כחצי-עמוד, אלא כאלה שהוכחתם משתרעת לפעמים  
על-פני עשרות ומאות עמודים... מדובר אם-כן ב'עסק'  
מסועף למדי ולדעת רבים וטובים אף מסואב, כי  
החוקרים מתמקדים לעתים בנישה מאוד ספציפית  
וצרה, שמעטים יודעים במה היא בעצם עוסקת ומה  
אמורים לעשות איתה.

בסביבתי החברתית והמקצועית נוהגים לקרוא לי  
מתמטיקאי, אך אני מעדיף להגדיר מתמטיקאי כאחד  
שלמד הרבה מתמטיקה, הגיע לדוקטורט ולפרופסורה,  
וחוקר סוגיות מתמטיות מאוד מתקדמות. להגדרה זו  
אינני מתאים, אך אם נגדיר מתמטיקאי כאחד שחי  
ממתמטיקה, עוסק בה ברמה זו או אחרת – ואני עוסק  
בה ברמת החינוך, ההדרכה והכתיבה, ופה ושם מבצע  
מחקר ומעלה אותו על הכתב – אז התשובה חיובית.

אז כששואלים אותך "מה אתה עושה?", אתה  
עונה...?

מלמד, מעביר השתלמויות ופרוייקטים מיוחדים, כותב,  
חוקר, וגם – לומד... יש הרבה מה ללמוד!

איך אדם מן הישוב מגיע לעיסוק האיזוטרי הזה  
שנקרא מתמטיקה?

בצעירותי התחנכתי בבתי-ספר צרפתיים בחו"ל, כי  
התלוויתי להורי שהיו בשליחות מטעם המדינה,  
ובצרפת, המתמטיקה היא *תרבות* – הרי מתמטיקאים  
רבים וטובים היו צרפתים – ואופן הלימוד שם הוא  
יעיל ומעניין במיוחד. כך הוקסמתי לראשונה  
מהמקצוע. אני רוצה לציין שאינני בטוח כלל שהייתי  
עוסק היום במתמטיקה לו למדתי בתיכון ישראלי,  
וזאת מסיבות שאולי נדבר עליהן אחר-כך. ברור  
שבמסגרת האוניברסיטה ובאמצעות לימוד עצמי,  
הרחבתי את הידע באופן משמעותי.

\* הראיון שודר ברדיו ירושלים בתאריך 31.7.99, במסגרת  
התוכנית השבועית של אבי כצמן: "שישה מאזינים ואורח".  
הכתוב כאן הוא גירסה ערוכה ומקוצרת של הראיון.

🔊 כשאומרים 'מתמטיקה', האם מתכוונים למה שקראנו בכתה א' 'חשבון'?

החשבון הוא הבסיס של המתמטיקה, אך עיסוקו במספרים, ובחטיבת-הביניים מתחילים ללמוד אלגברה. במקום המספר 2 או המספר 3, רושמים  $x$ , בונים ביטויים עם ה- $x$  הזה (או עם אות אחרת שמייצגת מספר), פותרים משוואות וכן הלאה. ברגע שאנו לא מסתפקים במספרים, אלא מערבים גם משתנים ונעלמים, אנו נמצאים מעבר לחשבון הפשוט של בית-הספר היסודי, אנו עוסקים במתמטיקה. עם זאת, אפשר לומר שהחשבון הוא חלק מהמתמטיקה, כי כבר בכתה א' הילדים עוסקים בהפשטות. הם לומדים לדוגמה לעבוד עם המספר 3. הרי 3 לא קיים במציאות – אנו אומרים שלושה תפוחים, שלושה עצים, שלושה ספרים וכן הלאה, אך מה זה '3'? וכשאנו אומרים  $2+3$ , אנו חייבים לדמיין, למשל: הנה שני ספרים ולידם עוד שלושה ספרים, אז כמה ספרים יש בסך הכל? חמישה ספרים...

🔊 אנו מדברים על המתמטיקה, אך השאלה נשארה עדיין פתוחה: מה זו מתמטיקה? מניפולציה של סמלים?

מניפולציה של סמלים היא חלק מהעניין. הרי הסמלים מייצגים מושגים. לדוגמה: המספרים הם מושגים המיוצגים על ידי סמלים. הסמלים גם מקצרים את הכתיבה, אנו לא רושמים 'שתיים' אלא 2. למה הקיצור מועיל? ניקח לדוגמה משוואה פשוטה כמו  $3x + 2 = 5$  אם היא רשומה כך, היא ברורה, וטכניקת הפתרון גם היא ברורה, אך אם נרשום אותה במילים: "שלושה איקס(ים) ועוד שתיים שווה לחמש", לא נראה דבר... לסמלים יש, אם כך, תפקיד של *בהירות* בנוסף *למעצמותיות*.

כעת, המתמטיקה לא עוסקת רק בסמלים, הרי הם בסך-הכל כלי. בגיאומטריה אנו חוקרים *צורות*. האלגברה האוניברסיטאית עוסקת (בין היתר) בחקר *מבנים*, לדוגמה בתורת החבורות. במה הדברים אמורים? נניח שאנו שמים לב שלאוסף המספרים יחד עם אחת הפעולות המוכרות כגון חיבור יש תכונות מסוימות, ומתברר שבתחום אחר לגמרי, כגון פונקציות או גיאומטריה, אנו רואים תופעות דומות, רק שהפעם מדובר בייצורים מתמטיים שהם לא מספרים, אז אנו אומרים שיש לנו מבנה אנלוגי. נוצרת מין 'אחידות',

ואם חוקרים את המבנה באוסף מסוים, אז התגליות לרונטיות גם לתחום האחר בעל המבנה האנלוגי, ואפשר להתקדם לכיוונים חדשים.

🔊 מה עושה המתמטיקה שמבחין אותה, נאמר... מהלוגיקה? או מהכימיה?

הלוגיקה היא כלי מרכזי במתמטיקה, כי אנו עוסקים כל העת בהוכחות. הוכחה היא תהליך דדוקטיבי, ולכן היא בהכרח כפופה לחוקי הלוגיקה. אפשר לומר שכל המתמטיקה, שנלמדת בתיכון ובמסגרת לימודי תואר ראשון, מסתמכת על הלוגיקה הקלאסית, ה'דו-ערכית', שבה אמירה היא או אמיתית או שקרית. יש גם לוגיקות אחרות.

באשר לכימיה, הרי היא מדע *אמפירי*. מבצעים בה תצפיות על תופעות במישור מסוים של המציאות. כמו בפסיקה ובביולוגיה, חוזרים על התצפיות, במקומות שונים ובידי אנשים שונים. כדי לוודא, שלא נכנסו אלמנטים 'זרים' לתצפית, מעלים השערה ולבסוף בונים תיאוריה ומאששים אותה. במתמטיקה, הניסוי בא 'מהראש', אם כי היום, מבצעים ניסויים מתמטיים גם בעזרת המחשב.

🔊 יש תצפיות במתמטיקה...

יותר ויותר היום, ובעצם תמיד היו. אנו חוקרים תופעות, לא כאלה של המציאות אלא תופעות מתמטיות. אומנם אפלטון אמר שהמציאות המתמטית קיימת ואנו רק מגלים אותה. אחרים אומרים: אנו לא מגלים אותה, אלא ממציאים אותה, אבל ההבדל בין המתמטיקה לתחומי מדע כמו כימיה, פסיקה, ביולוגיה, הוא ששם מדובר בתצפית על המציאות, ובמתמטיקה מדובר בתצפית על רעיונות ועל תבניות, על-אף שישנם כמובן נושאים מתמטיים שנשאבו מהמציאות, כמו האנליזה הבסיסית.

🔊 מה עם סיפורת?

אני אוהב לשייך את המתמטיקה למדעי-הרוח, כי זו אכן יצירה של הרוח, אך אם נשווה בינה לבין תחומי הרוח 'המקובלים' – אמנות, ספרות, מוסיקה – הרי באלה ישנם מרכיבים רגשיים וסובייקטיביים, שאינם קיימים במתמטיקה. הבדיקות הקפדניות והכללים הנוקשים אינם מאפשרים סובייקטיביות, ולגבי הרגש, על אף שהוא לא 'מנותק' – אנחנו בהחלט מתרגשים

מהתחכום ומהיופי שבתיאוריות או כתוצאה מגילוי – הוא איננו מרכיב בתיאוריה עצמה.

🔊 אני חוזר לשאלת היסוד "מהי מתמטיקה". הרי אנו עוסקים ביצירה אנושית, והנה יש כאן פלא גדול: אף שהמתמטיקה איננה מתבססת על תצפיות בטבע אנחנו "מוציאים את הדברים מהראש", כדברך, הרי בזכות אותם דברים אנו שולחים טילים לחלל החיצון ומפיקים את הדברים המסובכים ביותר, והמציאות 'נענית' להם. איך זה שהדברים האלה, שהם פרי רוחנו, מצליחים כל-כך ובצורה כל-כך משכנעת במציאות?

זה אכן פלא גדול, ואני לא בטוח שקיימת תשובה נחרצת לשאלה החשובה הזו. המוח שלנו גם הוא חלק מהטבע, אז יתכן שבמובן מסוים הוא מתואם עם הטבע ושהיכולת המתמטית שלו מהווה חלק בלתי נפרד מההתפתחות האבולוציונית.

🔊 כשאנו אומרים ששתיים ועוד שתיים הם ארבע, איך אנחנו יודעים את זה?

לוקחים שני תפוחים ולוקחים עוד שני תפוחים, שמים אותם יחד, סופרים ורואים שישנם ארבעה. נעשה את זה עם חפצים אחרים – זה יהיה נכון.

🔊 אבל הרעיון ששתיים ועוד שתיים הם ארבע הוא לא אינדוקטיבי. אנחנו יודעים ששתיים ועוד שתיים הם ארבע. אנו יודעים את זה כי אמרו לנו את זה?

כל ילד יודע לספור ולבצע תרגילי חשבון פשוטים כמו חיבור וחסור, והוא רואה את זה. כלומר אם אנו מדברים על ההיבט הפראקטי, אז כל אחד יודע ששתיים ועוד שתיים הם ארבע ולא שואל את עצמו 'למה'. אך אם אנו מדברים על רמות גבוהות של מתמטיקה, שבהן כל דבר נתון לספק וכל דבר דורש הוכחה באמצעות אקסיומות, הגדרות, כללים לוגיים ומשפטים, שם מוכיחים ששתיים ועוד שתיים הם ארבע. אני לא יודע אם ההוכחה יותר משכנעת מאשר לראות שני תפוחים פה ושני תפוחים שם, ולהיווכח שיחד הם מהווים ארבעה תפוחים, אבל היא הוכחה לפי כל הכללים.

🔊 למה ההפשטות חשובות כל-כך? מאיפה בא לאנשים הרצון המוזר הזה, להתעסק ברעיונות שהם לא מפה, לא מכאן, לא מעכשיו...? מה פתאום אותם אנשים מוצאים לנכון להשקיע זמן ואנרגיה בדברים כגון אלה, במקום לעשות דברים מועילים?

המתמטיקה חיונית והכרחית לקידמה המדעית והטכנולוגית ולקידמה בכלל.

🔊 אבל מעטים הם אלה שעוסקים במתמטיקה יישומית.

אם נרחיב את המושג של מתמטיקאי יישומי ונכלול בו את המהנדס, המדען, הסטטיסטיקאי, וכל אלה שעושים בה שימוש קבוע...

🔊 רבים וטובים. אבל הם לא עושים מתמטיקה, הם 'מכניסים' נתונים למחשב, והוא 'נותן' להם תוצאות.

נכון, אך יש תחומים מדעיים שבהם חסרים כלים מתמטיים, ואז פונים למתמטיקאים כדי שיעזרו במציאתם. זה קרה אפילו לאיינשטיין, הרי בשלב מסויים הייתה חסרה לו מתמטיקה, והוא ביקש סיוע. הדבר קורה לעתים קרובות, בעיקר בפיסיקה. יש לנו אם-כך היבט תועלתני שעבורו בוודאי כדאי לנו לפתח מתמטיקה.

🔊 האם הפעילות המתמטית דומה לזו של מלחינים אשר יושבים לכתוב יצירות מוזיקליות?

הפעילות המתמטית היא בהחלט יצירה ויש בה יופי, מבניות, תחכום, הפתעות, פריצות דרך, וכיוצא באלה. מחקרים רבים הובילו באופן עקיף לגילויים, אשר החוקר לא התכוון אליהם מלכתחילה, ושיושמו בשלב מאוחר יותר במתמטיקה ומחוצה לה.

🔊 אתה מדבר על תהליך של גילוי, אך המסקנות כפזיות עליך, בניגוד ליצירה מוסיקלית, שבה אתה חופשי ליצור בדרכך.

אתה בעצם מתאר כאן את ההשקפה הפלטוניסטית שהזכרנו קודם. העצמים המתמטיים (יחד עם תכונותיהם) 'נמצאים' באיזשהו מקום ואנו רק מגלים

בעולם אולי ארבעה אנשים שמבינים מה אתה עושה...

נכון מאוד!

🔊 אז צריך מידה רבה של מזוכיזם או סגפנות או נזירות כדי להשקיע כל-כך הרבה בדבר כל-כך סתום.

אני לא חושב. המתמטיקאים נהנים מאוד מעבודתם. נכון הוא שצריך המון סבלנות והתמדה. אפילו מתמטיקאי מנוסה, שקורא לראשונה חומר, שאיננו שייך לתחום התמחותו מתקשה מאוד להבין על מה מדובר, בזמן שמוסיקאי, אף אם איננו יכול לנגן מייד את היצירה הכתובה בתווים שלפניו, יכול לפחות לנגן אותה בראשו.

אז מה הפלא שאצל תלמידים, ההתמודדות עם חומר חדש גורמת לקושי? הרבה מורים לא ערים לכך, במתכוון או שלא במתכוון.

🔊 אני מניח שאין מתמטיקה 'אטונאלית', מתמטיקה שבזה לאידיאלים האסתטיים שהיוונים הניחו את יסודותיהם, או מתמטיקה שפתאום 'מחליטה להתפרע' ולעשות את הדברים אחרת לגמרי...

יש ועוד איך!

🔊 טוב, יש כמובן פריצות דרך נדירות כמו של קנטור שהזכרנו קודם, הגיאומטריות הלא-אוקלידיות, הפראקטלים של מנדלברוט, אבל בסך הכל המסגרת היא מאוד יציבה. ישנם ערכים אסתטיים בסיסיים שמקובלים על כולם לאורך כל הדרך.

המושג 'ערכים אסתטיים' במתמטיקה איננו מוגדר היטב. אין לנו כללים או 'תקן' של יופי. כל תיאוריה מגובשת, בין שהיא אורתודוקסית או לא, בין שהיא 'מתונה' או 'מתפרעת', יש בה גם אסתטיקה.

🔊 ברור, אך אני מדבר על המסגרת העקרונית, שנשמרת בעינה. אין לנו מתמטיקה 'אוונגארדית'.

יש לנו ועוד איך, ללא הרף. מדובר אכן בדברים מאוד מתקדמים ו'מוזרים'. הייתי אומר שהאוונגארד מאפיין את המתמטיקה בכל דור מחדש. התיאוריה של קנטור נחשבה בשלב ראשון כ'אוונגארדית' והיום היא נחשבת לעדינה יחסית...

אותם. אחרים יאמרו לך: לא, מדובר בסך הכל במשחק, כמו משחק השחמט, שבו אנו קובעים את הכלים ואת הכללים, ובואו נראה מה אפשר לעשות איתם. ישנם, אם כן, חילוקי דעות על אופייה של הפעילות המתמטית.

לדעתי מדובר ב'תערובת' של שתי הפילוסופיות. אינני בטוח שכל התגליות המתמטיות הן כפויית ורק 'מחכות לנו'. אם נחשוב יותר לעומק, אז חלק מהסוגיות הן כאלה, כמו המושג האינטואיטיבי של המספר, וישנן אחרות בעלות אופי מעט יותר מלאכותי, כמו המושג 'אינסוף'. במציאות אין לנו אינסוף, כל דבר הוא מוגבל אפילו אם הוא גדול מאוד. ואכן, מי שהתחיל 'להסדיר' את האינסוף ולפתח תיאוריה מגובשת – גיאורג קנטור הגדול – סבל מביקורת קשה מאוד מצד מתמטיקאים בני-דורו, כמו ליאופולד קרונקר. הם אמרו לו שהוא עוסק בשטויות והתייחסו אליו כאל שרלטן.

🔊 רדפו אותו עד שהוא השתגע ואושפז...

כך היה, אך היו לו גם כמה מעריצים, כמו דייוויד הילברט, אשר אמר עליו: "קנטור יצר עבורנו גן עדן, ואף אחד לא יגרשנו משם". בדיעבד אנו מתייחסים לתיאוריה שלו כאחת היפות והעמוקות במתמטיקה.

🔊 אפשר לסכם שאם במוסיקה זהו עניין של טעם, במתמטיקה הדברים במידה זו או אחרת כפויים, זאת אומרת אם  $a = b$  ואם  $b = c$ , אז לעולם, כאמת מוחלטת,  $a = c$ .

חייב להיות. זוהי אחת התכונות אשר מגדירות את יחס השוויון.

🔊 חייב להיות, ואם אתה כופר בכך, אז משהו איתך 'לא בסדר'... אני יכול לומר שהמוסיקה של ברוקנר בלתי נסבלת לאוזניי, אך אינני יכול לטעון: אם  $a = b$  ואם  $b = c$ , יכול להיות מקרה שבו  $a$  לא שווה ל- $c$ .

אתה יכול לנסות, אך לא תוכל להתקדם... אם על העיקרון הבסיסי הזה אנחנו לא מסכימים, לא נוכל לזוז ולא נוכל לעשות דבר.

🔊 בטח קשה להיות מתמטיקאי, כי אם אתה מלחין, אז יש קונצרט וכולם יכולים להקשיב ולהתוודע ליצירתך, ואם אתה עוסק במתמטיקה מתקדמת, בהמון כשרון ויכולת וחדשנות ומקוריות, אז יש

🔊 לפעמים יש תחושה שהמתמטיקה היא אוסף של שאלות קנטרניות שאולי לכם כייף להתעסק איתן, אך לרוב האנשים, עצם שמיעת המילה 'מתמטיקה' גורמת לרתיעה ולתגובה מהסוג "לא, רק לא זה, בבקשה!" מדוע? כיוון שאנו לא מבינים כמה ברק וקסם יש בה?

בתור אחד שאוהב מתמטיקה, אציין שני דברים שמושכים אותי למקצוע. בראש וראשונה היופי. ביופי המתמטי כמעט ולא מתנסים בתיכון הישראלי. פרקים רבים נלמדים 'בלי נשמה', ישנה התייחסות רבה מדי לסוגיות צדדיות, ועושים הרבה תרגילים מעצבנים או מיותרים. כל זה לא מביא לאהבת המקצוע. הדבר השני הוא התייחסות. מדובר ביצירה אינטלקטואלית מפוארת, רוויה ב'פסגות של חשיבה' – תעודת מופת למוח האנושי!

מצד שני אני יכול להבין אנשים שלא אוהבים מתמטיקה, וזה יכול להיות מכמה סיבות. יתכן שאנשים בכך מורים, אשר חלקם מתנהגים באופן מעט סדיסטי, ויתכן שגוף הידע פשוט לא מעניין אותם. הרי כל אדם אוהב נושאים מסוימים ואת האחרים לא. אז נכון הוא שיש מספר רב של אנשים שלא אוהבים מתמטיקה. אז מה? אף אחד לא חייב לאהוב מתמטיקה, כמו שאף אחד לא חייב לאהוב ספרות או היסטוריה או כל גוף ידע אחר. אין לי בעיה עם זה.

🔊 אז אולי צריך להסיק שלא לכל אחד מתאים ללמוד מתמטיקה, ולהוציא אותה מתוכנית הלימודים? בכלל, לצורך מה אנחנו לומדים אותה? אולי היא כל-כך זרה לחשיבה 'הטבעית' שלנו, ומיותר להעמיס אותה על אנשים שלא נמשכים אליה במיוחד?

אולי תתפלא לשמוע, אך אני מסכים עם רוב מה שאתה אומר!

🔊 החינוך המתמטי נתפס על-ידי רבים כ'משטר טרור אינטלקטואלי'. אולי עדיף היה (בשעורי המתמטיקה) ללמוד את 'עליסה בארץ הפלאות', לפתור חידות, באופן כללי 'לצחוק את המתמטיקה'. אולי יש טעות עמוקה בקונספציה?

יגדולי אני מסכים איתך, אך לא הייתי רוצה להקצין. לחידות ולשעשועים יש ערך רב, אבל אם אנחנו רוצים ללמוד מתמטיקה רצינית שדורשת בנייה מסודרת, של

נדבך על-גבי נדבך – כדי להגיע לתיאוריות המתקדמות – אז הלמידה צריכה להיות שיטתית, מדורגת ומאורגנת היטב.

עם זאת, אני מסכים שאין צורך לכפות את המתמטיקה על כל אחד. אצל רוב התלמידים שלומדים מתמטיקה ברמה של שלוש יחידות, תחושת הכפייה היא מובהקת וכואבת במיוחד.

🔊 הם מרגישים שהם כישלון, ישנה פגיעה עמוקה בדימוי העצמי שלהם...

נכון.

🔊 ...אתה לא מבין מתמטיקה? אז אתה 'אפס'...

נכון. בחברה מקובלת המשוואה 'אינטליגנטי = יודע מתמטיקה'. כדי להיכנס לאוניברסיטה, אתה צריך לדעת מתמטיקה, כי במבחן הפסיכומטרי בוחנים בין היתר את היכולת המתמטית שלך. לדעתי זו שטות גמורה! ישנם הרבה אנשים, מאוד מוצלחים ומאוד מצליחים, בכל תחומי העשייה והיצירה, אשר אינם יודעים מתמטיקה.

לימודי המתמטיקה ברמה של שלוש יחידות מהווים סבל מיותר לתלמידים ולעתים קרובות גם למורים, והם מבזים את המקצוע היפה הזה. מובילי ההוראה אומרים "נלמד אותם משהו מינימאלי, כדי שתהיה להם השכלה כללית". זו לא השכלה כללית. מלמדים אותם "קצת מזה וקצת מזה", ללא העמקה, ללא חשיבה וללא יצירתיות. הם מבינים אך מעט, הם לא יעשו עם זה שום דבר בעתיד, ואסתטיקה בודאי שאין שם.

🔊 נדמה לי שישראל היא בין המדינות הפחות טובות במתמטיקה.

אני מניח שאתה מדבר על החינוך המתמטי, כי ברמה של האוניברסיטה והמחקר, יש לנו מתמטיקאים מעולים.

🔊 כן, ידוע שהחוג למתמטיקה באוניברסיטה העברית היה מאז ומתמיד הפאר שבפאר.

נכון. אז אם אתה מדבר על הידע של התלמידים ועל רמת ההוראה, אנחנו באיזשהו מקום באמצע, בין האמריקאים אשר לומדים ברמה נמוכה לבין

הצרפתים, אשר רמת ההוראה אצלם בתיכון גבוהה מאוד.

🔊 איך אפשר לגרום לילד לאהוב מתמטיקה?

בראש וראשונה, מורה צריך להיות גם פסיכולוג, להתמצא בתהליכי חשיבה ולמידה, להבין את החרדות הכלליות והלימודיות של התלמיד. ילד מתבגר נראה לעתים קרובות 'תוקפן', מרדן, ואולי אפילו בטוח בעצמו יתר על המידה, אך יש לו הרבה רגישויות: הוא מפחד מכישלון, הוא מפחד מהעתיד, הוא מחפש את הזהות שלו, וכן הלאה. המתמטיקה מוסיפה חרדות: היא מקצוע קשה ומאיים והיא נושאת את 'ההילה החברתית' שדיברנו עליה קודם. זהו משא בלתי נסבל עבור התלמיד, וצריך להוריד אותו ממנו!

שנית, צריך לשחרר את התלמיד מהיערצות של הזיכרון ולהנהיג מבחנים עם חומר פתוח. לא עוד זכירה מכנית, שינוי ודקלום. איינשטיין אמר: "הראש נועד לחשוב ולא לזכור". בעידן המודרני, אנו זקוקים למיומנויות חשיבה שונות לחלוטין מאשר בעבר.

מה עוד צריך 'להוריד'? דיברנו על מורים סדיסטים. הדבר מתבטא בין-היתר באמירות מהסוג: "אתה לא מסוגל, לא ייצא ממך כלום, אולי תרד לשלוש יחידות", וכיוצא-באלה 'פנינים'. ישנם מורים רבים כאלה, והם הורסים תלמידים ואפילו כתות שלמות. אני אומר את הדברים מבלי לפגוע חלילה במורים אחרים שהם חרוצים, אנושיים, ובעלי ידע.

מורה צריך לומר לתלמיד "אתה יכול, אתה מסוגל". הוא צריך להראות לו את היופי ואת התחכום של המתמטיקה, לעודד אותו להיות יצירתי, וכשתלמיד מציג פתרון אחר ממה שהוצג על הלוח – יותר יפה, יותר חסכוני, יותר מתוחכם – על המורה לשבח אותו בפני כל הכתה, לתת לו בונוס, ואפילו לומר לו: "הפתרון שלך יותר מוצלח משלי, כל הכבוד!". אני לא מכיר הרבה מורים כאלה.

🔊 אבל אתה מדבר על דידיאקטיקה.

זו לא דידיאקטיקה, זו פסיכולוגיה – אינטליגנציה רגשית!

🔊 ננטרל לרגע את אישיות המורה ונדבר על החומר עצמו. האם יש גישה אחרת?

אני חושב שכן. ניתן להעביר כל נושא בצורה פשוטה יותר, יפה יותר ומעניינת יותר. צריך להימנע מלסבך מה שאין צורך לסבך, להימנע ממתן תרגילים 'סתמיים', שאין להם שום חשיבות בהמשך – וכאלה יש בשפע בספרי הלימוד.

יחד עם זאת, אל נשכח שיש שני צדדים למטבע. תלמיד צריך להיות מוכן להתאמץ. המתמטיקה היא לא קלה, אז אם התלמיד רואה בה אתגר, מגלה בה עניין ומוכן להשקיע, תפקידי כמורה הוא לעזור לו להתקדם ואף ליהנות. אין שום סתירה בין עבודה קשה לבין הנאה. אבל אם אין לו עניין במתמטיקה, מאיזושהי סיבה, אין טעם שאכפה אותה עליו.

🔊 המתמטיקאים נתפסים בדרך-כלל כחמורי-סבר ו'יובשניים'. האם זה רחוק מהמציאות שניתן לגלות בכנסים או במפגש אישי?

המתמטיקאים והמורים למתמטיקה הם ככל בני-האדם. יש ביניהם נחמדים ויש מרושעים בדיוק באותה פרופורציה כמו אצל אחרים, כולל אמנים וסופרים.

🔊 מה עושה מתמטיקאי כשהוא חוזר הביתה בסוף יום עבודה?

הוא עושה כל מה שאדם 'רגיל' עושה. רואה את המשפחה, שומע מוסיקה, קורא, צופה בטלוויזיה...

🔊 ...רואה את קבוצת הכדורגל האהובה עליו ועושה חישובים? קונה בעקבות כך כרטיסי טוטו? חושב איך לשבור את הקזינו, מחפש את השיטה הנכונה למלא טפסי לוסו?

דווקא זה אשר מבין מתמטיקה יודע שבדברים האלה, ההסתברות היא מאוד נמוכה!

🔊 קורה לך, כשאתה פותח את המחשב, שאתה מתבונן בספרה שבמקום המיליון (אחרי הנקודה העשרונית) של  $\pi$ ?

ספרה זו איננה מעניינת.

🔊 אבל יש כאלה שעוקבים אחרי העניין בהנאה צרופה...

👂 אולי בעצם חסרה לנו 'המתמטיקה שלהם'?

זהו כבר נושא לשרלטנים. היו וישנם כאלה שמנסים 'להלביש' את המתמטיקה על תופעות וסוגיות שאין טעם והצדקה לטפל בהם בכלים מתמטיים. כשאני כותב שיר או סיפור למשל, המתמטיקה היא מחוץ לתחום – לא שייכת, וגם לא צריכה להיות שייכת.

👂 מי המתמטיקאי החביב עליך?

ליאונהרד אוילר.

👂 ומדוע?

הוא היה פורה בצורה בלתי רגילה ופיתח הרבה מאוד סוגיות, ועל-אף שהוא התעורר בשלב מסויים, הוא המשיך לחקור ולכתוב עד סוף ימיו, בדומה לבטהובן, אשר המשיך להלחין אחרי שאיבד את כושר השמיעה.

👂 אני רוצה להתייחס לעתידה של המתמטיקה. הפיסיקאי יואל רקח, מי שהיה רקטור האוניברסיטה העברית, ניבא שביום שבו יכניסו את המחשב לשימוש שוטף, 'יבוא הקץ על המתמטיקה...'

הטכנולוגיה בוודאי לא 'תעצור' את המתמטיקה. להיפך, היא פותחת חלונות חדשים, כי היא מאפשרת לבצע במהירות רבה את המשימות הטכניות-חשובות והתצפיתיות שעם נייר ועיפרון יכולות לקחת עשרות שנים. אך מחשב לא יכול להיות יצירתי, הוא לא יכול 'לעוף עם הרעיונות'. נכון להיום, הוא מבצע תהליכים אלגוריתמיים ותו לא. מה יהיה בעתיד? אינני יודע.

👂 אבל אם היינו 'לוקחים' את אוילר ו'שמים' אותו עם כל העוצמות של מחשבי-העל, האם הדבר לא היה מסיט אותו מדרכו?

להיפך. אוילר עסק בין היתר בחישובים רבים וארוכים. מחשב היה חוסך לו זמן, ואולי היינו זוכים לתיאוריות נוספות מפרי מוחו.

👂 אם-כך, לאן המתמטיקה 'הולכת'?

באופן כללי ישנם שני כיוונים במחקר המתמטי. ישנו הכיוון התיאורטי ('הטהור'), שבו המתמטיקה מזינה את עצמה, ונותנת מוטיבציה לחקור הלאה, מבלי להיות 'מוטרדת' מהישומים שאולי יהיו לתיאוריות

יש הנאה בשיטה או בשיטות איך למצוא את הספרות, לא בספרות עצמן. ההיסטוריה של  $\pi$  היא מרתקת, החל מהניסיון של היוונים לתת ערך מקורב ל- $\pi$  – ובמהלך הזמן מצאו עוד ועוד ספרות – אך הספרות עצמן אינן מעניינות. אני אישית לא זוכר יותר מחמש ספרות של  $\pi$  אחרי הנקודה... 3.14159 – זהו!

👂 אמרנו שהמתמטיקה היא רציונאלית. המתמטיקאי מקבל על עצמו את המסגרת, את הכללים, את הדיוק. במסגרת המאוד מוגדרת הזאת, אינך יכול לשכנע בצעקות ובדחיפות, אלא בהצמדות לנימוקים ולכללים ברורים...

נכון, וזה טוב!

👂... אז אולי, בניגוד למה שאמרנו קודם, צריך למחוק את מקצועות הלימוד האחרים, ולתת רק מתמטיקה... כדי להרגיל את האנשים להנמקות המדוקדקות, ואולי כדרך אפשרית לפתרון בעיות?

אינני חושב כך. המתמטיקה 'מתלבשת' על מישור מסוים של החשיבה האנושית ושל האינטלקט. ישנם הרבה מאוד נושאים מעניינים וחשובים חוץ ממתמטיקה, ואם אדם רוצה להיות 'מלא' וליהנות ממה שהעולם מציע לו, אז כדאי שילמד גם דברים אחרים.

👂 אני שואל אם אין כאן אפשרות לעצב השקפת עולם. אתה צריך לפעול באופן רציונאלי ולא להיות מושפע מכעסים, חרדות ואמונות טפלות.

אם מדובר בסוגיות שאליהן חשוב להתייחס באופן רציונאלי ומנומק ולבדוק את הדברים עד תומם, אז הגישה בהחלט עוזרת. אבל לא הייתי מציע לאותו נער שהולך לפגוש את חברתו לחשוב – באופן מתמטי...

👂 בכל זאת, האם יש משהו במתמטיקה שמביא אותך להסתכל אחרת על העולם?

נראה לי שכן. היא נותנת לי כלים לחשוב בצורה מסודרת, שיטתית וביקורתית – תוך הבחנה בין עיקר לטפל ובין עמדה לעובדה. אך אני רוצה שוב להדגיש: לא כל האספקטים של המציאות מתאימים להתייחסות רציונאלית.



## ספרים נבחרים

- Albers, D. and G.L. Alexanderson (ed.). *Mathematical People – Profiles and Interviews*. Birkhauser, 1985.
- Barrow, John. *Pi in the Sky – Counting, Thinking, and Being*. Oxford University Press, 1992.
- Bell, Eric Temple. *Mathematics – Queen and Servant of Science*. MAA, 1987.
- Davis, Philip and Reuben Hersh. *The Mathematical Experience (study edition)*. Birkhauser, 1995.
- Halmos, Paul. *I Want to Be a Mathematician – An Automathography*. Springer-Verlag, 1985.
- Hoffman, Paul. *The Man Who Loved Only Numbers*. Hyperion, 1998.
- James, Ioan. *Remarkable Mathematicians – From Euler to Von Neumann*. MAA & CUP, 2002.
- Kline Morris. *Mathematics, the Loss of Certainty*. Oxford, 1980.
- Schmalz, Rosemary. *Out of the Mouths of Mathematicians – A Quotation Book for Philomaths*. MAA, 1993.
- Simmons, George. *Calculus Gems – Brief Lives and Memorable Mathematics*. McGraw-Hill, 1992.

בעוד חמש או חמש-מאות שנים. הכיוון השני הוא המחקר היישומי, שבו מתייחסים לסוגיה מדעית או טכנולוגית קונקרטית, ומפתחים את המתמטיקה הנדרשת לה.

תורת הפרקטאלים למשל, היא דוגמא יוצאת-דופן בהיסטוריה של המתמטיקה, באשר לישומים. אבי התורה, בנואה מנדלברוט, הסתכל תחילה על העננים והחופים וכתב את הספר 'הגיאומטריה הפרקטאלית של הטבע', וכבר היום, לאחר 30 שנה בלבד, יש לתיאוריה הזאת (ולתורת הכאוס הנספחת אליה) ישומים ברוב המדעים, כולל ברפואה.

👂 והיא באמת איננה ניזונה משום מתמטיקה שקדמה לה?

כמעט ולא. מנדלברוט אומנם הסתמך על כמה עבודות של מתמטיקאים שקדמו לו, אבל הוא זה שבנה תיאוריה מקיפה ושלמה.

👂 אם אינני טועה, בעברית יש אך מעט ספרים שבאמצעותם ניתן להתוודע אל ההיבטים הקסומים של המתמטיקה. אולי זהו אתגר בשבילך...

אני מקווה לעמוד בו. ביום מן הימים...

