הנושא: הוכחה בדרך אחרת

הוכן ע״י: פתחי סאלח.

תקציר: בחומר מביא המחבר הוכחות של טענות שהופיעו בבחינות הבגרות בשנים האחרונות. הטענות הופיעו כחלק משאלה בבחינה העוסקת באינדוקציה מתמטית. המחבר מציע מגוון דרכים להוכחה ללא אינדוקציה מתמטית.

מילות מפתח: אלגברה, הוכחה, הוכחות, סדרות, סדרה חשבונית, סכום סדרה, אינדוקציה מתמטית, בחינת בגרות.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 31, תשס״ד 2004, עמודים 63-65.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

זה רעיון

הוכחה בדרך אחרת

פתחי סאלח
הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל
המכללה האקדמית הערבית לחינוך, חיפה

בתכנית הלימודים ברמת 5 יח"ל (ועד כה גם ב-4 יח"ל), נכלל הנושא 'הוכחה באינדוקציה מתמטית'. בדרך כלל אחת השאלות בבחינת הבגרות עוסקת בנושא זה ומופיעה בניסוח הבא:
"הוכח באינדוקציה, או בכל בדרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: ... ".

התלמידים מתייחסים לשאלה זו כעוסקת בנושא האינדוקציה המתמטית, ופותרים אותה בדרך כלל בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית, ואפילו לא מנסים לחפש הוכחה בדרך אחרת. כך שהביטוי *"או בדרך אחרת"* המופיע בגוף השאלה הוא למעשה זניח עבורם. הדבר נכון גם ביחס למורים רבים שמלמדים את הנושא.

במידה מסוימת אפשר להבין את התלמידים: הרי ברוב המקרים המורים לא מייחסים לביטוי זה חשיבות, ומכוונים בכך את התלמידים לפתור את השאלה בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית. סביר להניח כי מקורה של הגישה המצמצמת את שיטת ההוכחה לשימוש בעקרון האינדוקציה, הוא בכך שדרך זו מאפשרת לגשת לפתרון באופן מיידי ללא 'בזבוז זמן' בחשיבה על רעיון אחר שיוביל לפתרון, הלא הדבר עלול לגזול מזמן הבחינה והתוצאה לא תמיד מובטחת.
כך, בלחץ בחינת הבגרות, התלמידים מעדיפים כלי בו תורגלו להשתמש, במיוחד בהיותו כלי בטוח, שאם משתמשים בו נכונה, משיגים את הנדרש. נדגיש כי התלמידים בדרך כלל לא נחשפים לפתרונות אחרים, כך שלדידם הביטוי: *"או בדרך אחרת"* הינו חסר משמעות.

במאמר זה אביא דוגמאות להוכחות *"בדרך אחרת"*. במקרים רבים הפתרון *"בדרך אחרת"* הינו יפה יותר ולפעמים אפילו קל יותר.

ניתן להביא את הדוגמאות המופיעות במאמר כחומר העשרה לתלמידים הלומדים ברמה של 5 יחידות לימוד. השיטות המוצעות מזמנות מפגש עם *"היופי שבמתמטיקה"* והן מתאימות לאלה המחפשים אתגרים ופתרונות יצירתיים ויפים.

ראוי להדגיש, כי השאיפה למציאת מספר רב של דרכים לפתרון שאלה היא נדבך חשוב ביותר בתהליך החינוך המתמטי של התלמידים.

כל השאלות, בעזרתן אני מדגים את הרעיונות השונים, לקוחות מבחינות הבגרות של השנים האחרונות.

דוגמה 1 – מועד חורף 2002, 5 יח"ל

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+...+(4n-1)=3n^2$$

<u>הוכחה בדרך אחרת (סדרות)</u>

נשים לב שאגף שמאל של המשוואה הוא למעשה סכום של n איברים בסדרה חשבונית שהפרשה 2. לכן לפי נוסחת הסכום של n איברים בסדרה חשבונית נקבל כי אגף שמאל שווה ל- $\frac{n}{2}(2n+1+4n-1)=3n^2$.

דוגמה 2 – מועד קיץ 2002, 4 יח"ל

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

הוכחה בדרך אחרת (קומבינטוריקה)

נשים לב כי:
$$\binom{n+2}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$
$$\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}$$

לכן אם נחלק את שני אגפי המשוואה ב- 2, נקבל שבעצם מספיק להוכיח כי:
$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3}$$

אגף ימין של המשוואה האחרונה שווה למספר האפשרויות לבחור שלושה מספרים שונים מהקבוצה $\{1,2,3,\ldots,n+2\}$.

מצד שני אם נמיין אותן שלשות לפי האיבר הגדול ביותר נקבל כי:

$\binom{2}{2}=$ מספר השלשות בהן המספר 3 הוא הגדול ביותר.

$\binom{3}{2}=$ מספר השלשות בהן המספר 4 הוא הגדול ביותר.

.
.
.

$\binom{n+1}{2}=$ מספר השלשות בהן המספר $n+2$ הוא הגדול ביותר.

לכן אגף שמאל שווה למספר האפשרויות לבחור שלושה מספרים שונים מהקבוצה: $\{1,2,3,\ldots,n+2\}$

ומכאן נובע השוויון.

דוגמה 3 – מועד ב, קיץ 2002, 4 יח"ל

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$$

הוכחה בדרך אחרת (טור טלסקופי)

נציג את אגף שמאל של המשוואה כטור טלסקופי על-ידי שימוש בזהות:
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

בעזרת זהות זו נקבל כי אגף שמאל שווה לסכום:
$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}=\frac{n}{4(n+4)}$$

דוגמה 4 – מועד קיץ 2001, 5 יח"ל

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{2n+4}>\frac{1}{2}$$

הוכחה בדרך אחרת (מקסימיזציה)

נשתמש בעקרון: סכום של מספר סופי של איברים שונים גדול ממכפלת האיבר הקטן ביותר ביניהם במספר האיברים. באגף שמאל של האי-שוויון מופיע סכום של $n+2$ מחוברים שהאיבר הקטן ביותר ביניהם הוא $\frac{1}{2n+4}$.

לכן לפי עקרון זה נקבל כי:
$$\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{2n+4}>(n+2)\cdot\frac{1}{2n+4}=\frac{1}{2}$$

דוגמה 5 – מועד ב, קיץ 2001, 5 יח"ל

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2n-1)^2-(2n)^2=-n(2n+1)$$

הוכחה בדרך אחרת (סדרות, הפרש ריבועים)

נשתמש בנוסחת ההפרש של שני ריבועים ובנוסחת הסכום של n איברים בסדרה חשבונית.

נחלק את $2n$ האיברים באגף שמאל ל- n זוגות, כאשר כל זוג הוא הפרש של שני ריבועים. משימוש בנוסחת ההפרש של שני ריבועים נקבל:
$$(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\ldots+((2n-1)^2-(2n)^2)=$$
$$=(-1)\cdot3+(-1)\cdot7+\ldots+(-1)\cdot(4n-1)$$

ביטוי זה הוא למעשה סכום של n איברים בסדרה חשבונית שהפרשה (-4), ולפי נוסחת הסכום של סדרה חשבונית נקבל כי ערכו שווה ל- $-n(2n+1)$.

דוגמה 6 – מועד קיץ 2000, 5 יח"ל

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n>2$ טבעי מתקיים:
$$2^n+3^n+4^n<5^n$$

הוכחה בדרך אחרת (מקסימיזציה)

קל לבדוק נכונות הטענה עבור $n=3$. ננצל עובדה זו ונוכיח את הטענה לכל $n\ge 4$.

$$2^n+3^n+4^n=2^3\cdot 2^{n-3}+3^3\cdot 3^{n-3}+4^3\cdot 4^{n-3}<$$
$$<(2^3+3^3+4^3)\cdot 5^{n-3}<5^3\cdot 5^{n-3}=5^n$$

דוגמה 7 – מועד קיץ 1999, 4 יח"ל

הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, שעבור כל n טבעי הביטוי 81^n-25^n מתחלק ב- 14 ללא שארית.

הוכחה בדרך אחרת (בינום)

נשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון:

$$81^n-25^n=9^{2n}-5^{2n}=(14-5)^{2n}-5^{2n}=$$
$$=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}14^{2n-k}\cdot(-5)^k-5^{2n}=$$
$$=\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n}{k}\cdot 14^{2n-k}\cdot(-5)^k+(-5)^{2n}-5^{2n}=$$
$$=\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n}{k}\cdot 14^{2n-k}\cdot(-5)^k$$

בכל אחד מהגורמים בסכום האחרון מופיעה חזקה חיובית של 14, לכן כל הביטוי מתחלק ב-14 ללא שארית.

דוגמה 8 – מועד קיץ 1995, 5 יח"ל

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+...+n\cdot 1=$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

הוכחה בדרך אחרת (קומבינטוריקה)

נשים לב לכך שהביטוי באגף ימין שווה ל- $\binom{n+2}{3}$, ולכן מרמז על אפשרות של הוכחה *קומבינטורית*.

$\binom{n+2}{3}$ שווה למספר האפשרויות לבחור שלושה מספרים שונים מתוך קבוצת המספרים:
$\{1,2,3,...,n+2\}$

מצד שני, אם נמיין אותן שלשות לפי האיבר האמצעי ביניהן נקבל כי:

$1\cdot n$ הוא מספר השלשות בהן 2 הוא איבר אמצעי, כיוון שישנה אפשרות אחת לבחור מספר קטן מ-2 ו-n אפשרויות לבחור מספר גדול מ-2.

$2\cdot(n-1)$ הוא מספר השלשות בהן 3 הוא איבר אמצעי.

.
.
.

$n\cdot 1$ הוא מספר השלשות בהן $n+1$ הוא איבר אמצעי.

וכיוון שאלה הן כל האפשרויות לאיבר אמצעי, אגף שמאל של המשוואה המקורית שווה גם הוא למספר האפשרויות לבחור שלושה מספרים מתוך הקבוצה: $\{1,2,...,n+2\}$ ומכאן נובע השוויון הדרוש.