הנושא: **תגובה למאמר:**
״לא על החשבון הדיפרנציאלי לבדו״
(אריה רוקח, על״ה 29)

הוכן ע״י: יוסף בראל.

תקציר: בחומר מתייחס הכותב למאמר של אריה רוקח, שפורסם בעל״ה 29. המאמר עסק בפתרון בעיית ערך קיצון תוך שימוש בשיקולים גיאומטריים בלבד. בחומר מובאת הוכחה נוספת לכך שבין כל המשולשים החסומים במעגל נתון, הגדול ביותר בשטחו הוא המשולש שווה הצלעות.

מילות מפתח: אנליזה, חשבון דיפרנציאלי, בעיות קיצון, בעיות מינימום ומקסימום, הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטרית המישור, משולש, מרובע, מעגל, משולש חסום במעגל, מרובע חסום במעגל.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 31, תשס״ד 2004, עמודים 70-71.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

תגובה למאמר 'לא על החשבון הדיפרנציאלי לבדו'
(אריה רוקח, על"ה 29)

יוסף בראל
בית הספר יבנה, חיפה

בגיליון על"ה 29, סתיו תשס"ג, התפרסם המאמר 'לא על החשבון הדיפרנציאלי לבדו'. במאמר זה מוכיח המחבר, ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי, כי בין כל המשולשים החסומים במעגל נתון, הגדול בשטחו הוא המשולש שווה-הצלעות. ברצוני להציע הוכחה נוספת.

משולשים חסומים במעגל

שלב ראשון

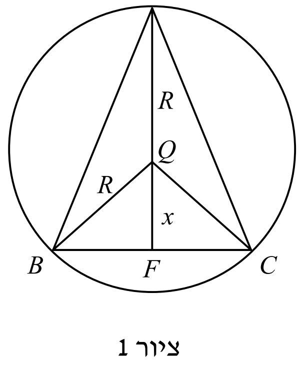
משפט: אם משולש שאינו שווה-צלעות חסום במעגל, אז קיים משולש שווה-שוקיים החסום באותו מעגל ששטחו גדול יותר.

משפט זה והוכחתו הוזכרו במאמר המקורי.

שלב שני

טענה: מבין כל המשולשים שווי-השוקיים החסומים במעגל, הגדול בשטחו הוא המשולש שווה-הצלעות.

הוכחה: יהיה ΔABC שווה-שוקיים ($AB = AC$) חסום במעגל שמרכזו Q.



ציור 1

נסמן $QF = x$ אז: $BF = \sqrt{R^2 - x^2}$

ושטח המשולש S מקיים את השוויון הבא:

$$S^2 = (R^2 - x^2)\cdot(R + x)^2$$

(נשים לב כי: כיוון שהזווית A עשויה להיות קהה, תחום ההשתנות של x הוא $-R < x < R$).

לאחר פתיחת סוגרים נקבל:

$$S^2 = -x^4 - 2Rx^3 + 2R^3x + R^4$$

למען נוחיות החישוב, נסמן: $\rho = \frac{R}{2}$ (ולכן $R = 2\cdot\rho$)

ונקבל:

$$S^2 = -x^4 - 4\rho x^3 + 16\rho^3 x + 16\rho^4$$

כשהמשולש הוא שווה-צלעות:

$$x = \frac{R}{2} = \rho$$

ומתקבל:

$$S^2 = 27\rho^4$$

מכאן שהביטוי $S^2 - 27\rho^4$ מתחלק ב- $(x-\rho)$

ואכן:

$$S^2 - 27\rho^4 = (x-\rho)\cdot[-x^3 - 5\rho x^2 - 5\rho^2 x + 11\rho^3]$$

קל להבחין שגם הביטוי שבסוגריים המרובעים מתאפס כאשר $x = \rho$ ולכן גם הוא מתחלק ב- $(x-\rho)$

ומתקיים:

$$-x^3 - 5\rho x^2 - 5\rho^2 x + 11\rho^3 = (x-\rho)\cdot(-x^2 - 6\rho x - 11\rho^2)$$

מכל זה:

$$S^2 = 27\rho^4 - (x-\rho)^2\cdot[x^2 + 6\rho x + 11\rho^2] =$$
$$= 27\rho^4 - (x-\rho)^2\cdot[(x+3\rho)^2 + 2\rho^2]$$

אם המשולש אינו שווה-צלעות אז $x \neq \rho$ ואז $S^2 < 27\rho^4$, כלומר שטחו קטן משטחו של המשולש שווה-הצלעות.

סיכום: בהינתן משולש שאינו שווה-צלעות החסום במעגל, שטחו קטן משטחו של משולש שווה-שוקיים כלשהו החסום באותו מעגל. שטח המשולש שווה-השוקיים הזה (אם אינו שווה-צלעות) קטן משטחו של המשולש שווה-הצלעות. לכן שטחו של המשולש שווה-הצלעות גדול משטחו של כל משולש אחר החסום באותו מעגל.

מרובעים חסומים במעגל

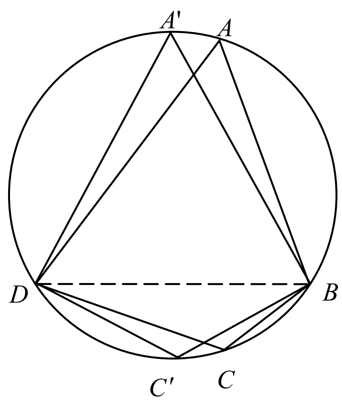
בהמשך המאמר מוכיח המחבר (ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי) שמבין כל המרובעים החסומים במעגל נתון, הגדול בשטחו הוא הריבוע .

ברצוני להציע הוכחה פשוטה למשפט זה.

שלב ראשון

טענה: אם מרובע שאינו ריבוע חסום במעגל אז קיים דלתון החסום במעגל ששטחו גדול משטח המרובע.

הוכחה: יהא $ABCD$ מרובע שאינו ריבוע החסום במעגל. במרובע זה קיימות שתי צלעות סמוכות שונות זו מזו (מרובע חסום במעגל שבו כל שתים מצלעותיו הסמוכות שוות הוא ריבוע). נניח, למשל, $AB \neq AD$ ונעביר את אלכסון BD.



ציור 2

$AB \neq AD$, לכן A אינה אמצע הקשת $\overset{\frown}{BAD}$. אך קיימת נקודה A' כך ש- $\overset{\frown}{DA'} = \overset{\frown}{A'B}$ ועבורה $\Delta A'BD$ הוא שווה-שוקיים. לפי המשפט שצוטט לעיל, שטחו של $\Delta A'BD$ גדול משטחו של ΔABD . אם במצב זה $DC = BC$ אז $A'BCD$ דלתון הגדול בשטחו משטח המרובע $ABCD$. אם $DC \neq BC$ ניצור משולש שווה-שוקיים $\Delta DC'B$ (ציור 2) ולפי המשפט שלעיל שטחו גדול משטח ΔDBC. כך: הדלתון $A'BC'D$ גדול בשטחו משטח המרובע $ABCD$.

שלב שני

טענה: מבין כל הדלתונים החסומים במעגל, הגדול בשטחו הוא הריבוע.

הוכחה: כיוון ש- $\angle B = \angle D$ (דלתון) ו- $\angle B + \angle D = 180°$ (מרובע חסום במעגל) מתקבל:
$\angle B = \angle D = 90°$

לכן AC הוא קוטר: $AC = 2R$.

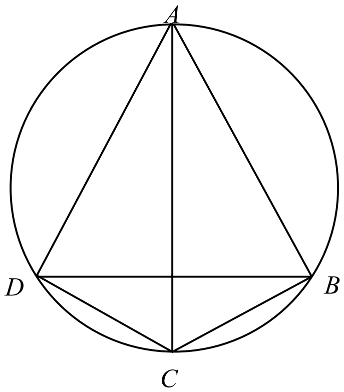
אם $ABCD$ הוא ריבוע אז גם BD קוטר $(BD = 2R)$

ולכן שטח הריבוע הוא: $S = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R = 2R^2$

(במרובע שאלכסוניו מאונכים, השטח שווה למחצית מכפלת האלכסונים).

אם $ABCD$ אינו ריבוע אז $BD < 2R$ ואז שטחו S מקיים:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \overline{BD} = R \cdot \overline{BD} < R \cdot 2R$$



ציור 3

כלומר $S < 2R^2$.

מסקנה: אם $ABCD$ הוא מרובע שאינו ריבוע החסום במעגל, אזי קיים דלתון החסום באותו מעגל, הגדול ממנו בשטחו והריבוע גדול בשטחו מהדלתון (אלא אם כן הדלתון עצמו ריבוע). בכל מקרה מבין כל המרובעים החסומים במעגל, הריבוע הוא הגדול בשטחו.