



הנושא: מיומנו של מורה: משפט הפוך מעניין, בעקבות שאלה של תלמידה

הוכן ע"י: אבי סיגלר.

תקציר: במאמר משתף המחבר את הקוראים בחוויה אישית שחווה בכיתתו – גילוי משפט מעניין בגיאומטריה, כמשפט הפוך לטענה שגרתית. המשפט ההפוך נוסח על-ידי תלמידה כשאלה.

מילות מפתח: הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטריה המישור, משולש, משולש ישר-זווית, גובה, תיכון, משפט הפוך, טריגונומטריה, משפט הסינוסים, הוכחה, הוכחות.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 31, תשס"ד 2004, עמודים 26-28.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.



מיומנו של מורה: משפט הפוך מעניין, בעקבות שאלה של תלמידה

אבי סיגלר

ביה"ס הטכני של חיל-האוויר, חיפה

"במשולש ABC בו $AB \neq AC$, AM תיכון, AD -גובה, אם: $\angle BAD = \angle MAC$, אזי הזווית A ישרה."

לא ידעתי האם המשפט נכון. השאלה סיקרנה אותי, הודיתי שאיני יודע את התשובה והבטחתי שאתאמץ להוכיח או להפריך את הטענה. מעניין שלא חשתי מבוכה, אלא הרגשתי גאווה על שכיתתי 'הולידה' שאלה שהתשובה לה לא הייתה ידועה לי ולא מצאתי אותה בספר הלימוד.

הוכחה ראשונה – הפעלת 'כלים כבדים'

$\angle BAD = \angle MAC \equiv \alpha$ נסמן:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \alpha}{\frac{1}{2} AD \cdot AC \sin (\angle A - \alpha)} = \frac{AB \sin \alpha}{AC \sin (\angle A - \alpha)}$$

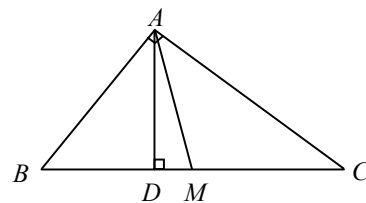
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot AD}{\frac{1}{2} DC \cdot AD} = \frac{BD}{DC}$$

$$(1) \quad \frac{AB \sin \alpha}{AC \sin (\angle A - \alpha)} = \frac{BD}{DC} \quad \text{לכן:}$$

הערה: הנוסחה אמנם התקבלה כאשר AD גובה, אך היא נכונה גם כאשר AD אינו גובה. שכן גם אם AD אינו גובה, הרי למשולשים ABD ו- ADC יש גובה משותף וההוכחה מאוד דומה. באופן דומה, אם נתייחס אל שטחי המשולשים ABM ו- AMC , נקבל:

בשיעור גיאומטריה, נפתרה בקלות השאלה הבאה: אם: ABC משולש ישר-זווית ($\angle A$ ישרה) AD גובה, ו- AM תיכון,

אזי: $\angle BAD = \angle MAC$



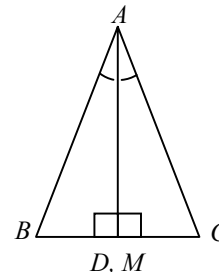
ציור 1

תלמידה שאלה:

"האם המשפט ההפוך, נכון?"

היא ניסחה את המשפט ההפוך: "במשולש ABC , גובה AD , תיכון AM ונתון $\angle BAD = \angle MAC$, אזי: הזווית A ישרה."

שיבחתי את שאלתה ואת ניסוח טענתה, אך הקשיתי וטענתי שבמשולש שווה-שוקיים (שאינו ישר-זווית), AM ו- AD מתלכדים, $\angle BAD = \angle MAC$, A אינה ישרה.

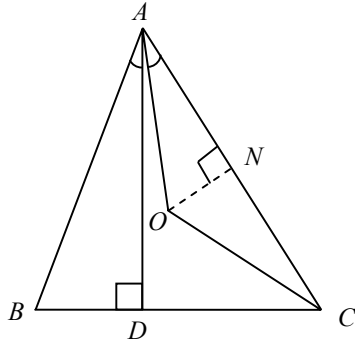


ציור 2

התלמידה תיקנה מעט את ניסוחה:

לחפש הוכחה אחרת.

הוכחה שניה – 'רק גיאומטריה'



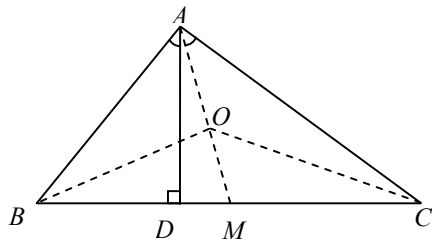
ציור 3

למה: במשולש ABC בו AD גובה ו- O מרכז המעגל החוסם קיים: $\angle BAD = \angle OAC$
הוכחה: $\angle AOC = 2\angle B$ כי מידתה של זווית מרכזית שווה לכפליים מידת הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת. לכן, $\angle OAC = 90^\circ - \angle B$, וברור כי: $\angle BAD = 90^\circ - \angle B$.

(הערה: ההוכחה נכונה גם למקרה בו מרכז המעגל החוסם נמצא מחוץ למשולש).

הוכחת המשפט:

לפי הלמה, אם במשולש שבו AD גובה, AM תיכון $\angle BAD = \angle MAC$ מתקיים:



ציור 4

התיכון AM **חייב** לעבור דרך מרכז המעגל החוסם. לכן OM תיכון במשולש BOC . המשולש BOC הוא שווה שוקיים ($R = BO = OC$), לכן או שהנקודה O מתלכדת עם הנקודה M או $\angle M = 90^\circ$.
 אם O מתלכדת עם M , אז מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC נמצא באמצע BC , לכן $\angle A = 90^\circ$.
 אם $\angle M = 90^\circ$, התיכון AM מתלכד עם הגובה AD והמשולש שווה שוקיים: $AB = AC$.

$$(2) \quad \frac{AB \sin(\angle A - \alpha)}{AC \sin \alpha} = \frac{BM}{MC}$$

$$(3) \quad \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BM}{MC} \quad \text{נכפול (1) עם (2) ונקבל:}$$

נוסחה (3) ידועה למעשה כנוסחת שטיינר, ומתקיימת לכל שני קטעים AM, AD הסימטריים יחסית לחוצה הזווית AD, AM נקראים איזוגנליים – תנאי זה כמובן מתקיים במשפט שלנו.

עד עתה לא ניצלנו כמעט את העובדה ש- AD גובה ו- AM תיכון. אם נשתמש בכך ש- AM תיכון נקבל:

$$(4) \quad \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{DC}$$

נתרגם את (4) לשפה טריגונומטרית: לפי משפט הסינוסים נקבל:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\sin^2 \angle C}{\sin^2 \angle B}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cos \angle B}{AC \cos \angle C} = \frac{\sin \angle C \cos \angle B}{\sin \angle B \cos \angle C} \quad \text{כמו כן:}$$

$$(4^*) \quad \frac{\sin^2 \angle C}{\sin^2 \angle B} = \frac{\sin \angle C \cdot \cos \angle B}{\sin \angle B \cos \angle C} \quad \text{לכן:}$$

$$\sin \angle C \cdot \cos \angle C = \sin \angle B \cdot \cos \angle B \quad \text{או:}$$

$$\sin(2\angle C) = \sin(2\angle B) \quad \text{כלומר:}$$

$$\angle C = \angle B \quad \text{כאן קיימות שתי אפשרויות:}$$

$$2\angle C = 180^\circ - 2\angle B \quad \text{או:}$$

$$\angle C + \angle B = 90^\circ$$

$$\angle A = 90^\circ$$

ההוכחה שהובאה, פתרה את השאלה באופן מוחלט:

אם: במשולש ABC בו AD גובה, AM תיכון ו-

$$\angle BAD = \angle MAC$$

$$\text{אז: } \angle B = \angle C \quad \text{או} \quad \angle A = 90^\circ.$$

אני עצמי השתכנעתי, אך לא כך התלמידה הסקרנית, כי ההוכחה נשענה על 'כלים כבדים' שלא היו ידועים לה עדיין.

עמדו בפני שתי אפשרויות:

לטעון שהמשפט ההפוך, כפי שנוסח, הוא נכון, אך להוכחתו נדרש ידע בטריגונומטריה.

IA

הערות פדגוגיות ודידקטיות

לפי בורסי (Borasi, 1990), קיימים מיתוסים המפריעים להתקדמות התלמידים הלומדים מתמטיקה. בעיני רוב התלמידים:

- למתמטיקה אין עבר ואין עתיד;
- לכל שאלה יש פתרון;
- לכל שאלה פתרון יחיד;
- כל התשובות לכל השאלות הן בבעלותם הבלעדית של קבוצת המורים למתמטיקה.

האפיזודה שתוארה לעיל מהווה דוגמה למאבק נגד המיתוסים:

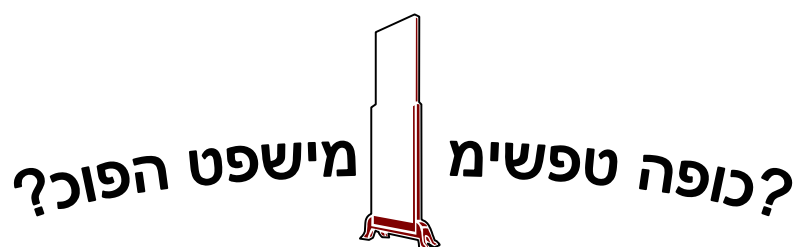
- השאלה החכמה של התלמידה מוכיחה שלמתמטיקה יש עתיד, כי המשפט ההפוך מהווה בעיני ובעיני התלמידים, חידוש מתמטי.
- לא ברור אם לכל שאלה יש פתרון. בתחילה לא היה ברור כלל לי ולתלמידי האם המשפט שהוצע על-ידי התלמידה, נכון אם לאו.

- למשפט שהוצע הובאו שתי הוכחות.
- לא כל התשובות לכל השאלות היו בבעלותי, כמורה הכיתה מלכתחילה.

אני ממליץ, להתרכז לא רק בפיתוח מיומנויות לפתרון שאלות, אלא גם לעודד תלמידים לשאול שאלות, הנובעות משינויים בנתוני בעיות שנפתרו. כמורה, אין לחשוש מאי-מתן תשובה מיידית או מממן התשובה: "עדיין אין לי פתרון ואני לא בטוח אם הפתרון מוכר". המסר החינוכי הוא שבמתמטיקה יש הרבה יותר שאלות מתשובות, ויש שאלות שתלמיד בית-ספר תיכון מסוגל לשאול ופרופסור למתמטיקה יתקשה לענות עליהן.

מקורות

R. Borasi (1990): The invisible hand operating in mathematics: Student's conceptions and expectations, *learning and Teaching Mathematics in the 1990's* – Reston, V.A. – N.C.T.M., pp. 174-182.



בזכות העושר הטמון במשפטים הפוכים:

האם גם המשפטים ההפוכים הבאים נכונים?

- $\triangle ABC$ הוא משולש ישר-זווית, $\angle A$ ישרה. AD גובה ליתר. M היא נקודה על היתר כך שמתקיים: $\angle BAD = \angle MAC$. אזי: AM הוא תיכון ליתר.

- $\triangle ABC$ הוא משולש ישר-זווית, $\angle A$ ישרה. AM תיכון ליתר. D היא נקודה על היתר כך שמתקיים: $\angle BAD = \angle MAC$. אזי: AD הוא גובה ליתר.