



הנושא: במרדף אחרי תוצאה "יפה"

הוכן ע"י: קלרה זיסקין

תקציר: במאמר מתארת המחברת כיצד במטרה להגיע לתוצאה "יפה" בגזירת פונקצית שורש, נעשה שימוש שגוי בחוקי חזקות ושורשים.

מילות מפתח: אנליזה, חשבון דיפרנציאלי, נגזרת, תחום הגדרה, פונקצית שורש, שגיאות.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 31, תשס"ד 2004, עמודים 36-37.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.



צימוקים

במרדף אחרי תוצאה "יפה"

קלרה זיסקין

היחידה הקדם אקדמית, אוניברסיטת חיפה

בתחום זה בולט לעין שהנגזרת, לפי גרסה (1), מקבלת ערכים שליליים בלבד, כלומר הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה. לעומת זאת, לפי גרסה (2) הפונקציה יורדת עבור $x > \frac{1}{3}$ ועולה עבור $x < -\frac{1}{3}$.

איזו משתי התשובות נכונה ומהו מקור השגיאה?

השגיאה מסתתרת בפעולה האלגברית של הכנסת הביטוי $(3x-1)$ לתוך השורש הריבועי.

נזכיר את הכלל הבא:

$$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b}, & a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2b}, & a < 0 \end{cases}$$

אם 'מתחשבים' בכלל זה בתהליך הפשוט של (1) מקבלים את הנגזרת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{-3}{3x-1} \cdot \sqrt{\frac{3x-1}{(3x-1)^2 \cdot (3x+1)}} = \frac{-3}{(3x-1) \cdot \sqrt{9x^2-1}}, & 3x-1 > 0 \\ \frac{-3}{-(3x-1)} \cdot \sqrt{\frac{3x-1}{(3x-1)^2 \cdot (3x+1)}} = \frac{-3}{(1-3x) \cdot \sqrt{9x^2-1}}, & 3x-1 < 0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{-3}{|3x-1| \cdot \sqrt{9x^2-1}} \quad \text{או בקיצור:}$$

לצורך המחשה אפשר להציע לתלמידים לשרטט את גרף הפונקציה בעזרת מחשב או מחשבון גרפי. רואים אז בנקל כי לפונקציה אין נקודות קיצון, היא יורדת בתחום הגדרתה ויש לה שתי אסימפטוטות: $x = 1/3$ ו- $y = 1$. מעניין גם לשרטט (בעזרת מחשב או מחשבון גרפי) את הגרפים של הנגזרות (1) ו- (2) ולבחון את ההבדלים ביניהם.

דוגמה 2

$$y = (2x+1)\sqrt{(x^2-2)(2x+1)} \quad \text{נתונה הפונקציה:}$$

רבים המקרים בהם תלמידים מבצעים גזירה נכונה של פונקציה, אך פונקצית הנגזרת, אליה הם מגיעים, שונה מזו המופיעה בפתרון אשר בספר הלימוד. אין שום פסול בתירגול של הוכחת זהויות אלגבריות או טריגונומטריות בנסיון לאמת את הגזירה, אם כי קיימת גם דרך אחרת לבדיקה – על-ידי הצבת מספרים. הבדיקה חשובה כי לפעמים התשובה 'יפה' הנמצאת בספר אינה נכונה. נבחן שני מקרים כאלה וננסה לגלות את הסיבה לטעות.

דוגמה 1

$$y = \sqrt{\frac{3x+1}{3x-1}} \quad \text{יש לגזור את הפונקציה:}$$

תהליך הגזירה:

$$\begin{aligned} (1) \quad y' &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}} \cdot \frac{3(3x-1) - 3(3x+1)}{(3x-1)^2} = \\ &= \frac{-3}{(3x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}} \end{aligned}$$

באחד מספרי הלימוד מופיעה נגזרת 'פשוטה יותר':

$$(2) \quad y' = \frac{3}{(1-3x) \cdot \sqrt{9x^2-1}} \quad \text{או} \quad y' = \frac{-3}{(3x-1) \cdot \sqrt{9x^2-1}}$$

כדי להגיע מהנגזרת 'שלנו' לנגזרת ה'פשוטה יותר' יש להכניס את הביטוי $(3x-1)$ לתוך השורש הריבועי, לצמצם, ולהשתמש בנוסחת הכפל המקוצר: $(3x-1) \cdot (3x+1) = 9x^2 - 1$

האם התהליך נכון? כלומר, האם הנגזרות זהות?

נבחן את תחום ההגדרה של הפונקציה:

$$\frac{3x+1}{3x-1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{3} \quad \text{או} \quad x \leq -\frac{1}{3}$$

מקור השגיאה כמו בדוגמה הקודמת: בעת הכנסת הביטוי $(2x+1)$ לתוך השורש הריבועי יש להתחשב בסימניו. ערכיו חיוביים עבור $x > \sqrt{2}$ ושליילים עבור $-\sqrt{2} < x < -\frac{1}{2}$.

הערה: בדוגמה 2, בשונה מדוגמה 1, ייתכן ומקור הטעות הוא כבר בשלב המכין לגזירה ולא בסימומו. שכן במבט על הפונקציה מזהים את הביטוי $(2x+1)$ בתוך השורש ומחוצה לו. לכן מפתה לבצע את התהליך הבא:

$$y = (2x+1) \cdot \sqrt{(x^2-2)(2x+1)} = \sqrt{(x^2-2)(2x+1)^3}$$

רישום כזה מפשט מאד את תהליך הגזירה (בידקו!) ומוביל בקלות לנוסחה (4) השגויה.

נגזרתה:
$$(3) \quad y' = \frac{(2x+1)(x-1)(5x+6)}{\sqrt{(2x+1)(x^2-2)}}$$

באחד הספרים רשומה הנגזרת באופן הבא:

$$(4) \quad y' = (x-1)(5x+6) \sqrt{\frac{2x+1}{x^2-2}}$$

נראה שנגזרת זו אינה נכונה.

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא:

$$-\sqrt{2} \leq x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{או} \quad x \geq \sqrt{2}$$

לפי (3), לפונקציה נקודת מינימום עבור $x = -1.2$ ולפי (4) יש לפונקציה נקודת מקסימום באותו מקום! הכיצד?