הנושא: **אסימפטוטות המקבילות לציר ה- x**

הוכן ע״י: יפים כץ.

תקציר: במאמר מציג המחבר פתרון של שאלה מבחינת הבגרות של קיץ תשנ״ב ומדגיש מכשלות בגזירת פונקצית שורש, ובחישובי גבולות, לצורך מציאת אסימפטוטות.

מילות מפתח: פונקציה, פונקציות, אנליזה, חשבון דיפרנציאלי, נגזרת, תחום הגדרה, פונקצית שורש, אסימפטוטה, גבול, בחינת בגרות, שגיאות.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 31, תשס״ד 2004, עמודים 37-39.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

ale31-8

אסימפטוטות המקבילות לציר ה-x

יפים כץ
מכללת לוינסקי לחינוך

בבחינת הבגרות בקיץ תשס"ב ל- 5 יחידות לימוד הופיעה שאלה (מספר 5) שונה במקצת מהשאלות שבדרך כלל מופיעות בשאלוני הבגרות.

נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$

1. מצא את האסימפטוטה המקבילה לציר ה-x עבור $x>0$.

2. מדוע $y=-1$ היא אסימפטוטה של הפונקציה עבור $x<0$?

בהצעת הפתרון לשאלה זו בעיתון 'מעריב', היה חסר הסבר לטענה שהישר $y=-1$ מהווה אסימפטוטה אופקית לפונקציה עבור $x<0$ ובנוסף גרף הפונקציה שורטט באופן שגוי. בעיתון 'ידיעות אחרונות' הגרף אמנם שורטט היטב, אך גם שם לא הוסבר מדוע הישר $y=-1$ מהווה אסימפטוטה אפשרית לפונקציה.

נזכיר תחילה מהי אסימפטוטה אופקית, או מקבילה לציר ה-x.

הגדרה אינטואיטיבית: ישר $y=b$ המקביל לציר ה-x, מהווה אסימפטוטה אופקית לפונקציה $f(x)$, אם כאשר x שואף ל-$(+\infty)$ או ל-$(-\infty)$ גרף הפונקציה 'מתקרב' לישר $y=b$.

כדי למצוא אסימפטוטות מקבילות לציר ה-x יש לחשב את הגבולות: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

אם $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b_1$ אז הישר $y=b_1$ הוא אסימפטוטה המקבילה לציר ה-x.

אם $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b_2$ אז הישר $y=b_2$ הוא אסימפטוטה המקבילה לציר ה-x.

פתרון - דרך א'

כידוע: $\sqrt{x^2}=|x|$

לכן, את הפונקציה $f(x)$ אפשר לרשום בצורה:

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}=\frac{x-1}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$

אם $x>0$ אז $|x|=x$ ומקבלים:

$$f(x)=\frac{x-1}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$

חשבון הגבולות הבא יהיה נכון, אם בסופו מתקבל גבול סופי. ואכן:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

מסקנה: אם $x>0$ אז הישר $y=1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה-x.

אם $x<0$ אז $|x|=-x$ ומקבלים:

$$f(x)=\frac{x-1}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}=\frac{-1}{\sqrt{1}}=-1$$

מסקנה: הישר $y=-1$ הוא אסימפטוטה המקבילה לציר ה-x עבור $x<0$.

פתרון - דרך ב'

נזכיר כי: עבור $x\ge 0$ מתקיים: $x=\sqrt{x^2}$

נזכיר כי: עבור $x<0$ מתקיים: $x=-\sqrt{x^2}$

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום: $\{x \mid x<-2 \text{ או } x>2\}$

נכניס את המונה של הפונקציה לתוך השורש הריבועי:

עבור $x>2$ הביטוי $x-1$ הוא בעל ערך חיובי לכן:

$$x-1=\sqrt{(x-1)^2}$$

עבור $x<-2$ הביטוי $x-1$ הוא בעל ערך שלילי לכן:

$$x-1=-(-(x-1))=-\sqrt{(-(x-1))^2}=-\sqrt{(x-1)^2}$$

כעת נחשב את הגבולות באופן הבא:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x^2-4}}=$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}}=\sqrt{1}=1$$

כלומר הישר $y=1$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה בקרן החיובית של ציר ה-x.

עבור הקרן השלילית שלו, אפשר למצוא את האסימפטוטה האופקית באופן דומה:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x^2-4}}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x^2-4}}=-1$$

כלומר הישר $y=-1$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה בקרן השלילית של ציר ה-x.

כדאי לשים לב לכך שאפשר לבדוק בקלות האם יש נקודות חיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטות האופקיות שלה, אלה המקבילות לציר ה-x. (ובכך לקבל מידע נוסף לבניית הגרף של הפונקציה). לצורך כך יש לפתור את המשוואה $f(x)=b$, כאשר $y=b$ הוא האסימפטוטה האופקית.

בקרן החיובית של ציר ה-x האסימפטוטה המקבילה היא $y=1$. נפתור את המשוואה הבאה:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}=1 \Leftrightarrow x-1=\sqrt{x^2-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-4 \Leftrightarrow x=2.5$$

הפתרון $x=2.5$ שייך לתחום $x>2$, לכן הנקודה $(2.5,1)$ היא נקודת חיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה האופקית שלה $y=1$.

באופן דומה נטפל בתחום $x<-2$. האסימפטוטה האופקית של הפונקציה בו היא הישר $y=-1$. נגיע למשוואה הבאה:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}=-1 \Leftrightarrow 1-x=\sqrt{x^2-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2x+x^2=x^2-4 \Leftrightarrow x=2.5$$

אך $x=2.5$ לא שייך לתחום $x<-2$, כלומר לגרף הפונקציה אין נקודות חיתוך עם האסימפטוטה $y=-1$.

ננסח טענה כללית המתייחסת למציאת אסימפטוטות, המקבילות לציר ה-x, עבור פונקציות אי-רציונליות (כמו זו שהופיעה בשאלה מבחינת הבגרות).

טענה: אם נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{או} \quad f(x)=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{mx+n}$$

כאשר: $a>0\,, m\neq 0$

אזי הישרים $y=\frac{\sqrt{a}}{m}$ או $y=\frac{m}{\sqrt{a}}$ הם אסימפטוטות אופקיות של הפונקציות עבור $x>0$, והישרים $y=-\frac{\sqrt{a}}{m}$ או $y=-\frac{m}{\sqrt{a}}$ הם אסימפטוטות של הפונקציות עבור $x<0$.

הוכחה: (עבור מקרה אחד. ההוכחה עבור המקרה השני דומה מאוד.)

$$f(x)=\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{x\left(m+\frac{n}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}}=$$

$$= \frac{x\left(m+\frac{n}{x}\right)}{|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}$$

אם $x>0$ אז $|x|=x$ ומקבלים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(m+\frac{n}{x}\right)}{x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(m+\frac{n}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(m+\frac{n}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}}=\frac{m}{\sqrt{a}}$$

באופן דומה אם $x<0$ אז $|x|=-x$ כלומר:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(m+\frac{m}{x}\right)}{-x\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=-\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m+\frac{n}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=$$

$$=-\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m+\frac{n}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}}=-\frac{m}{\sqrt{a}}$$

טענה: כאשר $m=0$ ו- $n\neq 0$ הפונקציה $f(x)$ היא:

$$f(x)=\frac{n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ או $$f(x)=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{n}$$

ולפונקציות אלה יש רק אסימפטוטה אופקית אחת והיא הישר $y=0$.

הוכחה:

$$f(x)=\frac{n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{n}{\sqrt{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}}=$$

$$\frac{n}{|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=\frac{\frac{n}{|x|}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}$$

אם $x>0$ אז $|x|=x$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{n}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}}=\frac{0}{\sqrt{a}}=0$$

אם $x<0$ אז $|x|=-x$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{n}{-x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{n}{(-x)}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{n}{(-x)}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}}=\frac{0}{\sqrt{a}}=0$$

כלומר בשני המקרים האסימפטוטה האופקית של הפונקציה היא הישר $y=0$.