



הנושא: סדרות, אינדוקציה ונוסחאות נסיגה הזדמנויות לקישוריות בין תחומים במתמטיקה חלק א'

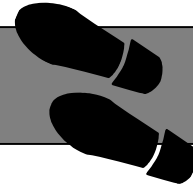
הוכן ע"י: חמוטל דוד.

תקציר: בחלק זה של המאמר מוצגת בעיה המזמנת אפשרות קישור בין הנושאים הבאים: סדרות, נוסחאות נסיגה ואינדוקציה מתמטית, המופיעים בתכנית הלימודים במסגרת לימוד האלגברה. הבעיה מוצגת בצירוף פתרון מלא, המאפשר דיון באפשרויות הקישור ובערכים מוספים, שניתן לשלב במהלך ההוראה. חלק מהדיון המופיע במאמר זה פורסם כ"בעיית חודש" על-ידי המרכז הארצי "קשר חס" – לקידום, שיפור וריענון החינוך המתמטי.

מילות מפתח: אלגברה, סדרות, סדרה כללית, סדרה חשבונית, סכום סדרה, סכום ריבועים, נוסחת נסיגה, מנייה, אינדוקציה, זהות, חקר וגילוי, הכללה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 32, סיוון תשס"ד - יוני 2004, עמודים 50-57.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.



סדרות, אינדוקציה ונוסחאות נסיגה הזדמנות לקישוריות בין תחומים במתמטיקה חלק א

חמוטל דוד

"קשר חס" – המרכז הארצי למתמטיקה

hamutal@tx.technion.ac.il

רציונל

מאד ביניהם העיסוק בקשר זה דל מאד. הבעיה מוצגת בצירוף פתרון מלא, המאפשר דיון באפשרויות הקישור ובערכים מוספים, שניתן לשלב במהלך ההוראה. בהמשך תוצגנה בעיות נוספות. חלק מהדיון המופיע במאמר זה פורסם כ"בעיית חודש" על-ידי המרכז הארצי "קשר חס" – לקידום, שיפור וריענון החינוך המתמטי.

הבעיה: כמה ריבועים וכמה מלבנים בריבוע אחד?

נביט בריבוע כלשהו ונסמן ב- n מספר טבעי. עבור כל מספר טבעי n ניתן לחלק את הריבוע ל- $n \times n$ ריבועים, על-ידי יצירת סריג של ישרים המקבילים לצלעות הריבוע. לאחר יצירת הסריג מתקבל ריבוע מחולק. הישרים היוצרים את הסריג מהווים צלעות של ריבועים ומלבנים רבים.

בכמה ריבועים ובכמה מלבנים ניתן להבחין בריבוע מחולק ל- $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, \dots, n \times n$ ריבועים?

לבעיה זו דרכים רבות לפתרון. הקוראים מוזמנים לנסות את כוחם במציאת דרכים רבות ככל האפשר לפתרון הבעיה, תוך הדגשת אפשרויות השילוב בין הנושאים הקשורים מתכנית הלימודים.

פתרון הבעיה, המובא להלן, תואם את מהלך החשיבה והניתוח, שביצעתי לצורך הפתרון. במהלך זה ניתן להבחין, לדעתי, במספר אסטרטגיות לפתרון בעיות.

פתרון

לאורך כל הפתרון המונח: 'ריבוע $n \times n$ ' מתאר ריבוע המחולק ל- $n \times n$ ריבועים.

תכנית הלימודים במתמטיקה של בית-הספר העל-יסודי מתפרשת על פני תחומים רבים ומגוונים של המתמטיקה, הנלמדים, לרוב, בנפרד. הדבר נכון, כאשר מתייחסים, למשל, להפרדה בין נושאי האנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי) לבין נושאי האלגברה או הגיאומטריה האנליטית. במסגרת לימוד האלגברה דנים בהרחבה בחקירת פונקציות ריבועיות, ללא שימוש בכלים דיפרנציאליים. לעומת זאת במסגרת לימודי האנליזה חוקרים פונקציות מסוגים שונים בכלים דיפרנציאליים, אך נדיר שמתבצע קישור לחקירה של פונקציה ריבועית בכלים אלגבריים בלבד. באופן דומה, במסגרת לימודי החשבון הדיפרנציאלי מתבצעת חקירת 'פונקציות שורש' כדוגמת:

$$y = \sqrt{x^2 + 16}, y = \sqrt{x^2 - 16}$$

ואחרות, אך נדיר שמתבצע הקישור להגדרה הגיאומטרית של עקומים אלה, הנלמדת במסגרת הגיאומטריה האנליטית.

יותר מכך: גם כאשר סוקרים את נושאי הלימוד בתוך פרקי הלימוד שהוזכרו לעיל, כגון אנליזה, אלגברה, גיאומטריה אנליטית, או אחרים, לא קשה למצוא נושאים שניתן בנקל לקשרם מבחינה תוכנית, אשר הקישור ביניהם נזנח. הדבר בולט מאד בתוך פרק האלגברה, בהיותו פרק רחב ומרכזי בתכנית הלימודים.

בחלק זה של המאמר מוצגת בעיה המזמנת אפשרות קישור בין הנושאים הבאים: סדרות, נוסחאות נסיגה ואינדוקציה מתמטית, המופיעים בתכנית הלימודים במסגרת לימוד האלגברה. למרות שהנושאים קשורים

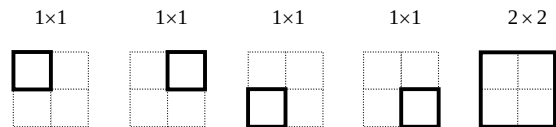
חלק I - ריבועים בריבוע:

- נבחן מעט מקרים פרטיים:
בריבוע 1×1 ניתן להבחין בריבוע אחד.



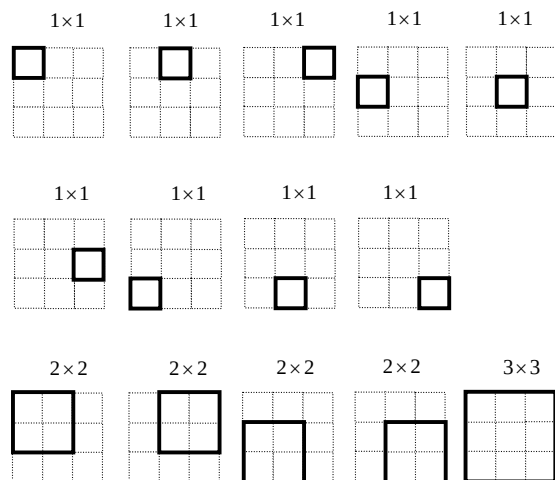
איור 1: הריבועים בריבוע 1×1

- בריבוע 2×2 ניתן להבחין בחמישה ריבועים: ארבעה ריבועים 1×1 והריבוע 2×2 כולו.



איור 2: הריבועים בריבוע 2×2

- בריבוע 3×3 ניתן להבחין בארבעה-עשר ריבועים: תשעה ריבועים 1×1 , ארבעה ריבועים 2×2 והריבוע 3×3 כולו.



איור 2: הריבועים בריבוע 3×3

- בריבוע 4×4 ניתן להבחין בשלושים ריבועים: שישה-עשר ריבועים 1×1 , תשעה ריבועים 2×2 , ארבעה ריבועים 3×3 והריבוע 4×4 כולו. בידקו!

מכאן, רב הפיתוי לשער כי:

בריבוע $n \times n$ ניתן להבחין ב- $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ ריבועים.

- נוכיח את ההשערה על-ידי הצגת שיטות ספירה של הריבועים, בהם ניתן להבחין בריבוע $n \times n$. מובאות להלן שתי שיטות ספירה, המצדיקות את הנוסחה. השיטה הראשונה (שיטה א) היא שיטת ספירה כוללת, המובילה להגדרת הסדרה של מספרי הריבועים בהם ניתן להבחין בריבועים $n \times n$ (לכל n) באמצעות n בלבד (הגדרת הסדרה באמצעות האיבר הכללי שלה). השיטה השנייה (שיטה ב) היא שיטה המובילה להגדרת אותה סדרה באמצעות כלל נסיגה. התלכדות הסדרות מתגלה בתהליך אלגברי פשוט, אך יש בו מן ההפתעה.

שיטה א – הגדרת הסדרה באמצעות האיבר הכללי:

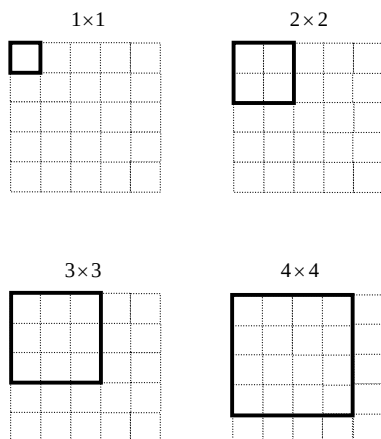
נתאר בתחילה את שיטת הספירה למקרה של ריבוע 5×5 :

במהלך התיאור נשתמש במושג 'פינה', המתאר בדרך כלל מפגש של יותר משני מישורים במרחב, לתיאור מושג במישור. אנו נאמר, כי ריבוע 1×1 מונח ב'פינה' השמאלית העליונה של הריבוע 5×5 , ונתכוון לכך: א. שהקדקודים השמאליים העליונים של שני הריבועים מתלכדים זה עם זה.

ב. שהצלע העליונה של הריבוע 1×1 מונחת על הצלע העליונה של הריבוע 5×5 .

ג. שהצלע השמאלית של הריבוע 1×1 מונחת על הצלע השמאלית של הריבוע 5×5 .

נשתמש במושג זה גם עבור גדלים אחרים של ריבועים. נביט ב'ריבועים החלקיים' של הריבוע 5×5 , המונחים בפינתו השמאלית העליונה (כמתואר באיור 4).



איור 4: ריבועים חלקיים המונחים בפינה השמאלית העליונה של ריבוע 5×5

נקבל, כי לכל מספר טבעי $k \leq n$ המכילים k המכילים את הריבוע $k \times k$ המונח בפינתו השמאלית העליונה של הריבוע המקורי, הוא ריבוע פינתי שמאלי עליון של ריבוע $(n - (k - 1)) \times (n - (k - 1))$. על-כן, בריבוע המקורי $n \times n$ מבחינים ב- k^2 ריבועים $(k - 1) \times (n - (k - 1))$. בסך-הכל על-פי ספירה זו ניתן להבחין בריבוע ב- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ ריבועים מכל הגדלים.

שיטה ב – הגדרת הסדרה באמצעות כלל נסיגה :

נניח כי אנו יודעים את מספר הריבועים בהם ניתן להבחין בריבוע $(n - 1) \times (n - 1)$ נסמן מספר זה ב- a_{n-1} . נחקור מהו מספר הריבועים בהם ניתן להבחין כאשר מוסיפים לריבוע $(n - 1) \times (n - 1)$ שורה אחת ועמודה אחת, כלומר כאשר עוברים ממנו לריבוע $n \times n$. למספר הריבועים בהם ניתן להבחין בריבוע $(n - 1) \times (n - 1)$ יש להוסיף את מספר הריבועים, אשר בקבוצת הריבועים הנוספת במעבר. כל הריבועים הנוספים הם כאלה שיש להם 'חלק' בשורה הנוספת או בעמודה הנוספת או בשתייהן.

אם נסמן את מספר הריבועים בהם ניתן להבחין בריבוע $n \times n$ ב- a_n נקבל כי :

$$a_n = a_{n-1} + \left\{ \begin{array}{l} \text{ריבועים שיש להם חלק} \\ \text{המונח בשורה הנוספת} \\ \text{או בעמודה הנוספת} \end{array} \right\}$$

המבנה המיוחד של הנוסחה הישירה לחישוב מספר הריבועים, בהם ניתן להבחין בריבוע $n \times n$, כפי שנמצאה בשיטה א, מאפשר בנקל לבנות באופן אלגברי נוסחת נסיגה המגדירה את הסדרה :

$$a_n = a_{n-1} + n^2$$

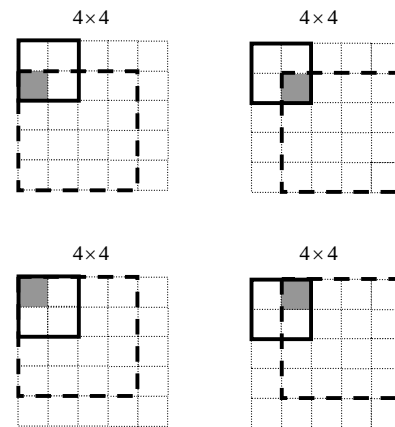
$$a_1 = 1$$

להלן שיטה, המונה את הריבועים הנוספים. שיטת המנייה עצמה לא מראה ישירות את הגודל הנוסף. גדולה על-כן ההפתעה, כאשר חישוב אלגברי מראה את הקשר בין שיטת המנייה לבין הנוסחה המצופה.

נעבור על פני כל הריבועים 1×1 בשורה ובעמודה שנוספו ונבחן האם בריבוע $n \times n$ שהתקבל, ניתן להבחין בריבוע 'קטן' יותר, אשר הריבוע 1×1 'הנוסף', מונח בפינה שלו. (ניתן להיעזר בציור).

הריבוע 1×1 המונח בפינתו השמאלית העליונה של הריבוע המקורי, הוא ריבוע פינתי עליון של ריבוע 5×5 . כלומר, בריבוע המקורי 5×5 מבחינים בריבוע אחד 5×5 .

כל אחד מארבעת הריבועים 1×1 , המרכיבים את הריבוע 2×2 המונח בפינתו השמאלית העליונה של הריבוע המקורי, הוא ריבוע פינתי שמאלי עליון של ריבוע 4×4 (כמתואר באיור 5).



איור 5: הריבועים 4×4 בריבוע 5×5 על-פי פינתם השמאלית העליונה

על-כן, בריבוע המקורי 5×5 מבחינים ב- 2^2 ריבועים 4×4 .

כל אחד מתשעת הריבועים 1×1 , המרכיבים את הריבוע 3×3 המונח בפינתו השמאלית העליונה של הריבוע המקורי, הוא ריבוע פינתי שמאלי עליון של ריבוע 3×3 . על-כן, בריבוע המקורי 5×5 מבחינים ב- 3^2 ריבועים 3×3 .

באופן דומה: כל אחד משישה-עשר הריבועים 1×1 , המרכיבים את הריבוע 4×4 , המונח בפינתו השמאלית העליונה של הריבוע המקורי, הוא ריבוע פינתי שמאלי עליון של ריבוע 2×2 . על-כן, בריבוע 2×2 מבחינים ב- 4^2 ריבועים 2×2 .

לבסוף כל ריבוע 1×1 נספר בעצמו, כלומר יש עוד 5^2 ריבועים 1×1 .

בסך הכל הבחנו בחמישים וחמישה ריבועים בריבוע 5×5 , על-פי החישוב :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

לחישוב מספר הריבועים, בהם ניתן להבחין, בריבוע $n \times n$, עבור מספר טבעי כלשהו n נשתמש באותה שיטה.

כלומר:

$$a_n = a_{n-1} + n^2$$

$$a_1 = 1$$

לסיכום: שתי שיטות המנייה שהוצגו מתאימות לשתי הדרכים המוכרות להגדרת סדרות של מספרים: הגדרה ישירה בעזרת איבר כללי והגדרה באמצעות כלל נסיגה. הזהות בין ההגדרות במקרה של בעיה זו בולטת לעין, אף כי ראוי לציין, כי שיטות המנייה השונות מוכיחות בעצמן זהות זו ולא נדרשת ההוכחה האלגברית. יותר מכך, שיטות המנייה השונות מהוות הוכחה חליפית להוכחה האלגברית לנוסחה:

$$2(1+2+\dots+n) - n = n^2$$

או על-ידי העברת אגפים:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

מעניין לחפש גם שיטת מנייה שתוכיח את הזהות המוכרת:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

חלק II - מלבנים בריבוע:

גם לפתרון בעיה זו מוצעות דרכי מנייה שונות, על-פי אפשרויות ההגדרה השונות של סדרות של מספרים: הגדרה ישירה והגדרה באמצעות כלל נסיגה.

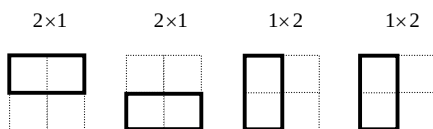
א. נבחן מעט מקרים פרטיים:

בריבוע 1×1 ניתן להבחין בריבוע אחד, שהוא גם מלבן.



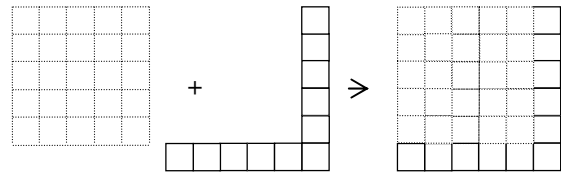
איור 7: הריבועים והמלבנים בריבוע 1×1

בריבוע 2×2 ניתן להבחין בחמישה ריבועים, שהם גם מלבנים ובארבעה מלבנים, שאינם ריבועים, שניים 1×2 ושניים 2×1 . המלבנים שאינם ריבועים מופיעים בציר:



איור 8: המלבנים שאינם ריבועים בריבוע 2×2

בסך-הכל מבחינים בריבוע 2×2 בתשעה (9) מלבנים. בריבוע 3×3 ניתן להבחין בארבעה-עשר ריבועים, בשנים-עשר מלבנים 1×2 או 2×1 , בשישה מלבנים



ריבוע חדש 'ריבועים נוספים' ריבוע מקורי

איור 6: מעבר מריבוע 5×5 לריבוע 6×6 על-ידי תוספת של ריבועים 1×1

כל 'ריבוע נוסף' הוא פינה של ריבוע 1×1 , כלומר של עצמו, ויש $2n-1$ ריבועים כאלה.

כל 'ריבוע נוסף' מונח בפינה של ריבוע 2×2 . מספר

הריבועים 2×2 השונים זה מזה, שלא נמנו בריבוע המקורי הוא: $2(n-1)-1$ בידקו! באופן דומה, מספר הריבועים השונים 3×3 שלא נמנו בריבוע המקורי הוא: $2(n-2)-1$. ובאופן כללי: מספר הריבועים השונים $k \times k$ ($k \leq n$) שלא נמנו בריבוע המקורי הוא $2(n-(k-1))-1$.

ארגון המסקנות בטבלה עוזר לניסוח הכלל:

מספר הריבועים	גודל הריבוע
$2n-1$	1×1
$2(n-1)-1$	2×2
$2(n-2)-1$	3×3
.	.
.	.
.	.
$2(2)-1$	$(n-1) \times (n-1)$
$2(1)-1$	$n \times n$

מספר הריבועים שלא נמנו בריבוע המקורי, אם כך, במעבר מריבוע $(n-1) \times (n-1)$ לריבוע $n \times n$ הוא:

$$2(1+2+\dots+n) - n$$

נוסחת הנסיגה המתקבלת היא:

$$a_n = a_{n-1} + 2(1+2+\dots+n) - n$$

$$a_1 = 1$$

חישוב אלגברי פשוט מגלה, באופן מפתיע, כי הנוסחה שהתקבלה זהה לנוסחה המצופה שכן:

$$2(1+2+\dots+n) - n = \frac{2(1+n)n}{2} - n =$$

$$= n(1+n-1) = n^2$$

1×3 או 3×1 , ובארבעה מלבנים 2×3 או 3×2 . בידקו!
בסך-הכל מבחינים בריבוע 3×3 בשלושים ושישה (36) מלבנים.

סדרת המספרים, שהתקבלה עד כה: 1, 9, 36 קצרה מכדי לבצע הכללות, אם כי קל להבחין בקשרים הבאים:

$$1 = 1^2 = 1^3$$

$$9 = (1+2)^2 = 1^3 + 2^3$$

$$36 = (1+2+3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$

האם ניתן להכליל ולטעון, כי מספר המלבנים, בהם ניתן להבחין בריבוע $n \times n$, נתון על-ידי כל אחת מהתבניות:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad \text{או} \quad (1+2+3+\dots+n)^2$$

ב. כדי לבדוק את אפשרות ההכללה, יש לחפש שיטה מנייה למלבנים. השיטה הראשונה המובאת להלן, מתבססת על ידיעת מספר הריבועים, שהם כמובן גם מלבנים, ומניית המלבנים שאינם ריבועים בנפרד. בחרתי להביאה ראשונה, למרות שבדיעבד מתגלה, כי היא אינה השיטה הפשוטה ביותר. אולם הפתרון מבוסס על פתרון הבעיה הקודמת, כך שהיא הטבעית ביותר, לדעתי. החיסרון העיקרי של השיטה הוא בחוסר היכולת שלה להסביר את החוקיות האלגברית, המתגלה בין איברי הסדרה. בהמשך אביא שיטות נוספות המסבירות את החוקיות הזו.

שיטה א – המתבססת על מניית הריבועים בריבוע:

על-פי האמור לעיל ברצוננו לפתח שיטה למניית המלבנים בהם ניתן להבחין בריבוע $n \times n$ בהסתמך על ידיעת מספר הריבועים בהם ניתן להבחין בריבוע זה. כלומר:

$$\left[\begin{array}{c} \text{מספר המלבנים} \\ \text{בהם ניתן להבחין בריבוע} \\ n \times n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{מספר הריבועים} \\ n \times n \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{מספר המלבנים} \\ \text{שאינם ריבועים} \\ n \times n \end{array} \right]$$

לצורך פיתוח השיטה נרכז בטבלאות את התוצאות שכבר אספנו:

מספר המלבנים שאינם ריבועים:

בריבוע 2×2		בריבוע 3×3	
סוג המלבן	מספר המלבנים	סוג המלבן	מספר המלבנים
2×1 או 1×2	2	2×1 או 1×2	2
		2×2	1
		3×1 או 1×3	2

מספר המלבנים מכל סוג מחושב כך:

2	$\cdot$	a	$\cdot$	b
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
עבור אפשרות הנחת המלבן לאורך או לרוחב		מספר המלבנים מסוג $k \times n$ ב- k עמודות או שורות הסמוכות אלו לאלו		מספר הקבוצות של k עמודות או שורות סמוכות אלו לאלו בריבוע כולו

באופן דומה מתקבלת המנייה הבאה של מספר המלבנים בריבוע 4×4 :

סוג המלבן	מספר המלבנים
2×1 או 1×2	2
3×1 או 1×3	2
4×1 או 1×4	2
3×2 או 2×3	2
4×2 או 2×4	2
4×3 או 3×4	2

מספר המלבנים שאינם ריבועים במקרה זה הוא:

$$2 \cdot [(1+2+3) \cdot 4 + (1+2) \cdot 3 + 1 \cdot 2] = 70$$

לאחר הוספת מספר הריבועים מתקבל, כי מספר המלבנים בהם ניתן להבחין בריבוע 4×4 הוא מאה (100 = 70 + 30).

הקוראים מוזמנים לחזור על תהליך דומה למניית מלבנים שאינם ריבועים גם בריבועים אחרים.

בהכללה: מספר המלבנים שאינם ריבועים בריבוע $n \times n$ הוא:

סוג המלבן	מספר המלבנים
2×1 או 1×2	$2 \cdot (n-1) \cdot n$
3×1 או 1×3	$2 \cdot (n-2) \cdot n$
4×1 או 1×4	$2 \cdot (n-3) \cdot n$
$\vdots$	$\vdots$
$n \times 1$ או $1 \times n$	$2 \cdot 1 \cdot n$
3×2 או 2×3	$2 \cdot (n-2) \cdot (n-1)$
4×2 או 2×4	$2 \cdot (n-3) \cdot (n-1)$
$\vdots$	$\vdots$
$n \times 2$ או $2 \times n$	$2 \cdot 1 \cdot (n-1)$
$\vdots$	$\vdots$
$n \times (n-1)$ או $(n-1) \times n$	$2 \cdot 1 \cdot 2$

ובסך הכל מתקבל, כי מספר המלבנים הוא :

$$(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 2[(1+2+\dots+(n-1)) \cdot n + (1+2+\dots+(n-2)) \cdot (n-1) + \dots + (1+2) \cdot 3 + 1 \cdot 2]$$

נשאיר לקוראים את הוכחת הזהות בין תבנית זו לבין כל אחת מהתבניות :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 ; (1+2+3+\dots+n)^2$$

ניתן לעשות זאת, כמובן, על-ידי שימוש באינדוקציה מתמטית.

בהמשך מתוארות שתי שיטות מנייה נוספות, המובילות להגדרת הסדרה באמצעות איבר כללי. כל אחת מהשיטות מסבירה תבנית אחת מאלה, שהתגלו על-פי החוקיות האלגברית. השיטה הראשונה מתאימה לריבוע הסכום של המספרים הטבעיים מ-1 ועד ל- n , ואילו השיטה השנייה מתאימה לסכום החזקות השלישיות של המספרים הללו. מהשיטה השנייה עולה בנקל גם הגדרת הסדרה באמצעות כלל נסיגה, כפי שיובהר בהמשך.

שיטה ב – המסבירה את התבנית : $(1+2+\dots+n)^2$

נמנה כעת את המלבנים, בהם ניתן להבחין בריבוע $n \times n$ בקבוצות. הקבוצות נבדלות זו מזו במימד האורך של המלבנים.

כלומר : נמנה בנפרד את כל המלבנים : $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \dots, 1 \times n$, לאחר מכן נמנה את המלבנים : $2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \dots, 2 \times n$, כך נתקדם עד לקבוצת המלבנים בעלי מימד אורך n .

מספר המלבנים בעלי מימד אורך 1 :

בשורה אחת ניתן להבחין :

- במלבן אחד (1) בעל מימד רוחב n ;

- בשני מלבנים (2) בעלי מימד רוחב $n-1$;

- בשלושה מלבנים (3) בעלי מימד רוחב $n-2$;

- בארבעה מלבנים (4) בעלי מימד רוחב $n-3$;

...

...

- ב- n מלבנים בעלי מימד רוחב 1.

לכן, בסך-הכל בשורה אחת ניתן להבחין ב- $(1+2+3+\dots+n)$ מלבנים בעלי מימד אורך 1.

בריבוע כולו יש n שורות, לכן במלבן כולו ניתן להבחין ב- $(1+2+3+\dots+n) \cdot n$ מלבנים בעלי מימד אורך 1.

מספר המלבנים בעלי מימד אורך 2 :

בשתי שורות סמוכות זו לזו ניתן להבחין :

- במלבן אחד (1) בעל מימד רוחב n ;

- בשני מלבנים (2) בעלי מימד רוחב $n-1$;

...

...

- ב- n מלבנים בעלי מימד רוחב 1.

בסך-הכל בשתי שורות סמוכות זו לזו ניתן להבחין ב- $(1+2+3+\dots+n)$ מלבנים בעלי מימד אורך 1. בריבוע כולו יש $n-1$ זוגות של שורות סמוכות, לכן במלבן כולו ניתן להבחין, ב- $(1+2+3+\dots+n) \cdot (n-1)$ מלבנים בעלי מימד אורך 1.

באופן דומה נקבל כי :

מספר המלבנים בעלי מימד אורך 3 הוא :

$$(1+2+3+\dots+n) \cdot (n-2)$$

מספר המלבנים בעלי מימד אורך 4 הוא :

$$(1+2+3+\dots+n) \cdot (n-3)$$

...

...

מספר המלבנים בעלי מימד אורך n הוא :

$$(1+2+3+\dots+n) \cdot 1$$

מספר המלבנים, בהם ניתן להבחין בריבוע כולו שווה לסכום כל המכפלות הנ"ל. אחרי הוצאת גורם משותף מחוץ לסוגרים מקבלים כי ערכו שווה ל-

$$(1+2+3+\dots+n) \cdot (1+2+3+\dots+n) = (1+2+3+\dots+n)^2$$

כך הוצדקה גם באופן 'ויזואלי' התבנית הראשונה.

נחפש כעת גם שיטת מנייה שתצדיק את התבנית השנייה.

שיטה ג – המסבירה את התבנית : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$

התבנית : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ מזכירה את התבנית שמצאנו כמתאימה לתיאור מספר הריבועים בריבוע $n \times n$: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. שיטת המנייה, שהובילה לתבנית זו באופן מיידי, התבססה על התבוננות בריבועים החלקיים, המונחים בפינה (השמאלית העליונה) של הריבוע $n \times n$ המקורי. שם הראינו, כי כל אחד מהריבועים 1×1 המרכיבים ריבוע פינתי $k \times k$ קובע ריבוע $(n-k+1) \cdot (n-k+1)$ על-כן כולס ביחד קובעים בדיוק k^2 ריבועים. מכאן המעבר לניסוח התבנית הכללית היה מיידי. בגלל הדמיון בין התבניות, ברור, כי אם נצליח להראות, כי כל הריבועים 1×1 המרכיבים ריבוע פינתי $k \times k$ קובעים ביחד k^3 מלבנים, תסתיים הוכחת הנוסחה.

נסתכל בריבוע 5×5 ובריבועים החלקיים המונחים בפינתו השמאלית העליונה :

והריבוע הימני התחתון קובע רק מלבן אחד, את הריבוע 4×4 המתאים לו. מספרי המלבנים אותם קובע כל ריבוע 1×1 בריבוע החלקי 2×2 רשומים באיור 12 בתאים המתאימים:

3	2
2	1

איור 12: מספרי המלבנים אותם קובע כל ריבוע 1×1 בריבוע הפינתי 2×2 החלקי לריבוע 5×5

מספר המלבנים שקובעים הריבועים 1×1 המרכיבים את הריבוע 2×2 מתקבל על-ידי סיכום המספרים בתאים שבאיור 12 ושווה ל- $8 = 2^3$.

מספר המלבנים, אשר אחת ממידותיהם היא בדיוק 3 והשנייה לפחות 3, אותם קובע כל אחד מהריבועים 1×1 , המרכיבים את הריבוע החלקי 3×3 , המונח בפינה השמאלית העליונה של הריבוע 5×5 , רשומים באיור 13, בתאים המתאימים:

5	4	3
4	3	2
3	2	1

איור 13: מספרי המלבנים אותם קובע כל ריבוע 1×1 בריבוע הפינתי 3×3 החלקי לריבוע 5×5

מספר המלבנים שקובעים הריבועים 1×1 המרכיבים את הריבוע 3×3 מתקבל על-ידי סיכום המספרים בתאים שבאיור 13 ושווה ל- $27 = 3^3$.

באיור 14 רשומים המספרים המתאימים עבור הריבוע החלקי 4×4 ועבור הריבוע 5×5 :

a

7	6	5	4
6	5	4	3
5	4	3	2
4	3	2	1

b

9	8	7	6	5
8	7	6	5	4
7	6	5	4	3
6	5	4	3	2
5	4	3	2	1

איור 14: מספרי המלבנים אותם קובעים ריבועים 1×1 בריבוע הפינתי 4×4 החלקי ל- 5×5 ובריבוע 5×5 כולו

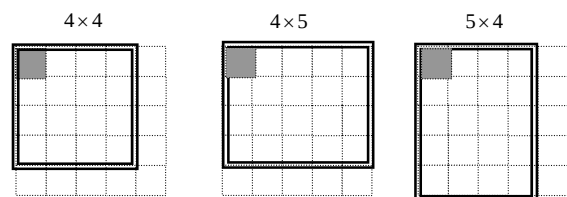
מספר המלבנים שקובעים הריבועים 1×1 המרכיבים את הריבוע 4×4 מתקבל על-ידי סיכום המספרים בתאים שבאיור a ושווה ל- $64 = 4^3$.

מספר המלבנים שקובעים הריבועים 1×1 המרכיבים את הריבוע 5×5 מתקבל על-ידי סיכום המספרים בתאים שבאיור b ושווה ל- $125 = 5^3$.

הריבוע 1×1 מונח בפינה השמאלית העליונה של הריבוע 5×5 . נאמר כי הוא קובע אותו.

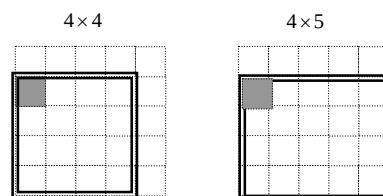
הריבוע 2×2 , מורכב מ- 2^2 ריבועים 1×1 , אשר כל אחד מהם מונח בפינה שמאלית עליונה של ריבוע 4×4 . אנו מונים מלבנים כדי לבצע מנייה שיטתית, נאמר כי כל ריבוע 1×1 , המרכיב את הריבוע החלקי 2×2 , קובע את כל המלבנים, אשר הוא מונח בפינה השמאלית העליונה שלהם, ואחת ממידותיהם בדיוק 4 והשנייה לפחות 4. כך מקבלים את התמונה הבאה:

הריבוע 1×1 השמאלי העליון בריבוע 2×2 קובע שלושה מלבנים: את הריבוע 4×4 , מלבן 4×5 ומלבן 5×4 . כמתואר באיור 9:



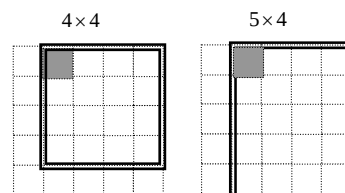
איור 9: המלבנים הנקבעים על-ידי הריבוע 1×1 הנמצא בפינה השמאלית העליונה של ריבוע פינתי 2×2

הריבוע השמאלי התחתון קובע שני מלבנים: את הריבוע 4×4 , המתאים לו ומלבן 4×5 (איור 10).



איור 10: המלבנים הנקבעים על-ידי הריבוע 1×1 הנמצא בפינה השמאלית התחתונה של ריבוע פינתי 2×2

גם הריבוע הימני העליון קובע שני מלבנים: ריבוע 4×4 ומלבן 5×4 , כמתואר באיור 11:



איור 11: המלבנים הנקבעים על-ידי הריבוע 1×1 הנמצא בפינה הימנית העליונה של ריבוע פינתי 2×2

ה'מספרים' הרשומים בתאים שבאיור 15. קל להבחין בחוקיות באיור. לצורך החישוב נשים לב לחוקיות באלכסונים המסומנים. (אפשר להשתמש גם בחוקיות בשורות או בטורים.) בכל תא של אלכסון מסומן כלשהו רשום מספר קבוע. כמו כן אם מסמכים מספר הרשום בתא כלשהו עם המספר הרשום בתא הסימטרי לו ביחס לאלכסון בו רשום המספר k בכל אחד מהתאים, מקבלים את התוצאה הקבועה $2k$. נחשב את הסכום הכולל על-ידי סיכום של המספרים הרשומים בזוגות אלכסונים, הסימטריים זה לזה ביחס לאלכסון בו רשום המספר k בכל אחד מהתאים.

נקבל כי הסכום כולו שווה ל- k^3 , שכן:

$$\begin{aligned} &= 2k + 2 \cdot 2k + 3 \cdot 2k + \dots + (k-1) \cdot 2k + k^2 = \\ &= 2k \cdot \frac{[1(k-1)] \cdot (k-1)}{2} + k^2 = \\ &= k^2 \cdot (k-1) + k^2 = \\ &= k^2 \cdot (k-1+1) = k^3 \end{aligned}$$

מכאן ניתן להסיק שלוש מסקנות:

1. מספר המלבנים, בהם ניתן להבחין בריבוע $n \times n$ נתון על-ידי התבנית:
2. בשל ידיעת שיטה ב ניתן לטעון, ללא צורך בהוכחה אלגברית, כי השוויון הבא נכון לכל מספר טבעי:
3. נוסחת הנסיגה המגדירה את הסדרה של מספרי המלבנים בהם ניתן להבחין בריבועים $n \times n$ (לכל n טבעי) היא:

$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + n^3$$

קל מאד להגיע לנוסחה זו מבחינה אלגברית על-פי שיטה ג. יתרונה של שיטת המנייה שתוארה כאן הוא ביכולתה להראות גם את הסיבה הגיאומטרית לנכונותה של הנוסחה. במעבר מריבוע $(n-1) \times (n-1)$ לריבוע $n \times n$ נוספים למנייה רק כל אותם המלבנים, שאחת ממידותיהם היא בדיוק n . כאלה, על-פי שיטת המנייה האחרונה יש בדיוק n^3 .

בחלק הבא של המאמר יידונו שתי בעיות נוספות, המאירות את הקשר ההדוק בין הנושאים: סדרות, אינדוקציה וכלל נסיגה.

בסך-הכל מספר המלבנים בהם ניתן להבחין בריבוע 5×5 , על-פי שיטת מנייה זו מתקבל, בהתאם לנוסחה הדרושה:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

כדי להפעיל את שיטת המנייה הנ"ל על ריבוע $n \times n$, נביט בריבועים החלקיים הפינתיים שלו $k \times k$. הריבוע קובע את הריבוע (מלבן) $n \times n$ בלבד. הריבועים המרכיבים את הריבוע הפינתי 2×2 קובעים את הריבועים $(n-1) \times (n-1)$ ואת המלבנים $(n-1) \times n$ ו- $n \times (n-1)$. מספר המלבנים שקובע כל אחד מהם, הוא בדיוק כמו שקובעים הריבועים בריבוע 2×2 עבור ריבוע 5×5 , כמתואר באיור 12.

הריבועים 1×1 המרכיבים את הריבוע הפינתי 3×3 קובעים את הריבועים $(n-2) \times (n-2)$ ואת המלבנים $(n-2) \times n$, $(n-1) \times (n-2)$ ו- $n \times (n-2)$. מספר המלבנים שקובע כל אחד מהם, הוא בדיוק כמו שקובעים הריבועים בריבוע 3×3 עבור ריבוע 5×5 , כמתואר באיור 13.

באופן כללי, ניתן לראות, כי הריבועים 1×1 המרכיבים את הריבוע הפינתי $k \times k$ קובעים את הריבועים $(n-k+1) \times (n-k+1)$ ואת המלבנים, שאחת ממידותיהם היא $n-k+1$ והשניה גדולה ממנה. מספר המלבנים שקובע כל אחד מהם, כמתואר באיור 15:

$2k-1$	$2k-2$	$2k-3$	.	.	$k+1$	k
$2k-2$	$2k-3$	.	.	$k+1$	k	$k-1$
$2k-3$	.	.	$k+1$	k	$k-1$	.
.	.	$k+1$	k	$k-1$	.	.
.	$k+1$	k	$k-1$	.	.	3
$k+1$	k	$k-1$	.	.	3	2
k	$k-1$	.	.	3	2	1

איור 15: מספרי המלבנים אותם קובעים ריבועים 1×1 בריבוע הפינתי $k \times k$ החלקי לריבוע $n \times n$

מספר המלבנים שקובעים כל הריבועים 1×1 , המרכיבים את הריבוע $k \times k$, נתון על-ידי סכום