הנושא: הקניית המושג 'מספרים מכוונים' – שילוב נימוקים חוץ-מתמטיים ופנים-מתמטיים

הוכן ע"י: מיכאל קורן.

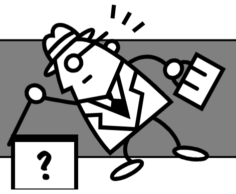
תקציר: במאמר מציע המחבר מהלך להוראת הנושא של מספרים מכוונים. המהלך כולל שימוש במודלים (נימוקים חוץ-מתמטיים) ובהגדרות פורמליות (נימוקים פנים-מתמטיים).

מילות מפתח: מספרים מכוונים, מספרים שליליים, פעולות חשבון, חיבור, חיסור, כפל, חילוק, מספר נגדי, ערך מוחלט, ציר מספרים, מתמטיקה בחיי היום יום, טמפרטורה, רווח והפסד, חוק הפילוג, חוק החילוף, פיאג'ה

החומר פורסם במסגרת: על"ה 32, סיוון תשס"ד - יוני 2004, עמודים 24-18.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

ale32-5



הקניית המושג 'מספרים מכוונים'
שילוב נימוקים חוץ-מתמטיים ופנים-מתמטיים

מיכאל קורן
mic42@macam.ac.il

מבוא

המתמטיקאים כקהילה קיבלו את המספרים השליליים כהרחבה של המספרים החיוביים והאפס לאחר קשיים רבים ובתקופה מאוחרת יחסית (בהשוואה, למשל, לתקופה בה התקבלו השברים כמספרים לכל דבר). הוספת המספרים השליליים למספרים האי-שליליים הייתה מהפכה מחשבתית לא פשוטה, שכן עד אז מספרים נתפסו כמודדים כמויות. גם האפס, המעיד על חוסר כמות, לא נקלט בקלות כמספר לתוך המתמטיקה. האפשרות של מספרים, שמודדים כמות הקטנה מלא כלום, הטרידה מתמטיקאים תקופה ארוכה. היסטוריונים של המתמטיקה מציינים כי קבלה מלאה של המספרים המכוונים התרחשה ביחד עם קבלת המספרים המרוכבים.

השימוש במספרים מכוונים בחיי יומיום הוא רב,לכאורה. כך למשל במדידת טמפרטורות (מעל ומתחת לאפס), במדידת גבהים (מעל ומתחת לגובה פני הים) ובקביעת מצב חשבון הבנק (יתרה חיובית ויתרה שלילית). השימושים האלה אמנם קיימים, אך בכולם המספרים השליליים מתפקדים כמספרים עם כינוי: טמפרטורה של 3 מעלות מתחת לאפס נקראת מינוס שלוש (-3) מעלות. גובה של 200 מטרים מתחת לפני הים נקרא גובה של מינוס מאתיים (-200) מטרים וחשבון שבו הלקוח חייב לבנק 2,000 ₪ נקרא חשבון ביתרה של מינוס אלפיים (-2000) ₪. בכל המצבים האלה אין צורך בביצוע פעולות חשבון במספרים מכוונים, וניתן לחשב את כל הדרוש בעזרת פעולות במספרים חיוביים. לדוגמא, גובה של 250 מטרים מעל פני הים גבוה מגובה של 100 מטרים מתחת לפני הים ב-350 מטרים, היות ומהמקום הנמוך בין השניים יש לעלות 100 מטרים עד לגובה פני הים, ואז לעלות עוד 250 מטרים. אפשר, אם כן, להשתמש בתרגיל החשבון $250+100$ ואין צורך לדעת לחשב את ההפרש: $250-(-100)$.

המעבר לחישוב במספרים המכוונים, והשימוש בביטוי כמו 'רווח של (-500)' שקלים במקום 'הפסד של 500' הוא צורך של הקהילייה המתמטית המחפשת האחדה של תהליכים ושל מצבים, ואינו צורך של חיי יומיום.

במאמר מוצע מהלך הוראה להקניית המושג 'מספרים מכוונים'. על-פי ההצעה יש להתייחס במפורש, לפחות בתחילת הדרך, למלאכותיות הקיימת בדרך החשיבה המתמטית בנושא המספרים המכוונים.

בתחילת מהלך ההוראה המוצע כאן נעשה שימוש בנימוקים חוץ-מתמטיים להוספת המספרים השלילים למספרים החיוביים (והאפס), לחיבור של מספרים מכוונים, לכפל וחילוק במספר חיובי ולחיסור של מספר חיובי ממספר מכוון. בהמשך, שימוש בנימוקים פנים-מתמטיים נעשה בפיתוח הכללים לחיסור מספר שלילי, לכפל ולחילוק של מספרים מכוונים.

הגדרה: נימוק חוץ-מתמטי הוא נימוק המסתמך על ידע לא מתמטי, כמו המשמעויות של פעולה, בשימושיה לפתרון בעיות (איסוף בחיבור, חילוק להכלה, וכו'). נימוק פנים-מתמטי הוא נימוק המסתמך רק על תכונות פורמאליות, (חוק הפילוג, לאחר שהוכר כתכונה של כפל מעל לחיבור, חוקי חזקות על סמך הגדרת החזקה עם מעריך טבעי ותכונות הכפל, הוכחות על סמך מערכת אכסיומות וכו').

להלן מתואר מהלך הוראה להקניית המושג 'מספרים מכוונים'.

הכנסת המושג 'מספרים מכוונים' ופעולת החיבור ביניהם

נבחר להתחיל את הקניית המושג 'מספרים מכוונים' תוך שימוש בהם לתיאור רווח והפסד. נסמן רווח במספר 'רגיל' כמו 7 , 0.5 , 100.25 ונסמן הפסד על ידי רישום הסימן "-" לפני (משמאל) למספר[1]. כך הסמל (7-) (קרי מינוס שבע) מסמן הפסד של 7 והסמל (0.7-) מסמן הפסד של 0.7[2].

הגדרה: מספר הנרשם עם סימן מינוס משמאלו, כמו (-7.5) נקרא מספר שלילי, מספר כמו 7.5 נקרא מעכשיו מספר חיובי. המספר 0 נחשב למספר שאינו חיובי ואינו שלילי. כל המספרים האלה ביחד נקראים המספרים המכוונים.

<u>חיבור מספרים מכוונים</u>

אם סוחר הפסיד בשבוע מסוים בעסקאות שונות 500₪, 700₪ ו-250₪ והרוויח באחרות 1,000₪ ו-400₪ הוא יודע שבסיכום השבוע הפסיד 50₪ כי הרוויח: $1{,}000 + 400 =$ 1,400 ₪ והפסיד $500 + 700 + 250 =$ 1,450 ₪. הסוחר מחבר את ההפסדים, מחבר את הרווחים ומשווה את התוצאות המתקבלות. מאחר והפסיד יותר מאשר הרוויח, הוא מחסר מההפסד (1,450) את הרווח (1,400) ויודע שההפרש (50) מצביע על הפסד של 50₪. שימו לב שכל החישובים של הסוחר הם במספרים חיוביים. הסוחר אינו זקוק לחישובים במספרים שליליים.

מתמטיקאי מסתכל על המצב בצורה קצת שונה. כמו שלצורך חישוב הרווחים משתמשים בחיבור, וגם לצורך חישוב ההפסדים משתמשים בחיבור, המתמטיקאי שואל את עצמו מדוע לא להשתמש בחיבור גם למקרים שחלקם רווח וחלקם הפסד. מאחר ורווח של 200 והפסד של 300 פירושו הפסד של 100, המתמטיקאי ירשום $200 + (-300) = -100$.

מתמטיקאי מחפש הכללות, ולכן, במקרה האחרון, ידבר על 'רווח של (100-)₪' במקום להגיד שיש הפסד של 100₪. כך יכול המתמטיקאי לתת 'מרשם' אחד, המתאים לכל האפשרויות, (לסוחר או למחשב) לחישוב הרווח או ההפסד כשיש כמה רווחים וכמה הפסדים. המרשם יהיה: למציאת הרווח הסופי, חבר את כל הרווחים (חיוביים או שליליים). הסכום של כולם הוא הרווח הסופי.

הערה: שימו לב שבתוך למספר המכוון (300-) המופיע בתרגיל. הוא רשום בתוך סוגריים, כדי למנוע בלבול בין הסימן המהווה חלק של שם המספר השלילי לבין סימן חיסור, שהרי אותו סימן משמש לשניהם.

תרגיל: חישבו על רווחים והפסדים ופיתרו:

$$5+12= \quad ; \quad 5+(-4)= \quad ; \quad (-5)+5=$$
$$(-5)+3= \quad ; \quad (-5)+(-4)=$$
$$5+\_\_\_=-2 \quad ; \quad (-25)+(-25)+17+(-7)+30=$$

הרכיבו תרגילי חיבור בהם שני המחוברים שליליים. מה תוכלו לומר על הסכום של שני מספרים שליליים?

<u>מספרים נגדיים</u>

הגדרה: שני מספרים, המסמנים רווח והפסד של אותו סכום נקראים מספרים נגדיים. לדוגמא (22-) ו-22 הם מספרים נגדיים.

תרגיל: כיתבו את המספר הנגדי לכל אחד מהמספרים הבאים: $5\,,\ -\dfrac{2}{3}\,,\ 0$.

תרגיל: חשבו $(-100)+100 = \_\_$

מה תוכלו לומר על הסכום של שני מספרים נגדיים? מה מסמן המספר "0" כאשר מדובר על רווח והפסד? מה קורה כשמוסיפים את המספר "0" למספר חיובי? למספר שלילי?

<u>כפל וחילוק של מספר מכוון במספר חיובי</u>

תרגיל: חשבו בשתי דרכים את הסכום הבא:

$$(-3)+(-3)+(-3)+(-3)$$

התרה: כסכום (של הפסדים) נוכל לחבר לפי הסדר ולקבל:

$$(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=$$
$$=(-6)+(-3)+(-3)=(-9)+(-3)=-12$$

ברור שטבעי יותר להגיד שיש ארבעה הפסדים שווים של 3 ולכן הפסד כולל של 12.

נסכים אפוא כי: $4\cdot(-3)=(-12)$

מכאן נוכל להכליל ולומר כי לכל שני מספרים: a טבעי ו-b חיובי, מתקיים: $a\cdot(-b)=-a\cdot b$.

מאחר ואפשר לחשוב על חצי חוב של 300 ₪, (או על חלק אחר ממנו) כמו על חצי רווח של 300 ₪, נוכל

---

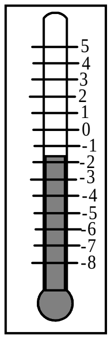
[1] לפעמים רושמים את הסימן "+" משמאל למספר (לדוגמא: (7+)) לציון רווח, או באופן כללי לציון מספר חיובי (גם בשימושים אחרים של המספרים המכוונים). אנו לא ננהג כך.

[2] הסוגריים בסימול המספר השלילי ניתנים להשמטה רק במקרים בהם הדבר אינו יוצר בלבול ואינו פוגם בסדר פעולות החשבון.

לוותר על הגבלת הטבעיות של a, ולהסכים כי לכל שני מספרים חיוביים a ו-b מתקיים $a\cdot(-b)=-a\cdot b$.
מאחר שכל חילוק במספר חיובי אפשר להציג על ידי כפל (כפל בהפכי), נסכים גם שלכל שני מספרים חיוביים a ו- b מתקיים: $(-a):b=-(a:b)$.

<u>חיסור מספר חיובי ממספר מכוון</u>

כדי ללמוד לחסר מספר חיובי ממספר מכוון כלשהו נעבור לשימוש במספרים מכוונים למדידת טמפרטורות.



במדחום כספית (מדחום לא דיגיטאלי), הטמפרטורה נמדדת על פי גובה הכספית מעל או מתחת לנקודת האפס.

שאלה: מהי הטמפרטורה שמראה מד החום משמאל?
תשובה: בערך $-1.6°$
נייחס משמעות לחיבור ולחיסור של מספר חיובי ממספר מכוון על ידי עליה או ירידה לאורך המדחום.

דוגמאות:

1. הטמפרטורה הייתה 5 מעלות וירדה ב-7 מעלות. לכן הטמפרטורה עכשיו היא (-2). בתרגיל נכתוב: $5-7=-2$.
2. הטמפרטורה הייתה (-6) מעלות וירדה ב-7 מעלות. לכן הטמפרטורה עכשיו היא (-13) מעלות, או בתרגיל: $(-6)-7=-13$.
3. הטמפרטורה הייתה $-1.5°$ והיא עלתה בארבע וחצי מעלות. מהי הטמפרטורה עכשיו? תשובה: $(-1.5)+4.5=3$, ולכן הטמפרטורה עכשיו היא שלוש מעלות.

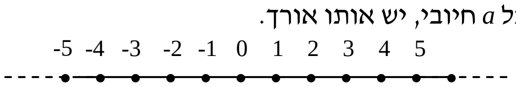
במקום במודל המדחום (או בנוסף לו) אפשר להשתמש במודל של עליה וירידה במדרגות, כמודגם בתרגיל הבא:

בבניין רב קומות על צלע הר יש דירות מעל לקומת הכניסה ודירות מתחת לקומת הכניסה. בדירת הגג גר מר זהבי, שהיה תלמיד חלש במתמטיקה. בקומת המרתף גר המורה שלו למתמטיקה, שלא יכול להרשות לעצמו קומה גבוהה יותר. נמרוד, הנכד של המורה, ושָׁני, הבת של מר זהבי הם שניהם בני ארבע וחברים טובים. מר זהבי והמורה לימדו את החברים משחק. הם סימנו את קומת הכניסה במספר אפס,את המדרגות מעל לרצפת הכניסה במספרים $1,\ 2,\ 3,\ldots$ לפי הסדר ואת המדרגות מתחת לרצפת הכניסה במספרים $-1,-2,-3\ldots$ לפי הסדר.

נמרוד ושָׁני שואלים זה את זה חידות: עמדתי על מדרגה (5-) ועליתי שבע מדרגות, לאן הגעתי? ירדתי חמש מדרגות והגעתי למדרגה 10 היכן התחלתי? ירדתי מ-2 ל-(9-) כמה מדרגות ירדתי? עמדתי על 3, ירדתי 5 מדרגות ועליתי 7 מדרגות, לאן הגעתי?
עיזרו לשָׁני ולנמרוד לענות על השאלות וחברו עבורם שאלות נוספות.

<u>בניית ציר מספרים</u>

את המספרים המכוונים נהוג להציג על ציר מספרים, הדומה לסקלה של המדחום: על ישר קובעים נקודה שתסמן את מיקום המספר "0". קובעים נקודה שנייה, שונה מהראשונה, לציון מיקום המספר "1" (בחירת שתי נקודות אלו היא שרירותית). אם הישר 'מאוזן' מקובל לקבוע את 1 מימין ל-0, וכך ננהג במאמר זה.
לאחר שנקבעו המקומות של 0 ו-1 כל יתר המספרים החיוביים 'מסתדרים' על הקרן המתחילה בנקודה בה סומן 0 וכוללת את המספר 1, לפי גודלם, קרן זו נקראת הקרן החיובית. כך למשל הנקודה בה יסומן המספר 3 תהייה הנקודה שמרחקה מ-0 גדול פי שלושה ממרחק ה-1 מהאפס, ומרחק הנקודה בה יסומן המספר $\frac{2}{5}$ מהאפס הוא שתי חמישיות של מרחק ה-1 מ-0 (מכאן שהנקודה $\frac{2}{5}$ נמצאת על הקטע בין 0 ל-1, קרוב יותר ל-0) בניסוח אחר: הקטע $[0;3]$ ארוך פי שלושה מהקטע $[0;1]$ ואורך הקטע $\left[0;\frac{2}{5}\right]$ הוא $\frac{2}{5}$ של הקטע $[0;1]$. עד כה סימנו נקודות רק על הקרן החיובית.
הקרן האחרת המתחילה ב-0, נקראת הקרן השלילית, ועליה מסודרים כל המספרים השליליים, באופן הבא: כל מספר שלילי נמצא על הקרן השלילית באותו מרחק מה-0 כמו המספר החיובי הנגדי לו. כך לדוגמא, (3-) נמצא במרחק השווה למרחק של המספר 3 מהאפס, כך שאורך הקטע $[-3;0]$ גדול פי שלושה מאורך הקטע $[0;1]$. ברור גם כי אורכי הקטעים $[0;1]$ ו- $[-1;0]$ שווים זה לזה, ובאופן כללי, לקטעים $[0;a]$ ו- $[-a;0]$, לכל a חיובי, יש אותו אורך.



אורכים נמדדים על ציר המספרים ביחידה הנקבעת על ידי הקטע $[0;1]$. כך למשל, המרחק של הנקודה שתסומן ב-(3-) מהאפס הוא 3 יחידות והמרחק בין הנקודות המסומנות ב-(3-) ו-2 הוא 5 יחידות.

חיסור של מספר חיובי ממספר מכוון

על ציר המספרים ננהג בחיבור או חיסור של מספר חיובי כמו בחישובי טמפרטורות, דהיינו, לכל מספר מכוון a ולכל מספר חיובי b, המספר: $a+b$ הוא המספר הנמצא מימין ל-a, במרחק b ממנו; המספר: $a-b$ הוא המספר הנמצא משמאל ל-a, במרחק b ממנו. לדוגמא:

$$(-3)+7=4 \quad , \quad (-3)-7=-10 \quad , \quad 5-7=-2$$

הערות:

1. למדנו בסעיפים קודמים לחבר מספרים מכוונים, ולכן החידוש כאן הוא רק לגבי חיסור של מספר חיובי. יש לשים לב שהסכום של מספר מכוון ומספר חיובי על הציר שווה לסכום של אותם המספרים המתקבל בעזרת המודל של רווח והפסד.
2. כבר כאן אפשר לשער, שבמקום לחסר מספר חיובי אפשר לחבר את הנגדי לו: ראינו למשל כי $(-3)-7=-10$, ואנחנו יודעים כי גם $(-3)+(-7)=-10$.

סדר המספרים המכוונים

תנועה שמאלה על ציר המספרים פירושה הקטנה ותנועה ימינה פירושה הגדלה. לכן: מספר מכוון הנמצא על הציר מימין למספר מכוון אחר, הוא גדול מהמספר האחר. כך למשל, (-100) קטן מ-3, ובכלל, כל מספר חיובי גדול מכל מספר שלילי. באופן זה הסדר המוכר בין המספרים החיוביים נשמר. בין המספרים השליליים נראֶה שהסדר מתהפך: 100 גדול מ-5, אבל (100-) קטן מ-(5-).

סיכום ביניים

עד כה: א) הגדרנו חיבור של מספרים מכוונים וכפל או חילוק של מספר מכוון במספר חיובי, בעזרת מודל הרווחים והפסדים. ב) הגדרנו חיבור וחיסור של מספר טבעי ממספר מכוון בעזרת מודל הטמפרטורות (או ציר המספרים).

הנימוקים לחישוב התוצאות היו חוץ-מתמטיים. שימו לב ששינינו מודל במעבר מחיבור לחיסור של מספר חיובי ממספר מכוון. קשה לייחס משמעות לחיבור טמפרטורות (או גבהים של הרים) אלא רק בעקיפין, לצורך חישוב ממוצעים, ואילו כשעוסקים ברווח והפסד קשה לייחס משמעות לחיסור. בהמשך, במקום להוסיף עוד מודל לפיתוח הפעולות הבאות, נעבור לשימוש בנימוקים פנים-מתמטיים. זאת מאחר והשימוש בשלוש משמעויות שונות של המספרים המכוונים בשלושה שלבים של הפיתוח הוא, לדעתי, נטל לזיכרון. כמו כן, אינני מכיר נימוק חוץ-מתמטי טוב לכפל של שני מספרים שליליים, כך שבכל מקרה יש לשלב בפיתוח גם נימוקים פנים-מתמטיים.

פתרון משוואות

לפני שנעבור לחיסור מספר שלילי ממספר מכוון, ניזכר כיצד פותרים משוואה עם משתנה אחד.

לדוגמה, נפתור את המשוואה: $3x-1=7+x$

פתרון:

$$\begin{aligned}
&3x-1=7+x \quad /+1\\
&3x=7+x+1\\
&3x=8+x \qquad /-x\\
&3x-x=8\\
&2x=8 \quad /\div 2\\
&x=4
\end{aligned}$$

נאיר מספר נקודות בפתרון:

1. בכל שלב הוספנו או החסרנו אותו מספר לשני האגפים או חילקנו את שני האגפים באתו מספר, ולכן לא שינינו את פתרון המשוואה. פעולות אלו על שני האגפים, ביחד עם כפל שני האגפים (במספר שונה מ-0) נקראות 'פעולות מותרות' – הן שומרות על פתרון המשוואה.
2. במעבר מהשורה הראשונה לשנייה הוספנו את המספר 1 לשני האגפים. ראינו שמותר לנו להוסיף 1, אבל מדוע הוספנו דווקא מספר זה, ולא, למשל, את המספר 3? הסיבה הייתה שרצינו לבטל את החסרת ה-1 באגף שמאל. השתמשנו בכך שחיבור וחיסור הן פעולות הפוכות, כלומר, הוספה והחסרה של אותו מספר אינה משנה את המספר האחר: $10-5=10$ $10+5-5=10$ וגם $10-5+5=10$.
במעבר מהשורה השלישית לרביעית חיסרנו x, הפעם כדי לבטל את ההוספה של x ל-8.
במעבר לשורה האחרונה חילקנו ב-2 כדי לבטל את הכפל של x ב-2.

נפתור גם את המשוואה: $2x+5=x+3$

פתרון:

$$2x+5=x+3 \quad /-x$$
$$x+5=3 \quad /-5$$
$$x=3-5$$
$$x=-2$$

האם הפתרון נכון? נציב (-2) במשוואה ונבדוק.

נקבל: $2\cdot(-2)+5\overset{?}{=}(-2)+3$

מאחר ובכל אגף ערך הביטוי הוא 1, הרי שהפתרון נכון. בשלב הראשון של פתרון המשוואה חיסרנו x משני האגפים. באגף ימין רשמנו למעשה: $x-x=0$, ובאגף שמאל רשמנו: $2x-x=x$. ביצענו רישומים אלה היות ורצינו לשמור על כללים מוכרים מחיסור של מספרים חיוביים. לא התייחסנו לאפשרות שפתרון המשוואה הוא מספר שלילי. בדיעבד, לאחר פתרון המשוואה אפשר לשים לב שבעצם ביצענו את תרגילי החיסור הבאים: באגף ימין: $(-2)-(-2)=0$ ובאגף שמאל: $(-4)-(-2)=-2$. כלומר, כדי לפתור משוואה פשוטה כמו זו שפתרנו, עלינו להסכים כי $2x-x=x$ גם עבור מספרים שליליים.

לפתרון משוואות יש תפקיד חשוב באלגברה. משתי הדוגמאות של פתרון המשוואות ראינו כי כדי שנוכל לפתור משוואות בדרך המקובלת, גם אם הפתרון, הוא מספר שלילי, נרצה להמשיך להשתמש בכלל האומר שחיבור וחיסור הן פעולות הפוכות.

<u>חיסור מספר שלילי ממספר מכוון</u>

הסכם: חיבור וחיסור הן פעולות הפוכות גם בתחום המספרים המכוונים.

נראה מה נובע מההסכם, ביחס לחיסור מספר שלילי.

דוגמאות:

1. $10+(-3)-(-3)=10$ כי הוספנו וחיסרנו את המספר (-3) למספר 10. $10+(-3)=7$ ולכן נוכל לכתוב כי $7-(-3)=10$. מצד שני $7+3=10$ מכאן נרצה להסיק כי פעולה של חיסור (-3) ופעולה של חיבור 3 מביאות לתוצאה זהה.
2. $(-5)+(-2)-(-2)=-5$ ולכן $(-7)-(-2)=-5$ ושוב אם במקום לחסר (-2) מ-(-7), נחבר 2 ל-(-7) נקבל אותה תוצאה.

נוכל לסכם ולומר, כי חיסור מספר שלילי הוא פעולה זהה לחיבור המספר הנגדי לו. הגענו למסקנה זו תוך שימוש בנימוק פנים-מתמטי, שכן החלטנו להפעיל את הכלל הפורמאלי: $a+b-b=a$ המוכר עבור המספרים החיוביים גם עבור מספרים מכוונים.

כדי לנסח את הכלל באותיות, נצטרך לתת משמעות שלישית לסימן "$-$" משמעות לה נזדקק גם בהמשך.

<u>משמעות שלישית לסימן החיסור</u>

הגדרה: המספר המתאים למספר מכוון המופיע עם סימן "$-$" משמאלו הוא המספר הנגדי למספר המכוון. לדוגמא, $-(-11)$ הוא המספר הנגדי ל-(-11) ולכן $-(-11)=11$.

שימו לב שאת (-4) אפשר לפרש כשם של המספר הנמצא על הקרן השלילית, במרחק 4 מהאפס (ואז סימן המינוס הוא חלק משם המספר), או כנגדי של 4 (סימן המינוס כמתאר נגדי של מספר). שני הפירושים מתאימים זה לזה, ולכן ההוספה של משמעות שלישית לסימן המינוס לא מפריעה לידע שרכשנו עד כה.

תרגיל: הביטוי $-a$ יכול לתת ערך שלילי או חיובי (או אפס). תנו דוגמא לערך של a עבורו הביטוי $-a$ הוא חיובי.

כעת נוכל לכתוב בעזרת משתנים את הכלל לחיסור במספרים מכוונים:

לכל מספר מכוון a ולכל מספר מכוון b קיים
$$a-b=a+(-b)$$

הערה: ניעזר בכלל זה רק כשהוא עוזר לפתרון. נכון כי $20-7=20+(-7)$ אך יש להניח שקל לנו יותר לחשב $20-7$.

שימו לב לאנלוגיה הבאה: בכפל וחילוק, המעבר ממספרים טבעיים לשברים הביא למצב של שתי דרכי חישוב של כפל או חילוק: כדי להקטין פי 2 אפשר לחלק ב-2 או לכפול בחצי כדי להגדיל פי 2 אפשר לכפול ב-2 או לחלק בחצי.

באופן דומה, במעבר מהמספרים החיוביים אל המספרים המכוונים קיבלנו שתי דרכים לחיבור ולחיסור: כדי להקטין ב-2 אפשר לחסר 2 או להוסיף (-2) וכדי להגדיל ב-2 אפשר להוסיף 2 או לחסר (-2).

תרגיל: על ציר המספרים, אורך הקטע $[2;11]$ הוא $11-2$, או 9. בידקו שבדרך בה הגדרנו חיסור, האורך של כל אחד מהקטעים הבאים על ציר המספרים שווה להפרש בין המספר המתאים לקצה הימני שלו

למספר המתאים לקצה השמאלי שלו: $[-11;-5]$, $[-3\,;7]$; מה קורה בחישוב האורך של קטע, אם מחשבים: מספר המתאים לקצה שמאלי פחות מספר המתאים לקצה ימני?

מבחינה מתמטית טהורה, כדי לשמור על דיוק, פיתוח החיסור צריך להיות מעט שונה מהמודגם לעיל. אינני חושב שהפיתוח הזה מתאים לכל התלמידים בחטיבת הביניים. אביא את הפיתוח המדויק, באותיות בלבד: כאשר a מייצג מספר מכוון ו-b – מספר חיובי נוכל לרשום:

$$a-(-b)=a+[b+(-b)]-(-b)=$$
$$=a+b+[(-b)-(-b)]=a+b$$

<u>כפל מספרים מכוונים</u>

ראינו במודל הרווח וההפסד כיצד ניתן להבין כפל של מספר חיובי במספר שלילי. כעת נעבור לכפל מספרים מכוונים ללא הגבלה.

את הכפל של המספרים המכוונים נפתח רק בדרך פנים מתמטית. הכללים שנרצה לשמור הם:

1. פילוג של כפל מעל לחיבור.
2. מכפלה של כל מספר ב-0 היא 0 (יכולנו לוותר על כלל זה כי הוא נובע מכלל 1).
3. חילוף בכפל.

נשתמש בחוק החילוף ובידע שכבר נרכש עבור מספרים מכוונים. נקבל כי לכל שני מספרים חיוביים a ו-b מתקיים: $a\cdot(-b)=(-b)\cdot a=-(a\cdot b)$

מכאן, כיון שמכפלת שני מספרים חיוביים היא חיובית, נקבל שהמכפלה של מספר חיובי ומספר שלילי היא שלילית.

כדי לקבל את הכלל למכפלת שני מספרים שליליים, נניח שאנחנו רוצים לקבוע את ערך הביטוי: $(-3)\cdot(-4)$

נסתכל לשם כך בתרגיל: $(-3)\cdot[4+(-4)]$

בחישוב לפי סדר הפעולות שמכתיבים הסוגריים, נקבל כי: $(-3)\cdot[4+(-4)]=(-3)\cdot 0=0$

אך אם נשתמש בחוק הפילוג נקבל:

$$(-3)\cdot[4+(-4)]=(-3)\cdot 4+(-3)\cdot(-4)=$$
$$=(-12)+(-3)\cdot(-4)=0$$

ולכן ערך המכפלה $(-3)\cdot(-4)$ חייב להיות חיובי ושווה ל- 12, שכן 12 הוא המספר הנגדי ל-(12-).

<u>ערך מוחלט של מספר מכוון</u>

לצורך ניסוח מדויק של כללי החישוב במספרים מכוונים נצטרך להוסיף מושג חדש.

הגדרה: הערך המוחלט של מספר מכוון הוא מרחקו מהאפס על ציר המספרים.

מההגדרה רואים, כי הערך המוחלט של מספר חיובי שווה למספר עצמו, והערך המוחלט של מספר שלילי הוא המספר הנגדי למספר עצמו.

מסמנים ערך מוחלט על ידי שני קווים אנכיים משני צידי המספר: הערך המוחלט של (5-) מסומן $|-5|$ ולכן $|-5|=5$. באותו אופן $|5|=5$.

תרגיל: מהו הערך המוחלט של "0"? האם יש מספר שהערך המוחלט שלו הוא (5-)? סמנו על הציר את כל המספרים השלמים שערכם המוחלט קטן מ-3.5 .

כעת ננסח את חוקי הכפל בעזרת הערך המוחלט:

1. מכפלה של שני מספרים שליליים שווה למכפלת הערכים המוחלטים שלהם.
2. מכפלה של מספר חיובי ומספר שלילי שווה למספר הנגדי למכפלת הערכים המוחלטים שלהם.

<u>חילוק של מספרים מכוונים</u>

החילוק והכפל קשורים זה בזה כפעולות הפוכות. כל תרגיל חילוק אפשר לכתוב כתרגיל כפל, כך למשל:

$$10:2=10\cdot\frac{1}{2}$$

נרצה לשמֵר אפשרות רישום זו, כלומר נרצה שיתקיים השוויון:

$$10:(-2)=10\cdot\frac{1}{-2}$$

נסכים לכן כי בחילוק, כמו בכפל, המנה של שני מספרים שווי סימן היא חיובית והמנה של שני מספרים שוני סימן היא שלילית (והערך המוחלט של המנה הוא מנת הערכים המוחלטים של שני המספרים).

בפרט חשוב לשים לב לכך ששבר שלילי אפשר לכתוב בכל אחת משלוש הדרכים הבאות: $-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}$

נסיים את מהלך ההוראה בדוגמא אחת, שתראה כיצד המספרים המכוונים מאפשרים לנסח דרכי פתרון של מקרים רבים בנוסחה יחידה.

<u>פתרון המשוואה הריבועית</u>

נסתכל בארבע המשוואות הריבועיות הבאות:

$5x^2+2x+7=0$

$5x^2-2x+7=0$

$5x^2+2x-7=0$

$-5x^2+2x+7=0$

בעזרת המספרים המכוונים, ניתן להציג כל אחת מהן ומשוואות נוספות הדומות להן, בעזרת התבנית האחידה המוכרת: $ax^2+bx+c=0$.

כיצד?

$5x^2+2x+7=0$ הרישום מתאים, כאן:

$a=5,\ b=2,\ c=7$

$5x^2-2x+7=0$ תרשם כ- $5x^2+(-2x)+7=0$

וכאן: $a=5,\ b=-2,\ c=7$

$5x^2+2x-7=0$ תרשם כ- $5x^2+2x+(-7)=0$

וכאן: $a=5,\ b=2,\ c=-7$

$-5x^2+2x+7=0$ תרשם כ- $(-5)x^2+2x+7=0$

וכאן $a=-5,\ b=2,\ c=7$

צורת כתיבה זו מאפשרת לפתח נוסחה אחת לפתרון כל המשוואות האלו, והיא הנוסחה הידועה:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

לולא האפשרות להשתמש במספרים מכוונים, היה צורך לטפל בנפרד בסוגים השונים של המשוואות הריבועיות. זאת כמובן בנוסף לכך שאם לא נרשה פתרונות שליליים לא נוכל לטפל במצבים רבים בהם המשוואה הריבועית, אשר לה גם פתרונות כאלה מתארת מצב ממשי (כמו בבעיות מילוליות) בו ניתן אף לתת משמעות לפתרון שלילי.

סיכום

ראינו כיצד מרחיבים את הגדרת פעולות החשבון לתחום המספרים המכוונים. בחלק מהמקרים השתמשנו במודלים, דהיינו בנימוקים חוץ-מתמטיים ובמקרים אחרים בהגדרות פורמאליות, דהיינו בנימוקים פנים-מתמטיים. השימוש בהגדרות פורמאליות נבע מתוך הרצון לשמור על עקביות של חוקים שמתקיימים בתחום המספרים האי-שליליים. מדוע בחרנו לפתח חלק מהפעולות בעזרת מודל, למרות שבהמשך עברנו לפיתוח פנים-מתמטי? לשימוש במודל יש יתרון – הוא מספק ללומד 'נקודת התייחסות', בעזרתה קל יותר לקשר את הידע החדש לידע הקיים (בלשונו של פיאז'ה, אסימילציה). ואולם אם השימוש במודל אינו טבעי, המטרה אינה מושגת ואולי אף נגרם נזק: הלומד מתרשם שהמורה חושב שהשימוש במודל פשוט, ומאחר שהלומד לא רואה את הפשטות (שכלל אינה קיימת) הוא מאשים את עצמו וחושב שהנושא קשה מדי לכוחותיו. יש להסביר בצורה ברורה מדוע הורחבו הפעולות כפי שהורחבו, ולהביא נימוקים הקשורים בראיית העולם של מתמטיקאים, ולאו דווקא בהתאמה לחיי יומיום, ולא ליצור מיסטיפיקציה של המתמטיקה. לכן עדיף בעיני להגיד בלשון ברורה ללומד, שהפיתוח של המספרים המכוונים אינו טבעי, אלא נבע מרצון של מתמטיקאים לאחד, להרחיב, לעבוד במערכת צירים שמבטאת את כל המישור, וכו' ולהבהיר לתלמיד בפיתוח של כל פעולה מהו סוג הנימוק שבו השתמשנו להרחבת הפעולה.