הנושא: **תורת המשחקים ושדכנות – האם כדאי ״לשחק אותה אדישה״?**

הוכן ע״י: אלברט ישראל.

תקציר: המחבר לוקח את הקוראים למסע אל האי המבודד מולדן, בו יש לשדך קבוצת רווקים לקבוצת רווקות. השידוכים נעשים על פי דרישות קבועות מראש ועל פי מפת העדפות של הרווקים ושל הרווקות. המאמר מכיל הוכחה באינדוקציה מתמטית לטענה שאינה לקוחה מתורת המספרים.

מילות מפתח: תורת המשחקים, קומבינטוריקה, מספר אפשרויות, תמורות, עצרת, אינדוקציה, הוכחה בדרך השלילה.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 32, סיוון תשס״ד - יוני 2004, עמודים 39-46.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

ale32-8

תורת המשחקים ושדכנות – האם כדאי "לשחק אותה אדישה"?

אלברט ישראל
ירושלים
asihad@netvision.net.il

פתח דבר

את רובה של ההרצאה הבאה שמעתי לפני מספר רב של שנים מפי פרופ' מיכאל משלר, באוניברסיטה העברית בירושלים. מאז, בכל פעם שאני נתקל בה, אני מוקסם ממנה מחדש. פרופ' משלר יצא בינתיים לגמלאות והוא זכור לאלפי סטודנטים כאחד המרצים המעולים של החוג למתמטיקה בירושלים. בהזדמנות זו ברצוני לאחל לו בריאות ואריכות ימים.

ההרצאה של פרופסור משלר התבססה על המאמר:
Lloyd Shapley and David Gale, (1962), College Admissions and the Stability of Marriage, *American Mathematical Monthly*.

המאמר של שפלי וגייל נכתב בעקבות כתבה שפורסמה במגזין New Yorker ביום 10.9.1960 בה סופר על תהליך קבלת סטודנטים לאוניברסיטת ייל. המאמר עורר בזמנו הדים רבים בזכות התוצאות המתמטיות המפתיעות שהתקבלו בו ללא שימוש ב'תותחים כבדים' של המתמטיקה והפך פופולארי גם מחוץ לקהילייה המתמטית. מאז פרסומו הוא נחשב על-ידי מתמטיקאים לאחת הפנינים של המתמטיקה. בזכות פשטותו ניתן, כמובן, ללמדו במסגרת בית-הספר התיכון.

השתדלתי לתת למאמר נופך של סיפור משעשע בסגנון של שאלות ותשובות, ולא של מאמר מתמטי מדעי המנוסח בלשון של אקסיומות, הגדרות, טענות והוכחות. אם כי 'הכל כלול', כפי שנוהגים לומר. יחד עם זאת, אני ממליץ לחברי להגדיר את ה'דרישות' אשר בהמשך המאמר כ'אקסיומות' של המודל. על-ידי כך לעזור לתלמידים להבין שאקסיומה איננה מושג אשר ירד לאנושות ב'מעמד הר סיני'.

המאמר מכיל הוכחה יפיפייה באינדוקציה מתמטית לטענה שאיננה לקוחה מתורת המספרים – מצרך נדיר בספרי לימוד – ולה יכולה להיות תרומה נכבדה בהבנת תהליך ההוכחה באינדוקציה מתמטית. כפי שנראה, לאותה טענה מובאת הוכחה נוספת, פשוטה יותר. בעיני עדיפה ההוכחה הראשונה בשל תרומתה הייחודית. בנוסף, המאמר מהווה תרגול פורה להוכחות בדרך השלילה, דבר שתלמידים רבים מתקשים בו.

לבסוף, אני סבור שהמאמר תורם תרומה משמעותית לטיפוח החשיבה המופשטת, לא פחות מהפרק 'מערכות E ו- L' באנליזה למשל, ואף שימושי יותר ממנו בפרקטיקה היום-יומית. על כן מומלץ לשקול את אפשרות שילובו בתכנית הלימודים.

אני מזמין אתכם, קוראי על"ה, לשעה של הנאה ונחת.

הרווקים של מולדן

מולדן, הוא אי מבודד באמצע האוקיינוס השקט, שמצאתי באטלס.

הסוגיה בה נרצה לטפל בסיפורנו היא כיצד ניתן לשדך את הרווקים והרווקות של מולדן על-פי הנתונים ו*הדרישות* שלהלן:

א. באי עשרה רווקים ועשר רווקות;
ב. יש לשדך את כולם, שידוך שיחזיק מעמד (כלומר שידוך שלא יתפרק מידית);
ג. לא ניתן ליצור קשר עם רווקים או רווקות מחוץ למולדן;
ד. שידוך בין בני אותו מין נפסל על-ידי רווקי מולדן.

מולדן, כמובן, נבחר באקראי והשאלה יכולה להיות רלוונטית בכל קהילה, אשר מעוניינת לשמור על ייחודה או שאפשרויותיה ליצירת קשר עם אנשים מחוצה לה מצומצמות.

אנו מכירים את המצב שבו שולה רוצה את גדעון, גדעון לא רוצה את שולה אלא את רינה, רינה מצידה רוצה את יוחנן וכו'... ללמדנו שהמלאכה איננה פשוטה כלל. תחילה נשאל את עצמנו, כמובן, מהו מאגר האפשרויות של מערכות השידוכין העומד לרשותנו ועד כמה הוא עשיר. שנית נתהה, האם יתכן שלא תימצא במאגר האפשרויות מערכת שידוכין שתקיים את הדרישות שלנו. במלים אחרות, האם מלאכת הבריאה אינה מושלמת?

עבור שני רווקים ושתי רווקות קיימות, כמובן, שתי מערכות שידוכין. עבור שלושה רווקים ושלוש רווקות קיימות שש מערכות שידוכין. כמה מערכות שידוכין קיימות עבור עשרת הרווקים ועשר הרווקות של מולדן? כמה מערכות שידוכין קיימות באופן כללי עבור n רווקים ו-n רווקות?

אילו שכרנו את שירותיו של השדכן המוכשר ביותר בתבל לבחירת מערכת שידוכין המקיימת את ארבע הדרישות שלעיל, מאיזו נקודה היה מתחיל בעבודתו?

בשאלות אלו ואחרות נתלבט בהמשך.

ובכן, כידוע, מספר מערכות שידוכין במאגר עבור n רווקים ו-n רווקות הוא כמספר התמורות על n עצמים, דהיינו $n!$. כלומר עבור עשרת הרווקים ועשר הרווקות של מולדן קיימות:

$$10!=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=3,628,800$$

מערכות שידוכין. במילים אחרות מדובר במאגר גדול מאד. יחד עם זאת אין לנו עדיין כל וודאות שבתוך המאגר נוכל למצוא מערכת, אשר תקיים את הדרישות שהצבנו לעצמנו.

כפי שהזכרנו אנו עוסקים במצבים כגון: גדעון רוצה את רינה, רינה לא כל כך רוצה את גדעון והיא מעדיפה את יוחנן. יוחנן מצידו מעדיף את שולה, וכן הלאה... אשר על כן, ההיגיון מנחה אותנו להתחיל את המלאכה במיפוי ההעדפות של כל אחד מהרווקים. נגדיר יחס סדר על הרווקים והרווקות של מולדן אשר נסמנו ב-*'>'*. כך שמשמעות הפסוק: *'ראובן > אריה'* תהיה: *'ראובן עדיף על אריה'*. נניח שזהו יחס סדר שלם וטרנזיטיבי.

נתבונן בדוגמה הבאה של *מפת ההעדפות* עבור שלוש הרווקות: שולה, רינה ואסתר ועבור שלושת הרווקים: יוחנן, גדעון וחיים:

שולה: גדעון>יוחנן>חיים
אסתר: גדעון>יוחנן>חיים
רינה: חיים>יוחנן>גדעון

יוחנן: רינה>אסתר>שולה
גדעון: רינה>אסתר>שולה
חיים: אסתר>רינה>שולה

כאמור, עבור שלושה רווקים ושלוש רווקות, קיימות במאגר שש $(3!=6)$ מערכות שידוכין. האם ישנה ביניהן כזו שתחזיק מעמד?

נתבונן ב**מערכת השידוכין** הבאה תוך התייחסות למפת העדפות הנ"ל:

אסתר	רינה	שולה
יוחנן	גדעון	חיים

כפי שניתן לראות, מערכת שידוכין זו לא תחזיק מעמד. רינה מעדיפה את יוחנן על פני גדעון, ואילו יוחנן, מצידו, מעדיף את רינה על פני אסתר. משמע, רינה ויוחנן יעזבו את בני זוגם, יברחו יחדיו ומערכת השידוכין תתפרק מיידית. למערכת כזו, שבה לפחות זוג אחד של רווק ורווקה, שלא שודכו זה לזו, 'בורחים יחד', נקרא בהמשך *'מערכת בלתי יציבה'*. מערכת שאין בה זוג כזה תקרא *'מערכת יציבה'*.

נתבונן במערכת אחרת מתוך המאגר:

אסתר	רינה	שולה
גדעון	חיים	יוחנן

רינה ואסתר קיבלו את העדיפות הראשונה שלהן. הן מרוצות ולא תברחנה עם אף אחד. שולה קיבלה את יוחנן שנמצא אצלה בעדיפות שנייה. היא, כמובן, מעדיפה את גדעון. אך גדעון קיבל את אסתר שעדיפה בעיניו על שולה. לכן, גדעון לא ייענה לבקשתה של שולה לברוח עמה. יוצא, אפוא ,שמערכת שידוכין זו יציבה.

מיותר לציין שמאגר ובו רק שש מערכות שידוכין הינו קל לבדיקה פרטנית.

מה לדעתכם נעשה כשנטפל בעשרת הרווקים ועשר הרווקות של מולדן – עם מאגר של 3,628,800 מערכות שידוכין ?

כיצד מטפלים בבעיה הכללית עם n רווקים ו-n רווקות?

נדגים, כעת, תהליך המכונה בהמשך *'תהליך החדרים'*. תהליך זה נמצא בשימוש ב- NRPM (National Residents Matching Program) בארה"ב מאז 1952

ובמסגרתו בוחרים בתי ספר לרפואה של בתי החולים את הסטודנטים מבין אלה שהגישו מועמדות ללימודי רפואה.

נסדר את הבנות בשלושה חדרים נפרדים:
אסתר בחדר הראשון; רינה בחדר השני; שולה בחדר השלישי.

שלב ראשון:
נבקש מכל אחד מהבנים לגשת לחדר בו נמצאת הבת אותה הוא מעדיף בעדיפות ראשונה. נקבל את המצב הבא:
חדר I: אסתר + חיים
חדר II: רינה + יוחנן , גדעון
חדר III: שולה
נבקש מכל בת שתשמור אצלה, בהמתנה, את הבן העדיף ביותר בעיניה מבין הבנים שהתדפקו על דלתה ותשחרר את שאר הבנים. במקרה שלנו רינה תשמור בהמתנה את יוחנן ותשחרר את גדעון.

שלב שני:
נבקש מכל הבנים הנדחים לגשת לעדיפות השניה שלהם. נקבל:
חדר I: אסתר + גדעון, חיים
חדר II: רינה + יוחנן
חדר III: שולה
בשלב זה אסתר תשמור אצלה את גדעון בהמתנה ותשחרר את חיים.

שלב שלישי:
שוב כל הנדחים ניגשים לעדיפות הבאה שלהם. נקבל את המצב הבא:
חדר I: אסתר + גדעון
חדר II: רינה + חיים, יוחנן
חדר III: שולה
הפעם יוחנן נדחה.

שלב רביעי:
הנדחים נגשים לעדיפות הבאה שלהם ומתקבל:
חדר I: אסתר + גדעון, יוחנן
חדר II: רינה + חיים
חדר III: שולה
שוב יוחנן נדחה.

שלב חמישי:
הנדחים ניגשים לעדיפות הבאה, ומתקבל:
חדר I: אסתר + גדעון
חדר II: רינה + חיים
חדר III: שולה + יוחנן
כעת, לכל בת יש בן זוג אחד בלבד (מספר הבנים שווה למספר הבנות) ואף בן לא נדחה. בכך נוצרה מערכת שידוכין. כפי שראינו קודם זוהי מערכת שידוכים יציבה.

נציין לעצמנו שתהליך החדרים הינו אחד מני רבים ויתכנו תהליכים רבים אחרים לקבלת מערכת שידוכין (יציבה או לא יציבה). כמו-כן נציין לעצמנו שמפת ההעדפות היא קבועה ובלתי תלויה בתהליך שידוך זה או אחר.

<u>שאלה</u>: האם לכל n ולכל מפת העדפות התהליך שתואר לעיל הוא תהליך סופי המסתיים במערכת שידוכין או שיתיכן לולאה (loop) אינסופית?

<u>תשובה</u>: לכל n ולכל מפת העדפות תהליך החדרים הוא סופי ומסתיים במערכת שידוכין.
בכל שלב שאיננו שלב סיום ישנו בן אשר נדחה על ידי אחת הבנות. לכן, בכל שלב שאיננו שלב סיום ישנו בן שיורד בסולם ההעדפות שלו. מספר הבנים והבנות סופי והיחס הוא שלם. לכן לאחר מספר סופי של שלבים יימצא בן אשר היה אצל כל אחת מהבנות. בת אשר מקבלת הצעה לא נשארת לבד בשלבים הבאים של התהליך. לכן, לאחר מספר סופי של שלבים אף בת לא תהיה לבד. מספר הבנים שווה למספר הבנות ולכן לאחר מספר סופי של שלבים אף בן לא יידחה. כך שקיבלנו מערכת שידוכין לאחר מספר סופי של שלבים.

<u>שאלה</u>: מהו מספר השלבים המקסימאלי ב׳תהליך החדרים׳ עבור n רווקים ו-n רווקות של מולדן?

<u>תשובה</u>: מספר השלבים המקסימאלי ב׳תהליך החדרים׳ עבור n רווקים ו-n רווקות של מולדן הוא:
$$(n-1)\cdot(n-1)+1$$
(במקרה בו $n=10$ מספר השלבים המקסימאלי הוא 82).

הנוסחה הנובעת מתהליך החדרים היא:

שלב אחרון + מספר מקסימאלי של שלבי דחייה נוספים + שלב ראשון = **מספר מקסימאלי של שלבים**

כל אחד מהבנים יכול להידחות $n-2$ פעמים בנוסף לפעם הראשונה, לכן אנו מקבלים:

$$1+n\cdot(n-2)+1=(n-1)\cdot(n-1)+1 \quad = \quad \textbf{מספר מקסימאלי של שלבים}$$

שלב ראשון · מספר הבנים · מספר אפשרויות דחייה · שלב אחרון

<u>שאלה</u>: עד כמה ניתן 'לשפר' את התוצאה המתקבלת בתהליך החדרים מבחינת הבנים?

<u>תשובה</u>: נראה שלא ניתן לשפר את התוצאה המתקבלת מתהליך החדרים שיפור כולל מבחינת הבנים, במובן זה שלא קיימת במאגר מערכות השידוכין מערכת (יציבה או בלתי יציבה) שבה כל אחד מהבנים, בלא יוצא מהכלל, מקבל בת עדיפה יותר ממה שקיבל בתהליך החדרים.

כפי שראינו תהליך החדרים מסתיים כאשר הבת האחרונה מקבלת הצעה. מכאן שחייבת להיות לפחות בת אחת שנותרת ללא הצעה עד לשלב האחרון ובשלב זה היא מקבלת הצעה. לכן קיימת לפחות בת אחת שלא דוחה אף בן. מצד שני בכדי שבן ישפר עמדה, עליו לחזור לאחת הבנות, אשר דחתה אותו באחד השלבים. בכדי שכל הבנים ישפרו עמדה, צריכות להיות n בנות אשר דחו בנים. ראינו שמספר הבנות אשר דחו בנים קטן מ- n. מכאן ששיפור כללי כאמור לעיל עבור הבנים אינו אפשרי.

נתבונן מפת ההעדפות הבאה:

רינה: גדעון>חיים>יוחנן **חיים**: רינה>אסתר>שולה
אסתר: חיים>יוחנן>גדעון **יוחנן**: רינה>אסתר>שולה
שולה: יוחנן>גדעון>חיים **גדעון**: אסתר>רינה>שולה

תהליך החדרים בדוגמה זו מביא אותנו למערכת השידוכין הבאה:

שולה	אסתר	רינה
יוחנן	חיים	גדעון

מאידך ניתן להתבונן במערכת השידוכין:

שולה	אסתר	רינה
יוחנן	גדעון	חיים

במערכת השנייה גדעון וחיים שיפרו עמדה ואילו יוחנן נשאר במקומו. דהיינו, המערכת השנייה הצליחה לשפר את העמדה של שניים מתוך שלושה בנים. כפי שהראנו לא קיימת מערכת אשר משפרת את העמדות של כל הבנים. יתר על כן, במערכת השנייה, אסתר ויוחנן יברחו יחדיו הואיל והם מעדיפים זה את זו יותר מאשר את בני זוגם. משמע שהמערכת השנייה איננה יציבה.

<u>שאלה</u>: האם לכל n ולכל מפת העדפות קיימת בכלל מערכת שידוכין יציבה במאגר? האם לכל n ולכל מפת העדפות תהליך החדרים מביא אותנו למערכת שידוכין יציבה? האם התהליך הזה כל-כך ייחודי?

<u>תשובה</u>: אכן, כן. לכל n ולכל מפת העדפות, תהליך החדרים מביא למערכת שידוכין יציבה ולכן קיימת כזו. נראה זאת.

נניח שבתהליך החדרים שולה שודכה ליוחנן ואסתר לגדעון. כמו כן, נניח בשלילה, שמערכת זו לא יציבה, כתוצאה מכך ששולה מעדיפה את גדעון על פני יוחנן וגדעון מעדיף את שולה על פני אסתר. משמע ,ששולה וגדעון יברחו יחדיו והמערכת תתפרק. מהאמור לעיל עולה:

שולה: .....>גדעון>.....>יוחנן>.....
גדעון: .....>שולה>.....>אסתר>.....

על-פי מפת העדפות זו גדעון היה אצל שולה לפני שהגיע לאסתר (נזכור שיחס הסדר הוא שלם וטרנזיטיבי). על-פי תוצאת התהליך הוא לא נשאר אצל שולה, משמע שולה דחתה אותו כדי לקבל את יוחנן או כדי לקבל מישהו אחר שיוחנן עדיף עליו בעיניה (ושיוחנן החליף אותו בשלב מאוחר יותר). זה סותר את ההנחה שגדעון עדיף על יוחנן בעיני שולה. מכאן, שהנחת אי-היציבות סותרת את התוצאה שקיבלנו. לכן, המסקנה היא שתהליך החדרים מביא אותנו, בהכרח, למערכת יציבה. עד כמה פשוט ועד כמה מפתיע, הלא כן?

<u>שאלה</u>: האם מערכת יציבה היא בודדה במאגר, או שמא קיימות מספר מערכות יציבות בו? אם קיימות מספר מערכות יציבות במאגר איזו מהן עדיפה יותר?

תשובה: מערכת יציבה אינה בהכרח יחידה. נתבונן במפת ההעדפות הבאה עבור שלושה רווקים ושלוש רווקות:

יוחנן: רינה>אסתר>שולה **שולה**: יוחנן>גדעון>חיים
גדעון: אסתר>שולה>רינה **רינה**: גדעון>חיים>יוחנן
חיים: שולה>רינה>אסתר **אסתר**: חיים>יוחנן>גדעון

ובשתי המערכות הבאות מתוך המאגר:

A:

שולה	רינה	אסתר
חיים	יוחנן	גדעון

B:

שולה	רינה	אסתר
יוחנן	גדעון	חיים

במערכת A כל בן קיבל את העדיפות הראשונה שלו. במערכת B כל בת קיבלה את העדיפות הראשונה שלה. לכן שתיהן מערכות יציבות. מכאן, מערכת יציבה אינה בהכרח יחידה במאגר.

שאלה: אם ברשותנו שתי מערכות יציבות, האם ניתן ליצור בעזרתן מערכת יציבה שלישית?

תשובה: בחלק מהמקרים התשובה חיובית. אם נרשה לבנים (או לבנות) לקבל את העדיפה (העדיף) מבין שתי הבנות (הבנים) שהוא (שהיא) קיבל (קיבלה) בכל אחת משתי המערכות היציבות הקודמות, נקבל שוב מערכת יציבה. בחלק מהמקרים תהיה המערכת שתתקבל שונה מכל אחת משתי המערכות הקודמות. הכיצד?

תכונה זו נקראת 'תכונת השריג' של מערכות יציבות. תהיינה A ו-B שתי מערכות יציבות ותהי C המערכת השלישית שנוצרה בשיטה שצוינה. תחילה עלינו להראות ששיטת ההרכבה של המערכת השלישית הוגדרה היטב. כלומר שאנחנו לא מייעדים לשני בנים שונים אותה בת במערכת C (באופן דומה לגבי הבנות).

נניח כי יוחנן משודך לרינה במערכת A וגדעון משודך לרינה במערכת B. כעת נניח בשלילה שתהליך הבנייה של C אינו מוגדרת היטב. כלומר, ששניהם, הן גדעון והן יוחנן, רוצים את רינה למערכת C. במערכת היציבה A רינה לא ברחה עם גדעון (למרות תחנוניו של גדעון, אשר רוצה אותה למערכת C ולכן מעדיף אותה על פני בת זוגו) כי היא מעדיפה את יוחנן על פניו. מכאן שבמערכת B היא כן תברח עם יוחנן (יוחנן רוצה אותה למערכת C לכן מעדיף אותה על פני בת זוגו). לכן קיבלנו סתירה ליציבותה של מערכת B . המסקנה היא שתהליך בנית מערכת C הוגדר היטב.

כעת נראה שהמערכת C יציבה:

נניח כי על-פי השיטה שתוארה אנו משדכים במערכת C את יוחנן לרינה ואת גדעון לשולה. כמו-כן נניח בשלילה שמערכת C לא יציבה, בכך שרינה וגדעון מעדיפים האחד את השני, יותר מאשר את בני זוגם.

נגדיר ארבעה מצבים אפשריים לכל אחת מהמערכות A ו-B.

מצב א: יוחנן משודך לרינה, גדעון משודך לשולה.

מצב ב: יוחנן משודך לרינה, גדעון משודך לאחרת.

מצב ג: יוחנן משודך לאחרת, גדעון משודך לשולה.

מצב ד: יוחנן משודך לאחרת, גדעון משודך לאחרת.

(אחרת=לא רינה ולא שולה)

מכאן שבסיכום שתי המערכות יש לנו 16 אפשרויות:

	מערכת A	מערכת B
1	א	א
2	א	ב
3	א	ג
4	א	ד
5	ב	א
6	ב	ב
7	ב	ג
8	ב	ד
9	ג	א
10	ג	ב
11	ג	ג
12	ג	ד
13	ד	א
14	ד	ב
15	ד	ג
16	ד	ד

הנחנו בשלילה כי מערכת C לא יציבה, בכך שרינה וגדעון מעדיפים האחד את השני, יותר מאשר את בני זוגם. אפשרויות 4,3,2,1 לא תיתכנה, כי בהן A לא יציבה. אפשרויות 13,9,5 לא תיתכנה כי בהן B לא יציבה. אפשרויות 16,15,14,12,11,8,6 לא תיתכנה כי הן לא מתיישבות עם השיטה של הרכבת C. נותרו לנו שתי אפשרויות לבדיקה: 7 ו- 10.

באפשרות 7: גדעון לא ברח עם רינה במערכת A, (למרות רצונה של רינה) כי העדיף את האחרת על פני רינה. במערכת B קיבל גדעון את שולה והעדיף אותה למערכת C על פני האחרת. מטרנזיטיביות יחס ההעדפה נובע, שגדעון מעדיף את שולה על פני רינה. קיבלנו סתירה.

באפשרות 10: גדעון לא ברח עם רינה במערכת B, (למרות רצונה של רינה) כי העדיף את האחרת על פני רינה. במערכת A קיבל גדעון את שולה והעדיף אותה למערכת C על פני האחרת. מטרנזיטיביות יחס ההעדפה נובע, שגדעון מעדיף את שולה על פני רינה. גם כאן קיבלנו סתירה. מכאן ש C מערכת יציבה.

למעשה מספר המערכות היציבות יכול להיות גדול מאוד. אצל גספילד ואירווינג (gusfield and Irving,

(1989) מופיעה דוגמה עם $n=32$ ובה 104,310,534,400 מערכות יציבות.

שאלה: כיצד לנהוג כשיש מספר מערכות יציבות? באיזו מהן כדאי לבחור?

תשובה: ידידי היקרים, הגענו **לטענה המרכזית** של סיפורנו, אשר בצידה מוסר השכל. על-פי טענה זו, כאשר הבנות מסודרות בחדרים והבנים ניגשים אליהן בתהליך החדרים, הבנים מקבלים את המערכת היציבה הטובה ביותר עבורם מתוך כל המערכות היציבות שבמאגר. זוהי למעשה *המערכת האופטימאלית* עבור הבנים. אם נסדר את הבנים בחדרים וניתן לבנות לגשת לבנים בתהליך החדרים אזי הבנות תקבלנה את המערכת היציבה הטובה ביותר עבורן מתוך כל המערכות היציבות שבמאגר. זוהי *המערכת האופטימאלית* עבור הבנות.

מכאן, רבותי, מוסר השכל:

> אם את פסיבית את מפסידה. אם את יוזמת את מקבלת עדיפות גבוהה יותר ואף את העדיפות הגבוהה ביותר האפשרית. אז, קדימה בנות, צאנה מבתיכן והתחלנה לרדוף אחרי הבנים, שירקו להם והזמינו אותם למסיבות. ואנחנו הבנים, לא יזיק לנו לנוח קמעה (לתקופת מעבר לפחות) ושהבנות תרדופנה אחרינו.

לצורך הצדקת הטענה עלינו להראות, שכאשר הבנים הולכים לבנות, בתהליך החדרים, כל אחד מהבנים מקבל את העדיפות הגבוהה ביותר האפשרית עבורו במסגרת המערכות היציבות שבמאגר (באופן דומה אפשר להוכיח את התהליך ההפוך).

נגדיר: בת a תיקרא, לצורך ההוכחה, *אפשרית* לבן b, אם קיימת מערכת יציבה במאגר, בה הם משודכים.

בהתאם להגדרה זו, אם נראה שבתהליך החדרים שתואר לעיל אף בן לא נדחה, באף שלב, על ידי בת אפשרית (ביודענו שהבנים מתקדמים לפי סדר עדיפות יורד) נוכל להסיק, שבתום התהליך קיבל כל בן את העדיפות הגבוהה ביותר האפשרית עבורו במסגרת המערכות היציבות שבמאגר, ובזאת הטענה מוכחת.

ההוכחה היא באינדוקציה על מספר השלבים.

שלב ראשון:

נראה שבשלב זה אף בן לא נדחה על ידי בת אפשרית.
נניח בשלילה, שכבר בשלב זה של תהליך החדרים יוחנן נדחה על ידי שולה, שהיא בת אפשרית עבורו, תמורת גדעון, אותו היא שומרת בהמתנה.
שולה אפשרית ליוחנן לכן קיימת במאגר מערכת יציבה שבה:

שולה משודכת ליוחנן
גדעון משודך לאסתר (*)

מצד שני, כיוון שבתהליך הנוכחי שולה דוחה את יוחנן תמורת גדעון, אנו מקבלים מפת ההעדפות עם המצב הבא:

שולה: .....>גדעון>.....>יוחנן>.....
גדעון: שולה>.....

נזכור שמפת ההעדפות הינה קבועה ובלתי תלויה בתהליך שידוכין זה או אחר.

יוצא אפוא, שמערכת השידוכין (*) אינה יציבה (שולה מעדיפה את גדעון על פני יוחנן וגדעון מעדיף את שולה על פני אסתר, על כן שולה וגדעון יברחו יחד). כלומר, ההנחה בדבר דחיית יוחנן על ידי שולה כבר בשלב הראשון של תהליך החדרים מביאה אותנו לסתירה עם היותה של שולה אפשרית ליוחנן. לכן אף בן לא נדחה בשלב ראשון על ידי בת אפשרית.

שלב האינדוקציה:

נניח שבכל אחד מ- $k-1$ השלבים הקודמים אף בן לא נדחה על ידי בת אפשרית ונראה שגם בשלב k אף בן לא נדחה על ידי בת אפשרית.
נניח בשלילה שבשלב k יוחנן נדחה על ידי בת אפשרית עבורו – שולה – תמורת גדעון, אותו היא שומרת בהמתנה.
שולה אפשרית ליוחנן לכן קיימת במאגר מערכת יציבה (**) שבה שולה משודכת ליוחנן וגדעון משודך לאסתר.

כעת נבדוק את שני המקרים האפשריים לגבי מפת ההעדפות.

במקרה א מפת ההעדפות הנובעת מהדחייה היא:

שולה: .....>גדעון>.....>יוחנן>.....
גדעון: .....>אסתר>.....>שולה>.....

במקרה זה, בתהליך הנוכחי, גדעון נדחה על ידי בת אפשרית באחד השלבים הקודמים (על ידי אסתר), בסתירה להנחה שבשלבים קודמים אף בן לא נדחה על ידי בת אפשרית.

מקרה ב מפת ההעדפות הנובעת מהדחייה היא :

שולה : .....>גדעון>.....>יוחנן>.....

גדעון : .....>שולה>.....>אסתר>.....

במקרה זה המערכת (**) לא יציבה (שולה וגדעון יברחו יחדיו) בסתירה להנחה.

על כן הראנו שגם בשלב k אף בן לא נדחה על ידי בת אפשרית בתהליך החדרים.

במילים אחרות, בתהליך החדרים אף בן לא נידחה באף שלב על ידי בת אפשרית ובכך הטענה שלנו מוכחת, על-פי עקרון האינדוקציה המתמטית.

כפי שניתן לראות זו דוגמה להוכחה באינדוקציה שאין רבות כמותה בספרי הלימוד, אשר יכולה לתרום להבנה של תלמידים את העיקרון של הוכחה באינדוקציה.

ניתן להוכיח את הטענה גם בדרך אחרת :

נניח בשלילה שיוחנן קיבל את רינה במערכת יציבה A, אשר נתקבלה בתהליך החדרים. ונניח גם שקיימת מערכת יציבה אחרת B, בה יוחנן יכול לקבל את שולה העדיפה יותר בעיניו. במערכת A שולה קיבלה את גדעון העדיף בעיניה על יוחנן (אחרת A לא הייתה יציבה). מכאן שגדעון צריך עתה (במערכת B) ללכת לאחרת – אסתר – העדיפה יותר בעיניו על שולה (על פי הטענה) לצורך הרכבת המערכת B. אסתר קיבלה את חיים במערכת A, אשר עדיף בעיניה על גדעון (אחרת A לא הייתה יציבה). עכשיו חיים צריך ללכת לאחרת, העדיפה בעיניו על פני אסתר (על פי הטענה) לצורך הרכבת המערכת B; וכן הלאה... מדובר במספר סופי של בנים ולכן אנו מקבלים שלצורך הרכבת המערכת B כל הבנים צריכים לשפר עמדה. אך הוכחנו שמצב זה בלתי אפשרי אפילו במחיר ויתור על יציבות, לא כל שכן לצורך קבלת מערכת יציבה. לכן קיבלנו סתירה.

כפי שכבר ציינתי, אני מעדיף את ההוכחה באינדוקציה.

<u>שאלה</u>: באילו מקרים אוסף המערכות היציבות מצטמצם למערכת אחת ויחידה?

<u>תשובה</u>: אם המערכת היציבה, שמתקבלת כשהבנים הולכים לבנות בתהליך החדרים, זהה למערכת היציבה, שמתקבלת כשהבנות הולכות לבנים בתהליך החדרים, אזי מערכת יציבה זו היא יחידה ואין אחרת.

נניח כי שולה משודכת ליוחנן באותה מערכת יציבה שמתקבלת בשני האופנים הנ"ל.

כמו-כן, נניח בשלילה, שקיימת מערכת יציבה נוספת (***) שבה יוחנן משודך לאסתר ושולה משודכת לגדעון.

יוחנן קיבל את שולה כשהבנים הלכו לבנות, לכן לפי הטענה הקודמת :

יוחנן : .....>שולה>.....>אסתר>.....

שולה קיבלה את יוחנן בתהליך שבו הבנות הלכו לבנים. לכן לפי הטענה הקודמת :

שולה : .....>יוחנן>.....>גדעון>.....

מצב זה מהווה, כמובן, סתירה ליציבותה של המערכת הנוספת (***). (שולה תברח עם יוחנן).

הראנו, שאם בשני האופנים של תהליך החדרים אנו מקבלים מערכות זהות (שהן יציבות), אזי לא קיימת מערכת יציבה נוספת.

ה<u>שאלה</u> האחרונה שנותרה לנו לבדיקה היא, האם ניתן למצוא מערכת יציבה עבור $2n$ בנים, אשר רוצים לחיות בזוגות? התשובה, באופן מפתיע, היא : לא בהכרח.

נתבונן בדוגמה הבאה :

אברהם :יצחק>יעקב>יוסף

יצחק :יעקב>אברהם>יוסף

יעקב :אברהם>יצחק>יוסף

יוסף :אברהם>יצחק>יעקב

עבור הבנים האלה קיימות שלוש מערכות במאגר. תוכלו למצוא אותן ולבדוק שכולן אינן יציבות!

האם זה מכוון מלמעלה?

בזה תם סיפורנו שלנו. אני מקווה שנהניתם.

סוף דבר

המאמר של שפלי וגייל מציג, בין היתר, את הבעיה של האוניברסיטאות, אשר מבקשות לקבל למוסדותיהן את המועמדים הטובים ביותר מחד גיסא, מול הבעיה של הסטודנטים אשר רוצים להתקבל למוסד, אשר נמצא אצלם בעדיפות ראשונה מאידך גיסא. מטבע הדברים אין שוויון בין מספר האוניברסיטאות לבין מספר המועמדים. בנוסף, לכל אוניברסיטה מכסה של מספר סטודנטים אשר יכולים להתקבל אליה, מצב של ביגמיה כשמדובר בשידוכין. במאמץ קטן יחסית יוכל

הקורא להיווכח שניתן להתאים את ההגדרות הטענות וההוכחות שבסיפורנו גם למקרים אלה ושאין הבדלים מהותיים בדרכי הפתרון כפי שהוצגו לעיל. כמובן, נדרשת הוספת מספר טענות הנובעות מהסיטואציה החדשה ואשר הוכחותיהן מעט מסובכות יותר.
נקודה חשובה אחרת שיש להביאה בחשבון היא עוצמת הרגשות. יחס ההעדפה מתעלם מנתון זה. לדוגמה, נניח שבמערכת יציבה A יוחנן משודך לרינה וגדעון משודך לשולה. כמו-כן נניח כי יוחנן מדרג את שולה בדרגה 1 ואת רינה בדרגה 100 בסולם של 1-100 ואילו שולה מדרגת את גדעון בדרגה 99 ואת יוחנן בדרגה 100 באותו סולם. ברי לנו שיציבותה של A שברירית מאד. מצב זה מחייב אותנו הכנסת אפשרות של 'אדישות' (או 'הימנעות' כפי שמקובל בפוליטיקה) שזה עניין למאמר נוסף, מעניין לא פחות.

ב-2001 פרסם גייל מאמר נוסף ובו נסקרות ההתפתחויות מאז המאמר הראשון (Gale D., 2001). לדבריו, במשך ארבעים השנים שחלפו, פורסמו מעל מאה מאמרי חקר ומעל שלושה ספרים על ידי מתמטיקאים, כלכלנים ואנשי מחשבים שעסקו בנושא.

גייל מסכם במאמרו את התיאוריות שהתפתחו לאורך השנים. הוא מזכיר, בין היתר, את דובינס ופרידמן (Dubins and Freedmann, 1981), שהוכיחו כי מניפולציה (מנהג שלא על-פי הכללים) על ידי הבנות בתהליך החדרים, בו הבנים הולכים לבנות, יכולה לשפר את מצבן של הבנות. מאידך מניפולציה על ידי הבנים באותו תהליך לא יכולה לשפר את מצבם של הבנים.

לא פלא אפוא שאנו, הבנים, נתונים חסרי אונים למניפולציות של הבנות לעיתים מזומנות כל-כך. הצילו!! (אני מקווה שאתם לוקחים זאת בהומור).

גייל מקדיש במאמרו מקום נרחב לתכונות של קבוצות ההתאמות ולתיאוריות החדשות שהוכחו במשך השנים על קבוצות אילו. מאמר מעניין ומומלץ לקריאה.

מקורות

Dubins L.E. and D.Freedmann 1981.Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm. American Mathematical Monthly, Vol. 88, 485-494.

Gale D., 2001, The Two-Sided Matching Problem. Origin, Development and Current Issues, International Game Theory Review, 237-252.

Lloyd Shapley and David Gale, 1962, College Admissions and the Stability of Marriage, *American Mathematical Monthly,Vol. 69, 9-15.*

Blair, C.1988. The Lattice Structure of the Set of Stable Matchings with Multiple Partners. Mathematics of Operations Research, Vol. 13, 619-628.

Gale, D. and Sotomayor 1985. Some Remarks on the Stable Matching Problem. Discrete Applied Mathematics, Vol. 11, 223-232.