הנושא: קצת על הסתברות, קומבינטוריקה ומספרים משולשיים

הוכן ע"י: דוד רץ.

תקציר: במאמר מטפל המחבר בשלוש בעיות בהסתברות, כאשר שתי הבעיות האחרונות הן הכללה של הבעיה הראשונה.
בתהליך הפתרון משולבים: שיקולים קומבינטוריים, שימוש בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית והיכרות עם המספרים המשולשיים.

מילות מפתח: הסתברות, קומבינטוריקה, מספר אפשרויות, מספרים טבעיים, מספרים משולשיים, אלגברה, תבנית מספר, ריבוע שלם, סדרות, סדרה חשבונית, סכום סדרה חשבונית, הוכחה ללא מילים.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 32, סיוון תשס"ד - יוני 2004, עמודים 47-49.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

קצת על הסתברות, קומבינטוריקה ומספרים משולשיים

דוד רץ
תיכון מקיף קרית-חיים

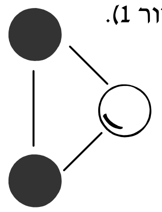
במאמר זה נדון בשלוש בעיות בהסתברות. שתי הבעיות האחרונות עוסקות בהכללות של הבעיה הראשונה, אותה, וגם את הפיתרון המוצע כאן, ניתן למצוא בספר 'סטטיסטיקה והסתברות' של אלכס קופרמן (הוצאת בק, 1995).

בעיה 1

בכד נמצאים שלושה כדורים: שניים שחורים ואחד לבן. מוציאים באופן אקראי שני כדורים בבת-אחת. לאיזה מאורע הסתברות גדולה יותר:

- *להוצאת שני כדורים זהים?*
- *להוצאת שני כדורים שונים?*

הפיתרון המופיע בספר מלווה באיור (איור 1).
מן האיור קל להסיק כי ההסתברות להוצאת שני כדורים זהים היא $\frac{1}{3}$ וההסתברות להוצאת שני כדורים שונים היא $\frac{2}{3}$.



איור 1

בעיה 2

בכד נמצאים n כדורים שחורים ו- k כדורים לבנים. מוציאים, כמו בבעיה 1, באופן אקראי שני כדורים בבת-אחת. לאיזה מאורע הסתברות גדולה יותר:

- *להוצאת שני כדורים זהים?*
- *להוצאת שני כדורים שונים?*

הפיתרון דומה לפיתרון של הבעיה הקודמת.

(1) מספר האפשרויות להוצאת שני כדורים זהים הוא:

$$N_1 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}$$

(2) מספר האפשרויות להוצאת שני כדורים הוא:

$$N = \frac{(n+k)(n+k-1)}{2}$$

מכאן לא קשה למצוא את ההסתברויות להוצאת שני כדורים זהים או שני כדורים שונים.

בעיה 3

בכד נמצאים n כדורים שחורים ו- k כדורים לבנים. איזה תנאי צריך להתקיים כדי שההסתברות להוצאת שני כדורים זהים תהיה שווה להסתברות להוצאת שני כדורים שונים?

מ- (1) ו- (2) נקבל:

$$N_1 = \frac{1}{2}N \Rightarrow \frac{n(n-1)+k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+k)(n+k-1)}{2}$$

$$2n^2 - 2n + 2k^2 - 2k = n^2 + 2nk + k^2 - n - k$$

$$n^2 - 2nk - n + k^2 - k = 0$$

$$n^2 - (2k+1)n + k^2 - k = 0$$

$$n = \frac{2k+1 \pm \sqrt{4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 + 4k}}{2}$$

$$n = \frac{2k+1 \pm \sqrt{8k+1}}{2}$$

(3) n הוא מספר טבעי לכן, כדי שיהיה פיתרון למשוואה, הביטוי $8k+1$ חייב להיות ריבוע שלם.

(4) נבחן באיזה תנאי הביטוי $8k+1$ הוא ריבוע שלם:

$$8k+1 = A^2 \Rightarrow 8k = A^2 - 1 = (A-1)(A+1)$$

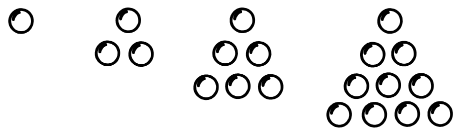
הביטוי: $(A-1)(A+1)$ מתחלק ב- 8, לכן שני הגורמים שלו הם מספרים זוגיים. נוכל לסמן: $A-1=2t$ ונקבל:

$$8k=(A-1)(A+1)=2t(2t+2)=4t(t+1)=8\cdot\frac{t(t+1)}{2}$$

ולכן: $$k=\frac{t(t+1)}{2}=C_{t+1}^{t-1}$$

(5) מדוע רשמנו: $\frac{t(t+1)}{2}$?

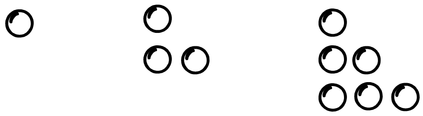
תבנית זו מתאימה לתיאור הסכום של t המספרים הטבעיים: $1,2,3,\ldots t$. המספרים המתאימים לסכומים אלה נקראים *מספרים משולשיים*. האיור הבא מסביר כינוי זה:



איור 2

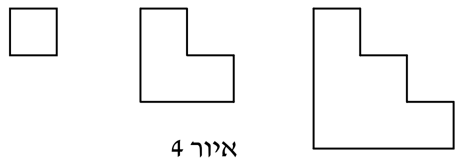
באיור זה מסודרים העיגולים כאילו הם מונחים בתוך משולשים שווי-צלעות. על-פי האיור ניתן לספור ולקבל כי ארבעת המספרים המשולשיים הראשונים הם: 1, 3, 6, 10. מספרים נוספים מתקבלים על-ידי ספירת העיגולים במשולשים בעלי מספר שורות גדול יותר. בכל שורה חדשה מופיע עיגול אחד יותר מאשר בשורה הקודמת לה.

כדי להציג את המספרים המשולשיים אפשר גם לסדר את העיגולים כאילו הם מונחים בתוך משולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים:



איור 3

כדי להאיר את אופן החישוב של המספרים המשולשיים נוח עוד יותר לדמיין את הצורות ההיקפיות הבאות כמתאימות לאיור 3.



איור 4

מכאן נקבל כי המספר המשולש העומד במקום ה-t-י שווה בערכו ל- $k=1+2+3+...+t=\frac{t(t+1)}{2}$

עד עכשיו ראינו: משפט 1. כדי ש- $(8k+1)$ יהיה ריבוע שלם, k צריך להיות מספר משולשי[1] כלומר:

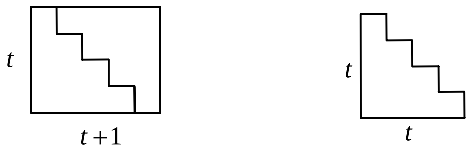
$$k=\frac{t(t+1)}{2}=C_{t+1}^{t-1}$$

גם ההיפך נכון.

משפט 2. אם k הוא מספר משולשי, אז $8k+1$ הוא ריבוע שלם (זוהי טענה שהוכיח דיאופנטוס).

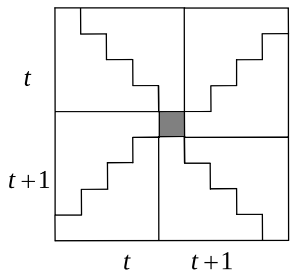
$$k=\frac{t(t+1)}{2}\Rightarrow 8k+1=8\cdot\frac{t(t+1)}{2}+1=$$
$$=4t^2+4t+1=(2t+1)^2$$

(6) האיור הבא מבטא את המשמעות הגיאומטרית של משפט 2:



מספר משולשי (k) מספר משולשי כפול $(2k)$

$8k+1$:



(7) נחזור לבעיה שלנו. קיבלנו: $k=\frac{t(t+1)}{2}=C_{t+1}^{t-1}$

מהו הערך של n?

$$n=\frac{2k+1\pm\sqrt{8k+1}}{2}$$
$$8k+1=4t(t+1)+1=(2t+1)^2$$
$$n=\frac{t(t+1)+1\pm(2t+1)}{2}$$
$$n_1=\frac{t(t+1)+1+(2t+1)}{2}=\frac{(t+1)(t+2)}{2}=C_{t+2}^{t}$$
$$n_2=\frac{t(t+1)+1-(2t+1)}{2}=\frac{t(t-2)}{2}=C_{t}^{t-2}$$

[1] זאת הדרך לבדוק, האם המספר הנתון הוא מספר משולשי.

שתי האפשרויות המתקבלות עבור n גם הן מתאימות למספרים משולשיים. שני המספרים המשולשיים האלה הם שני המספרים המשולשיים הסמוכים למספר המשולש המתאים ל- k.

(7) נותר לבדוק מהו הערך של N, כלומר מהו ערך הסכום: $n+k$.

משפט 3 הסכום של שני מספרים משולשיים עוקבים הוא ריבוע שלם ושווה בערכו לריבוע המקום של המספר המשולש הקטן מבין השניים.

הוכחה: המספר המשולש ה-t-י מוצג על-ידי התבנית: C_{t+1}^{t-1}. לכן המספר המשולש הבא אחריו מוצג על-ידי התבנית: C_{t+2}^{t}.

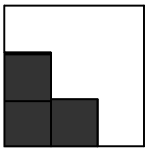
סכומם:

$$C_{t+1}^{t-1}+C_{t+2}^{t}=\frac{(t+1)!}{(t-1)!\cdot 2!}+\frac{(t+2)!}{t!\cdot 2!}=$$

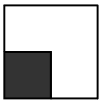
$$=\frac{1}{2}(t\cdot(t+1)+(t+2)\cdot(t+1))=$$

$$\frac{1}{2}(t^2+t+t^2+3t+2)=(t+1)^2$$

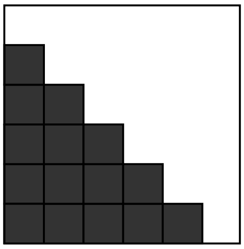
(9) האיור הבא מבטא את המשמעות הגיאומטרית של משפט 3:



$n=3 \qquad k=6$



$n=1 \qquad k=3$



$n=\{$ המספר המשולש ה- $t\}$

$k=\{$ המספר המשולש ה- $(t+1)\}$

סיכום

בכד בו נמצאים n כדורים שחורים ו- k כדורים לבנים, ההסתברות להוצאת שני כדורים זהים בבת-אחת, תהיה שווה להסתברות הוצאת שני כדורים שונים בבת-אחת אם ורק אם המספרים n ו- k הם מספרים משולשיים עוקבים. במקרה הזה מספר הכדורים הכולל בכד הוא ריבוע שלם.