



הנושא: במה דומה עורב לשולחן? – מה משותף למתמטיקאים ולילדים?

הוכן ע"י: דן עמיר.

תקציר: בעזרת ספריו של קרל לואיס: 'עליזה בארץ הפלאות' ו'עליזה בארץ המראה' מוצגת המתמטיקה כמשחק – משחק לוגי.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 33, לוגיקה, חשיבה מתמטית, הוכחות, חידות, משחקים, עליזה בארץ הפלאות, עליזה בארץ המראה, סילוגיזמים, תנאי הכרחי, תנאי מספיק, היסק.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 33, תשס"ה, עמודים, 37-42

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.



במה דומה עורב לשולחן? – מה משותף למתמטיקאים וילדים?

דן עמיר¹,

ביה"ס למדעי המתמטיקה, אוניברסיטת ת"א
danamir@post.tau.ac.il

באוניברסיטה, שאיתן טייל, שט בסירה וסיפר להן סיפורים. אחת מהן הייתה אותה עליזה, עליזה לידל, שעבורה נכתבו הספרים.

עליזה שבסיפור לא מצליחה להבין או לפתור את שאלתו של הכובען, והשאלה נותרת ללא פתרון מפורש בספר. גם אני לא אומר לכם כרגע למה התכוון בה לואיס קרול. לעומת זאת, לא אשאיר אתכם במתח כזה לגבי השאלה השנייה ששאלתי: מה משותף לילדים ולמתמטיקאים? בעצם כבר אמרתי את התשובה: המשותף הוא המשחק. גם מתמטיקאים, כמו ילדים, משחקים משחקים.

אנשים שאינם יודעים מהי מתמטיקה ומה עושים מתמטיקאים, חושבים שמתמטיקה היא אריתמטיקה, כלומר חשבון, ושמה שמתמטיקאים עושים זה חשבונות מסובכים. זה נכון לפעמים, אבל זה לא מה שמאפיין את העיסוק במתמטיקה. גם לואיס קרול צוחק קצת על האריתמטיקה ב'עליזה בארץ הפלאות'. כשהצב סיפר לעליזה על הלימודים בבית הספר בקרקעית הים הוא אמר שאצלם למדו את "תורת החשבון לענפיה השונים – לחבל ולחסל, לעלג ולהתפיל". וכשהעזה עליזה לומר "מעולם לא שמעתי על להתפיל, מה זה?", 'הגריפון זקף את שתי כפותיו מתוך פתיעה ואמר: "מעולם לא שמעתי על התפלה?", והסביר לה שאם להטעים זה להוסיף טעם לדבר, אז להתפיל זה בדיוק ההיפך. גם ב'עליזה בארץ המראה' קרול צוחק על לימודי החשבון: כששמנתי, הוא האמפטי-דאמפטי, מסביר לעליזה מדוע עדיף לחנוג ימי אי-הולדת שהם רבים מאשר את יום ההולדת שהוא רק אחד, הוא מבקש ממנה להחסיר מ-365 אחד. כשהיא משיבה שזה 364, הוא מבקש ממנה לראות את החישוב על הנייר.

הכותרת של דברי היום מורכבת משתי שאלות, או חידות: במה דומה העורב לשולחן? ומה משותף למתמטיקאים וילדים? ובוודאי תשאלו, ובצדק, גם שאלה שלישית: מה הקשר בין שתי השאלות האלה? את השאלה הראשונה אני מניח שחלק מכם מזהים – שאל אותה הכובען בספר הילדים 'עליזה בארץ הפלאות' שנכתב בשנת 1865 על-ידי הסופר האנגלי לואיס קרול. השם האמיתי של הסופר הוא צ'ארלס לאטוויג' דודג'סון (Charles Lutwidge Dodgson) והוא היה מרצה למתמטיקה באוניברסיטת אוקספורד המהוללת. שטחי ההתמחות שלו היו גיאומטריה ולוגיקה. כמו כל המתמטיקאים, גם דודג'סון אהב מאוד לשחק. ב'עליזה בארץ הפלאות' יש תיאור של משחק קרוקט – זה אמנם תיאור קריקטורי: השערים הם חיילים שמתכופפים, הכדורים הם קיפודים והפטושים – המקלות שבהם חובטים את הכדורים לשערים – הם ציפורי פלמינגו. חצר המלכות בה מבקרת עליזה היא חפיסת קלפים – החל מהמלך, המלכה ונסיך הלבבות ועד הגננים שמספריהם: שתיים, חמש ושבע. העלילה של 'עליזה בארץ המראה', שנכתב שבע שנים אחרי 'ארץ הפלאות', בנויה כסדרה של אחד-עשר מהלכים במשחק שח. מלבד המלך והמלכה, הלבנים והאדומים, יש בה תפקידים חשובים גם לרצים ולפרש הלבן. עליזה עצמה היא חייל שבסיום המשחק, כלומר בסוף הסיפור, הופכת אף היא למלכה. ידוע לנו שדודג'סון אהב מאוד את משחק הטנגרם ואף כתב ספרון ובו למעלה משלוש מאות חידות טנגרם. הוא היה גם צלם חובב נלהב, ובנוסף לכל זאת אהב מאוד ילדים, ובמיוחד אהב את שלוש בנותיו של הדקאן לידל

1. דברים שנאמרו בפני ילדי הרצליה שעלו לשלב הגמר של האולימפיאדה העירונית במתמטיקה 2.6.2004

שנותנים לי' כמוהו כ'נותנים לי מה שאני רוצה!' "אם כך הרי תוכלי לאמור גם", הוסיף המרמיט שדומה היה כי דובר הוא מתוך שנתו, "ש'אני נושם כשאני ישן' כמוהו כ'אני ישן כשאני נושם'!". כיוון שהמרמיט אכן ישן כמעט כל הזמן, הגיב על זה הכובען במילים: "אשר לך הרי באמת כך הוא" – כלומר: במקרה שלך מדובר בתנאי הכרחי ומספיק...

לא רק עליזה טועה בהיסק שלה ומבלבלת בין תנאי הכרחי לתנאי מספיק. גם היונה, שלמראה צווארה הארוך של עליזה זועקת "נחש! נחש!" טועה תחילה ומסיקה מדברי עליזה ש"ילדות קטנות אוכלות ביצים לא פחות מנחשים", שילדות קטנות הן ממין הנחש. אבל היא מתקנת את עצמה ואומרת שאם עליזה אכן מחפשת ביצים, לא משנה לה אם עליזה היא ילדה קטנה או נחש. מגדיל לעשות החתול כשהוא 'מוכיח' לעליזה שהוא משוגע: "ראשית דבר", אמר החתול, "כלב אינו משוגע, מודה את?" "הדעת נותנת" אמרה עליזה. "מוטב איפוא", המשיך החתול, "כלב הרי דרכו שהוא נוהם בשעת כעסו ומכשכש בזנבו בשעת רצון. והנה אני נוהם אני בשעת רצון, ובכעסי אני מכשכש בזנבי. הנה על כן משוגע אני..."

יש אנשים שאפילו לא מנסים להסיק מסקנות באופן לוגי אלא על-ידי איזו שהיא אסוציאציה בלבד, וללא כל בסיס לוגי. מי שעושה את זאת בחריצות רבה בארץ הפלאות היא הדוכסית, שלכל דבר שעליזה אומרת היא מוצאת איזה שהוא מוסר השכל שאין לו שום קשר לנושא פרט לאסוציאציה המילולית. כך, למשל, כשעליזה אומרת שנדמה לה שחרדל הוא מין מחצב, הדוכסית מסכימה איתה מייד ואומרת שבקרבת מקום יש מכרה חרדל, ושמוסר ההשכל מכך הוא: "כורה שחת בה יפול וגולל אבן אליו תשוב". לבסוף, כשעליזה נמלכת בדעתה וקוראת: "הו, זכרתי! ירק הוא, אין הוא נראה כך, אבל ירק הוא", מסכימה הדוכסית שוב איתה ומנדבת שוב מוסר השכל: "הִיאָּ כמו שהיית מְבַקֵּשׁ להיראות", וכקריקטורה על אנשים שמנסים לדבר גבוהה גבוהה ומסבכים את דבריהם ללא צורך, היא מוסיפה: "או, אם רצונך בניסוח פשוט יותר: 'לעולם אל תדמה בנפשך שאין אתה שונה מכפי מה שעשוי להיראות לזולתך, שמה שהיית או יכולת להיות לא הִיא שונה ממה שהיית תחילה היה נראה להם אחרת'..." קרול שם בפי הדוכסית משפט מסובך ביותר, שבעצם הוא חסר משמעות.

גם בעליזה בארץ המראה יש דמות שמצטיינת באי-היגיון – זוהי המלכה הלבנה, שלדברי עליזה: "אי אפשר להאמין בדברים בלתי אפשריים". היא אומרת: "ואני סבורה שלא התנסית בזה הרבה. כשהייתי אני בגילך עשיתי זאת תמיד חצי שעה ביום. מה, לפעמים האמנתי בלא-פחות משהו דברים בלתי אפשריים לפני ארוחת בוקר". היא גם נוקטת בשיטה המעצבנת של מה שנקרא באנגלית של היום one upmanship כלומר 'כל מה שאתה תגיד שראית או עשית, אני אגיד שראיתי או עשיתי משהו עוד יותר טוב'. כך היא אומרת לעליזה: "כשאת אומרת גן, הרי אני ראיתי גנים שבהשוואה אליהם אין גן זה אלא שממה", ואחר כך: "כשאת אומרת גבעה, הרי יכולתי אני להראות לך הרים וגבעות שלעומתם תקראי לגבעה זו עמק". כאן עליזה מתקוממת ואומרת: "גבעה אינה יכולה להיות עמק, הן תדעי. הרי זו תהיה שטות (nonsense)". והמלכה האדומה מנידה ראש ומשיבה: "יכולה את לקרוא לכך שטות, אם את רוצה, אמרה, אבל אני שמעתי שטויות, שלעומתן הרי זו הגיונית (sensible) כמילון".

אבל גם עליזה עצמה חוטאת בהיסק לא מבוסס, וזה מה שקרה לה כשהגיעה למסיבת התה של הכובען, המרמיט והארנב: כשהיא מתיישבת לידם השולחן הגדול מבלי שהוזמנה, אומר לה הארנב "שתי קצת יין", וכשמתברר שאין על השולחן שום יין והיא טוענת כלפי הארנב "לא בנימוס נהגת שהצעת אותו", הוא משיב "ואת לא בנימוס נהגת כשישבת בלא שיזמין". תשובתה היא: "לא ידעתי כי שלכם השולחן. ערוך הוא להרבה יותר משלושה". ועל כך השיב הכובען באותה שאלה שפתחנו בה: "משום מה דומה עורב לשולחן כתיבה?". הכובען מנסה להצביע לעליזה על חוסר ההיגיון שבדבריה – כשם שאין קשר בין עורב לשולחן אין קשר בין ההנחה שלה: 'השולחן ערוך ליותר משלושה', לבין המסקנה: 'השולחן אינו של שלושת המסובים בלבד'. אבל עליזה אינה מבינה זאת וחושבת שהוא חד לה חידה, וגם לואיס קרול אינו מסביר את זה במפורש בסיפור. לא רק אנחנו אשמים בכך שאנחנו אומרים לפעמים דברים לא לוגיים. הרבה פעמים השפה שלנו היא האשמה – היא איננה מדויקת מבחינה לוגית. יש לכך סיבות טובות – שפה שמקפידה על הדיוק הלוגי עלולה להיות מסורבלת מאוד. כשאנחנו מתקשרים בעזרת השפה, אנחנו יכולים להיעזר במקרים רבים בהקשר שבו נכתבים או נאמרים הדברים כדי להבין בדיוק למה הכוונה, גם אם הם אינם מדויקים מבחינה לוגית.

דוגמה נפוצה לכך היא הצירוף של סמיכות לתואר. כשאני אומר: "בית הספר הגדול" כולם מבינים שאינני מתכוון לבית של הספר הגדול. במקרים אחרים זה פחות ברור. לפעמים הדו-משמעות נמנעת בגלל המין או הריבוי. "כריכת הספר הכחולה" שונה מ"כריכת הספר הכחול" ו"כלי המטבח הגדול" שונה מ"כלי המטבח הגדולים". באנגלית, בה התואר לא מבדיל בין יחיד לרבים או בין זכר לנקבה, המצב הוא עוד יותר חמור מאשר בעברית. על אי-בהירות זו של השפה, שבמתמטיקה אנחנו פותרים אותה בעזרת סוגריים, צוחק קרול כשהוא יוצר את הדמות של הצב המזויף (mock turtle) צב-הבאי בתרגומו של אהרן אמיר, זהו הצב שממנו עושים מרק-צב מזויף (mock turtle soup).

אנו פוגשים בדו-משמעיות, ולפעמים גם ברב-משמעיות, בשפה שלנו, גם כשלאותה מילה יש יותר ממשמעות אחת. גם כאן אנחנו מבינים, בדרך כלל, למה הכוונה לפי ההקשר בו נמצאת המילה: אף אחד לא יטעה בין שני המובנים השונים של המילה 'תור' בפסוקים 'קול התור נשמע בארצנו' ו'עמדתי בתור לאוטובוס'... באנגלית bark זה גם קליפה וגם לנבוח, ובזכות אסוציאציה זו טוענים הפרחים החיים בן שבארץ המראה, שהעץ יכול לנבוח. כדי לחזק את הטענה, הם אומרים שהעץ נובח 'באו-וואו', ולכן קוראים לענף bough.

בשיר המהווה את כתב האישום נגד נסיך הלבבות בארץ הפלאות מופיע המשפט: "Before she had this fit". זהו משפט דו-משמעי, כיוון שלמילה fit יש באנגלית שני מובנים: גם הפועל 'להתאים' וגם המובן של התקף של כעס או שיגעון. המלך פונה למלכה ואומר לה: "You never had no fits, my dear, I think?" והיא, בהתקף של זעם צועקת "never!" ומטילה קסת דיו בחומט המסכן... ואז המלך אומר "Then the words don't fit you," וכיוון שאף אחד לא מחייך, הוא מסביר שזה היה חידוד לשון.

לפעמים אנחנו הוגים מילים שונות באותו אופן, וגם זו סיבה לאי-בהירות הלשון. לא כולנו מקפידים על ההבדל בין 'את' באלף ל'עט' בעין, וכמעט אף אחד לא מבדיל בין 'עט' ב'טית' ל'עת' ב'יתי'. גם על זאת מצביע קרול ב'עליזה' המילים – 'lessons' שיעורים, ו-'lessens' פוחת, נְהָגוּת באופן דומה, ולכן אומרים הצב והגריפון שבבית הספר שלהם השיעורים הלכו ופחתו מיום ליום – ביום הראשון היו מכינים שיעורים עשר שעות, ביום

השני תשע, וכן הלאה... יש גם אנגלים שמבטאים באופן דומה את המילים 'purpose' – מטרה, ו-'porpoise' דולפין, ולכן אומר הצב-הבאי ש"דג שמוחו בקדקודו לא ילך לשום מקום בלי דולפין", ומסביר:

"If a fish came to me and told me he was going a journey, I should say 'with what porpoise'".
וכשעליזה מגיבה "don't you mean purpose", הוא עונה "I mean what I say!"

את אותה התשובה לבעיה הזו של ריבוי המשמעויות של המילים, נותן גם שְׁמַנְתִּי, הוא האמפּטִי-דאמפּטִי: "כשאני משתמש במילה, משמעותה היא בדיוק מה שבחרתי שתהיה לא יותר ולא פחות".

בנוסף לריבוי המשמעויות, יש בלשון שלנו גם ביטויים שהם אבסורדיים מבחינה לוגית. כשעליזה מספרת למלכה שאיבדה את דרכה (lost her way), מגיבה המלכה ואומרת: מה פירוש דרך? כל הדרכים כן שייכות לי!... כשעליזה אומרת למלך שאינה רואה אף-אחד בדרך (I see nobody on the road) מגיב המלך באומרו שכדי לראות אף-אחד צריך ראייה חדה מאוד I only wish I had such eyes – to see nobody, and at such a distance...

הוא ממשיך בבדיחה כשמגיע הרץ: "מי נקרה לך בדרך?" המשיך המלך... "אף אחד", אמר הרץ. "אמת ונכון", אמר המלך, "גם העלמה הזאת ראתה אותו". "אם כן אף אחד הולך, כמובן, לאט ממך". "אני משתדל", אמר הרץ... "מובטח אני שאף אחד אינו הולך מהר הרבה ממני". "בשום אופן", אמר המלך, "שלולא כן היה מגיע לכאן לפניך".

דוגמה אחרת היא השימוש בביטוי 'אין כמו' (there is nothing like): "אין כמו אכילת כִּפְרִשִׁינָה בשעת חולשה", אמר המלך הלבן. "סבורה אני שטוב מזה לשפוך עליך קצת מים קרים", חיוותה עליזה דעתה, "או להזות קצת נְשְׁדוּרִי". "לא אמרתי שאין טוב ממנה", השיב המלך, "אמרתי כי אין כמוה".

קרול מוצא אי-דיוק לוגי גם בשימוש שלנו במילה 'עוד': כשהארנב רוצה להסיח את דעתה של עליזה, הוא מציע לה לקחת עוד תה. היא נעלבת ומשיבה שכיוון שעדיין לא שתתה כלום, היא אינה יכולה לקחת עוד תה. הכובען מתקן אותה ואומר שהיא צריכה להגיד שאינה יכולה לקחת פחות תה, כי מה שאינה יכולה זה לקחת פחות מאפס, אבל קל להוסיף על אפס.

אם כן, לואיס קרול יכול לעזור לנו להשגיח באי-הדיוקים הלוגיים בשימוש היום-יומי שלנו בשפה, וזאת

בניגוד לשפה המתמטית שצריכה להיות מדויקת וחד-משמעית. חלק חשוב בהבנת השפה, אם כי במידה שונה בשפות השונות, תופס התחביר. היום, בייחוד בזכות רעיונותיו של הבלשן נועם חומסקי, אנחנו מאמינים שהתחביר הוא חלק מהתכונות המולדות של המוח האנושי – בדומה ל-ROM שמוטבע בחומרת המחשב. כדי להדגים את כוחו של התחביר, כתב לואיס קרול את שירת האי-היגיון (nonsense) שבעצם היא לא אי-הגיונית אלא חסרת משמעות ברורה, כי היא משתמשת במילים שאינן קיימות בשפה, אבל עדיין נותנת לנו רושם כללי בעל משמעות. ב'עליזה בארץ המראה' זהו השיר הנקרא באנגלית Jablewocky. והוא מתחיל כך:

It was billig, and the slithy toves Did gyre and gimble in the wabe: All mimsy were the borogoves, And the mome raths outgrabe...

אם לא הבנתם את המילים, אין לכם מה לדאוג: המילים היחידות בקטע הזה שהן בעלות משמעות היו: it, was, and, the, did, in, all, were גיבריש.

בעברית תרגם אהרן אמיר את שם השיר ל'פֶטְעוֹנִי', והשיר מתחיל אצלו כך:

בָּעֵת בָּשֶׁק, וְשָׁלִי פָחֹזר בְּאַפְסִי-חַק סָבָסו,
מְקָדו: אֹז אֶז חֶלְכֶן הָיָה נִמְזֹר וּמִתִּי-עֶכֶן בְּרָדו.

כנראה שקרול שיחק הרבה במשחקי מילים עם האחיות הקטנות לבית לידל. המשחק בו מחפשים מילים שמתחילות באות קבועה נזכר בספרי עליזה כמה פעמים: המרמיט מספר לעליזה על שלוש אחיות שגרו בתחתיתה של באר וציירו כל דבר שמתחיל באות 'מ' בין הדברים שציירו הוא מונה גם 'מאוד' – באנגלית זה (much) בשיחה עם המלך הלבן על אודות הרץ מתפתח אותו המשחק, באות 'כף' (באנגלית זה באות H – הילדות נהגו לפתוח אותו במשפט I love my love with an H). בשני סיפוריו על עליזה משחק לואיס קרול גם במילים ששונות זו מזו רק באות אחת, כמו cat, rat, bat. קרול היה, כנראה, זה שהמציא את משחק חילופי האותיות – 'גשר של מילים' – שקרא לו doublets. אתם בוודאי מכירים את המשחק הזה ומשחקים בו: צריך להגיע ממילה אחת למילה אחרת בעלת אותו מספר אותיות על-ידי כך שבכל שלב מחליפים אות אחת, ועדיין מקבלים מילה בעלת משמעות, וכמובן רוצים לעשות זאת במספר צעדים מינימאלי. ברור שמספר הצעדים אינו יכול להיות קטן מהמספר של זוגות

האותיות הלא זהות במקומות המתאימים במילים – למספר זה קוראים המתמטיקאים 'מרחק האמינג' בין שתי המילים. כך, למשל, קל לעבור מ'קר' ל'חס'. זה אפשר לעשות בשני צעדים, כשמילת הגישור היא, כמובן, 'קס', ושניים הוא גם מרחק האמינג בין שתי המילים האלה. לפעמים מספר הצעדים הדרושים גדול ממרחק האמינג. כך, למשל, כדי לעבור מ'אף' ל'פה' לא יספיקו שני צעדים, כיוון שהמילה 'פף' אינה בעלת משמעות. נוכל להסתדר כאן בשלושה צעדים: אף, כף, כה, פה. אחד המוטיבים ב'עליזה בארץ הפלאות' הוא השינויים בגודל של עליזה. ננסה גם אנחנו להפוך ענק לגמד בגשר של מילים: ענק, עמק, עמד, גמד.

שינויי הגודל קרו לעליזה בבית השפן, ומי שנתן לה את העצה איך לשנות את גודלה כרצונה היה הזחל. ננסה עכשיו לעבור משפן לזחל: שפן, שפל, שחל, זחל.

בשני המקרים האלה מרחק האמינג בין שתי המילים הוא 3, וזה היה גם מספר הצעדים, בני מרחק האמינג 1 כל אחד, שנדרשו לנו.

ננסה כעת לגשר בין שתי דמויות אחרות בעליזה: חתול ועכבר. למרות שמרחק האמינג ביניהן הוא 4, לא הסתדרתי בפחות מ-5 צעדים: עכבר, עכור, שכור, שכול, שתול, חתול. אולי אתם תצליחו יותר טוב ממני.

כדי להדגים מעט איך חושבים מתמטיקאים, אספר לכם מהן התכונות של מה שקוראים במתמטיקה "מרחק –"

המרחק בין A ל-B הוא מספר אי-שלילי שהוא 0 אם ורק אם $A=B$; המרחק הוא סימטרי, במובן שהמרחק בין A ל-B שווה למרחק בין B ל-A, והוא מקיים את אי-שוויון המשולש:

לכל C, המרחק בין A ל-B אינו עולה על סכום המרחקים בין A ל-C ובין C ל-B.

ידוע לנו שהמרחק הרגיל, על הישר, במישור או במרחב, מקיים תכונות אלה. גם מרחק האמינג מקיים אותן. זה נכון גם לגבי מספר הצעדים המינימאלי שדרוש למעבר במשחק שלנו, שמתמטיקאי יכול לקרוא לו 'מרחק קרול' (אם אין שום גשר בין שתי מילים, נאמר שמרחק קרול ביניהן הוא אינסוף). עכשיו הוא יכול לדבר גם על 'קוטר קרול' של קבוצת מילים – כלומר מרחק קרול בין שתי המילים הרחוקות ביותר זו מזו שבתוכה, ולנסות למצוא, למשל, את קוטר קרול של כל המילים בנות 2 אותיות, בנות 3 אותיות, כל השורשים בעברית וכו'. הוא יוכל גם לדבר על 'כדור קרול ברדיוס n' סביב

בכתובת AMBULLANCE שרואים במראה של המכונית – רמז: האם הראי הופך מזרח ומערב?). גם בעיה זו נרמזת ב'עליזה בארץ המראה'. כשעליזה מתארת באוזני החתלתולה את ארץ המראה היא אומרת "חפצה אני כל-כך לדעת אם יש להם אש בחורף: לעולם הרי אין לדעת, אלא אם האש שאצלנו מעלה עשן, ואז עולה עשן גם בחדר ההוא – אבל אפשר אין זו אלא העמדת פנים, פשוט לעשות רושם כי יש שם אש מבושרת. הנה נ, הספרים הם בדומה לשלנו, רק שהמילים הפוכות. זאת אני יודעת, משום שהגבתי את אחד הספרים שלנו אל המראה, ואז הגביו ספר אחד בחדר השני". ואכן, את שיר הפטעוני שהזכרתי קודם היא מוצאת כתוב בכתב מראה.

בשני סיפוריו על עליזה: יש רמזים גם לבעיות פילוסופיות קלאסיות, כמו בעיית ההבדל בין שמו של דבר לדבר עצמו: בשיחה עם היתוש עולה השאלה "למה יש בכלל שמות לדברים?". האמפטי-דאמפטי טוען שהשם צריך לתאר את הדבר, ואילו הפרש הלבן מנתק את השם מהדבר ועוד מרחיק מכך: הוא מספר לעליזה על השיר שכתב: "שם השיר נקרא 'אלמוגים'".

היא אומרת: "הו, כך שם השיר, מה?". "לא, אינך מבינה", אומר הפרש, "כך קוראים לשם. השם באמת הוא 'איש זקן-זקן'". מכאן מסיקה עליזה שכך קוראים לשיר, אבל הפרש אומר שקוראים לו אחרת: הוא נקרא: 'דרכים ואמצעים', אבל זה רק איך שהוא נקרא, ובעצם השיר הוא 'יושב על השער'...!

בעיה פילוסופית קלאסית אחרת היא בעיית החלום והמציאות – שמנתי אומר לעליזה שאם המלך האדום יחדל לחלום עליה, היא לא תהיה בשום מקום, כי היא רק מין דבר שנמצא בחלומו של המלך. זאת היא גם השאלה שמציקה לעליזה כשאנחנו מגיעים לסוף הסיפור: "ודאי היה זה המלך האדום. אכן, הוא היה חלק מחלומי – אבל אני הלא חלק מחלומי הייתי!"

אני מקווה שבפעם הבאה שתקראו את ספרי לואיס קרול, והם שווים שיקראו בהם עוד ועוד, וכדאי לכם לנסות ולקרא אותם גם באנגלית, תגלו גם אתם בהם את מה שסיפרתי לכם, ועוד הרבה.

המילה – A כל המילים שמרחקן מהמילה A, שנקראת 'מרכז הכדור', אינו עולה על n, ולחפש 'מרכז קרול' של קבוצת מילים, כלומר מילה שממנה יהיה המרחק למילה הרחוקה ביותר בקבוצה מינימאלי ולקבוע את 'רדיוס קרול' שלה, שהוא הרדיוס המינימאלי של כל הכדורים המכסים את כל הקבוצה. הוא יוכל אז להשוות אותו לרדיוס האמינג שלה או למה שקורה בשפות שונות. אמרתי לכם שמתמטיקה זה משחק... מתמטיקאי אחר יוכל לצייר את גרף קרול של קבוצת מילים. גרף מורכב מנקודות, הנקראות קדקודי הגרף, ומקשתות המחברות זוגות של קדקודים. הוא יחבר בקשת כל זוג מילים שמרחק האמינג ביניהן הוא 1, כלומר שאפשר לעבור מאחת לשנייה בצעד אחד של המשחק. הבעיה שלנו בהצגתה בגרף היא למצוא את המסלול הקצר ביותר בין מילה אחת לשנייה. וגם הוא יוכל להמציא משחקים רבים כשהוא משתמש במושגים מתורת הגרפים.

כמובן שהמשחקים שהמתמטיקאים משחקים בהם יכולים להיות מסובכים מאוד, וכדי להבין אותם צריך ללמוד הרבה מאוד. אבל זוהי רוח המתמטיקה.

דודג'סון חד גם הרבה חידות מתמטיות שאינן קשורות לשפה. הוא היה, כנראה, זה שניסח לראשונה את החידה המוכרת: אם 6 חתולים צדים 6 עכברים בשש דקות, כמה חתולים צריך כדי לצוד 100 עכברים ב-50 דקות? (12). הוא התעניין גם בפיסיקה ושאל את החידה המפורסמת על הקוף ואשכול הבננות*. הוא הוטרד גם מהחד-כיווניות של ממד הזמן, ונוגע בכך ב'עליזה בארץ המראה': אצל המלכה הלבנה חץ הזמן הוא הפוך – היא צועקת לפני שהיא נדקרת וזוכרת דברים מהעתיד. גם האימרה הידועה של המלכה האדומה: "כאן, מבינה את, יש לרוץ ככל שאת יכולה כדי להישאר במקום אחד. אם רוצים להגיע לאיזה מקום אחר, צריכים לרוץ לפחות במהירות כפולה" – שמצטטים אותה

בהרבה הזדמנויות לגבי קצב התפתחות הטכנולוגיה המודרנית, מקורה בפיסיקה.

בעיית ההיפוך בראי מוכרת לכם בוודאי – מדוע הראי הופך ימין ושמאל, ולא הופך למעלה ולמטה? (כמו

* בעיית הקוף והבננות: קוף, הנמצא בקצהו האחד של חבל המונח על לגלגל, חושק באשכול בננות הנמצא בקצהו השני של החבל ומשקלו כמשקל הקוף. הקוף מנסה לטפס בחבל ולהתקרב לבננות. בהנחה שאפשר להתעלם ממשקל החבל ומהחיכוך שבין החבל לגלגל, האם יצליח הקוף במשימתו?