



הנושא: **בחירת כלים לפתרון משוואות בסביבת למידה טכנולוגית**

הוכן ע"י:

אלכס פרידלנדר, חנה שטיין.

תקציר:

המאמר מציג ממצאים של מחקר שעסק בבדיקת יכולתם של תלמידים בחטיבת הביניים הלומדים מתמטיקה בסביבה המשלבת כלים טכנולוגיים לפתור משוואות. המחקר מתמקד ביכולתם של התלמידים לעבור בין הייצוגים השונים האפשריים לכל משוואה: ייצוג אלגברי וייצוג גרפי, בעזרת כלים שונים: מחולל פונקציות וגרפים, גיליון אלקטרוני מניפולאטור אלגברי ונייר ועיפרון.

מילות מפתח:

כתב העת על"ה, על"ה 33, מחקר, אלגברה, טכניקה אלגברית, משוואה, משוואה קווית, משוואה ריבועית, מערכת משוואות לינאריות, מערכת משוואות, ייצוג, ייצוג גרפי, ייצוג אלגברי, עזרי הוראה, מחשב.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 33, תשס"ה, עמודים 50-55

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.



בחירת כלים לפתרון משוואות בסביבת למידה טכנולוגית

חנה שטיין

ביה"ס לטבע סביבה וחברה, תל-אביב
menor4netvision.net.il

אלכס פרידלנדר

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע
Ntfried@wisemail.weizmann.ac.il

תקציר

ממוחשבים – כמו גיליון אלקטרוני, מחולל גרפים, ומניפולאטור אלגברי-סימבולי. חלק מן התצפיות התמקדו ביכולתם של תלמידים לעבור בין ייצוגים, אך כמעט ואין לנו מידע על ההעדפות של תלמידים בבחירת ייצוגים וכלים שונים, העומדים לרשותם בבואם לפתור משימה מתמטית. הסיבה למידע המועט בנושא זה נעוצה בעובדה שבדרך כלל, המשימות הניתנות לתלמידים כוללות הוראות מפורשות לגבי סוג הייצוג והכלי, שבהם הם נדרשים לעבוד בתהליך הפתרון. במאמר זה, ננסה להציג ממצאים המתייחסים לנקודות הבאות:

- א. דרכי עבודה של תלמידים בפתרון משוואות בסביבה המספקת מגוון כלים.
- ב. יכולתם של תלמידים לבחור, ליישם ולשלב ייצוגים וכלים שונים בתהליך הפתרון של משוואות אלגבריות מסוגים שונים.
- ג. העדפות תלמידים לגבי הכלים בהם הם משתמשים לפתרון משוואות.

בחרנו לצפות בתלמידי כיתה ח, הלומדים מתמטיקה במשך כל שלוש השנים של חטיבת-הביניים בסביבת הפרויקט 'מתימחשב' (Hershkovitz et al., 2002). התוכנית מתבססת על שילוב כלים טכנולוגיים במהלך הלמידה, תוך ניצול כוחם של כלים אלה ללמידה משמעותית של המקצוע. תלמידי פרויקט 'מתימחשב' לומדים כשעה עד ששעתיים שבועיות במעבדת מחשבים. למידת המתמטיקה לפי תוכנית זאת מתמקדת בעיקר בתחומים הבאים: הכללות אלגבריות (בעזרת גיליון אלקטרוני) בכתה ז, פתרון משוואות ובעיות (בעזרת מניפולאטור אלגברי ומחולל גרפים) בכתה ח, ופונקציות (בעזרת מחולל גרפים) בכתה ט.

מאמר זה מציג מספר ממצאים על יכולתם של תלמידים בני 13-14 הלומדים מתמטיקה בסביבה המשלבת כלים טכנולוגיים, לפתור משוואות. מטרתנו היתה לבחון את יכולתם של תלמידים אלה לבחור ליישם ולשלב כלים שונים בפתרון משוואות ואת ההעדפותיהם בבחירת הכלים והשיטות לביצוע משימה זאת. כדי לעמוד על נקודות אלה, בחנו את עבודתם של שישה זוגות תלמידים בפתרון משוואות מסוגים שונים. במהלך ביצוע המשימה, העמדנו לרשות התלמידים ארבעה כלים – מתוכם שלושה כלים ממוחשבים ונייר ועיפרון.

התצפיות שלנו הראו, כי התלמידים היו מסוגלים לגשת לפתרון המשוואות בכלים ובשיטות שונות, ידעו לעבור ולשלב בין השיטות השונות ולמצוא את הפתרון המלא של כל אחת מן המשוואות לפי הדרך בה עבדו. נראה כי התלמידים העדיפו לעבוד בעזרת אלגוריתמים אלגבריים בסביבת נייר ועיפרון. יחד עם זאת, במהלך שיחה עם, התלמידים הביעו בדרך כלל העדפה לעבודה בעזרת כלי טכנולוגי, וידעו להסביר את הסיבות לכך.

מבוא

בתחום החינוך המתמטי ניתן למצוא המלצות רבות לשימוש בכלים טכנולוגיים בתהליך של למידת האלגברה, כמו למשל אצל: Dörfler, 1993; Balacheff & Kaput, 1996; Yerushalmy & Schwartz, 1993. ההמלצות מתבססות על צפייה בעבודתם של תלמידים בפתרון משימות אלגבריות בעזרת כלים

שיטות פתרון

התלמידים נעזרו במגוון רחב של שיטות פתרון (בממוצע 3.8 שיטות לזוג למשוואה) והשתמשו בכל ארבעת הכלים שעמדו לרשותם. כל הזוגות מצאו את הפתרונות של כל אחת מן המשוואות, גם במקרים שבהם שיטת הפתרון הפורמאלית באמצעות נייר ועיפרון לא היתה ידועה להם. טבלה 1, המופיעה בנספח למאמר, מציגה את פתרונות התלמידים (בשל חוסר מקום, לא כללנו בטבלה גרסאות פתרון השונות זו מזו בנקודות משניות בלבד).

בהקשר לממצאים המוצגים בטבלה, ברצוננו להעיר מספר הערות:

- א. בשלב הזה של לימודיהם, התלמידים עדיין לא למדו אלגוריתם אלגברי לפתרון משוואה ריבועית או מערכת משוואות ריבועיות.
- ב. במסגרת לימודיהם, התלמידים השתמשו בגיליון אלקטרוני כדי לתאר ולחקור תופעות השתנות, אך לא השתמשו בו ככלי לפתרון משוואות אלגבריות מן הסוג שקיבלו במסגרת הריאיון.
- ג. פתרון משוואות בשני משתנים בעזרת גיליון אלקטרוני הוא מאוד מורכב ולא נוח.
- ד. לתלמידים לא היה כל ניסיון קודם בעבודה עם מספר כלים ממוחשבים במקביל, ועד משימה זו לא נתקלו בצורך לשקול ולבחור כלי לעבודה.

מחסור בשיטות פורמאליות לפתרון של משוואה ריבועית (הערה א) יכול להסביר את חוסר ההצלחה היחסי בפתרון המשוואות הריבועיות בעזרת נייר ועיפרון. מגבלות הגיליון האלקטרוני בפתרון משוואות ומערכות (הערות ב, ג) יכולות להסביר את השימוש המצומצם יחסית בכלי זה. כדאי לציין כי היעדר התנסויות קודמות במשימות המצריכות בחירה בין כלים (הערה ד) לא הגבילה את יכולתם של התלמידים לעבוד בכלים שונים, או את יכולתם ליצור הקשרים בין תוצאות עבודתם בכלים השונים. כך למשל, היו לפחות עשרה מקרים, שבהם תלמידים חזרו מן הכלי הטכנולוגי לנייר ועיפרון, על-מנת לברר לעצמם 'מה השתבש' קודם לכן, כשעבדו 'על הנייר'. נצפו גם מקרים, שבהם תלמידים יצרו הקשרים בין תוצאות שהושגו בכלים טכנולוגיים שונים. לדוגמה, זוגות E ו-F דווחו על שימוש בתוצאות שקיבלו במניפולאטור האלגברי, על-מנת לאמת את הפתרונות שמצאו קודם לכן במחולל גרפים.

הלמידה מבוססת על רצף של חקר סיטואציות-בעיה פתוחות, המתנהל בקבוצות הטרוגניות קטנות. בדיון הכיתתי שלאחר מכן, התלמידים מגבשים את המושגים המתמטיים שנלמדו, ומבצעים רפלקציה על עבודתם. בהקשר לנושא המשוואות, אנו מעריכים כי תוכנית הלימודים וסביבת המחשב מאפשרים את הרחבת התפיסה של מושג המשוואה ואת העמקת ההבנה שלו מתוך היבט פונקציונאלי. בגישה הפונקציונאלית, המשוואה נתפסת כמצב של שוויון בין שתי תופעות משתנות $[f(x) = g(x)]$ או כמצב שבו פונקציה מסוימת מקבלת ערך נתון $[f(x) = c]$.

הריאיון

לצורך המחקר ריאיינו שישה זוגות של תלמידים בני 13-14 (לקראת סוף כיתה ח) שהוערכו על-ידי מורתם כבעלי יכולת מתמטית ממוצעת. התלמידים למדו בבית-ספר ממלכתי שמדגיש את לימודי הטבע מבחינת הקצאת שעות לימוד, ולא דווקא את לימודי המתמטיקה. כל ריאיון ארך כ-90 דקות. במסגרת הריאיון, נתבקש כל זוג תלמידים לפתור בדרכים רבות ככל האפשר שתי משוואות, אחת ליניארית ואחת ריבועית:

$$1.2(x - 0.5) = 8.4, \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

ושתי מערכות משוואות. מערכת משוואות ליניארית ומערכת משוואות ריבועית:

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 + x \end{cases}$$

(המשוואות והמערכות מופיעות גם בשורה העליונה של טבלה 1, שבנספח למאמר זה). בתחילת הריאיון, המראיין הסביר לתלמידים כי הם יקבלו סדרה של משוואות אלגבריות והם מתבקשים לפתור אותן בדרכים רבות ככל האפשר, כאשר לרשותם עומדים ארבעה כלים: נייר ועיפרון, גיליון אלקטרוני (Excel), מחולל גרפים (מתמטי-X) ומניפולאטור אלגברי (Derive).

לכל אורך הריאיון, התלמידים לא קיבלו כל הוראה או רמז לגבי בחירת הכלי או שיטת הפתרון. בסיום פתרון של כל משוואה, נשאל כל תלמיד בנפרד (בנוכחות בן הזוג שאיתו עבד) על העדפותיו לגבי הכלים בהם השתמש לפתרון אותה המשוואה.

בחירת כלי העבודה

בסעיף זה נדון במספר ממצאים הנוגעים להעדפות של התלמידים ביחס לכלים שבהם השתמשו לפתרון משוואות. הניתוח מתבסס על מספר מקורות:

- א. תצפית על עבודת התלמידים;
- ב. הערות התלמידים לאחר פתרון כל אחת מן המשוואות;
- ג. הערות ספונטאניות של התלמידים, תוך כדי עבודתם.

כל ששת הזוגות התחילו בעבודתם על כל משוואה בעזרת נייר ועיפרון. העובדה כי עדיין לא למדו את האלגוריתם לפתרון משוואות ריבועיות, לא הרתיעה את התלמידים והם ניסו לגשת לפתרון המשוואה בשיטה אלגברית גם במקרים אלה. לדוגמה, זוג A ניסה לפתור את המשוואה: $x^2 - 5x + 6 = 0$ כמתואר להלן:

A1: נעשה (-6) [רושם] $x^2 - 5x = -6$ אפשר לחלק ל- x ?

A2: אולי שורש של x?

A1: נעשה (+5x) ואז שורש [רושם]: $x^2 = 5x - 6 + \sqrt{x}$

A2: לא לימדו אותנו איך לפרק [רושם]: $x = -6 + \sqrt{5x}$

A1: נפרק, נרכיב, נפרק, נרכיב עד שייצא [הפתרון].

כפי שהוזכר קודם, בסיום פתרון של משוואה, כל תלמיד נתבקש לדרג את הכלים לפי הערכתו את מידת יעילותם בפתרון אותה המשוואה. טבלה 2, המופיעה גם היא בנספח למאמר, מציגה את העדפות התלמידים המרואיינים – על-פי דיווחיהם.

הממצאים בטבלה 2, מראים כי במקרה של המשוואה הליניארית, רוב התלמידים בחרו את דרך הפתרון 'בעזרת נייר ועיפרון' כדרך המועדפת או היעילה ביותר. לעומת זאת, בשלוש המשימות האחרות בחרו רובם בעדיפות ראשונה את אחד משני הכלים הממוחשבים – זאת על אף העובדה, כי באופן מעשי, בחרו כל התלמידים להתחיל את פיתרון של כל משוואה בעזרת נייר ועיפרון.

התלמידים העלו סיבות שונות להעדפתם את העבודה בסביבת 'נייר ועיפרון'. נצטט חלק מהן:

• מידת המעורבות של הפותר בתהליך הפתרון:

הידע שלי יותר טוב על דף. בתוכנות מחשב אין מאמץ. זה טוב לעצלים. אני אוהב להיכנס לדף, אך לפעמים מסתבך. אני אוהב אתגרים.

(E2 משוואה 1)

ה-'Derive' לא אומר שאני עשיתי. התוכנה עשתה!

(F2 משוואה 2)

• זמינות:

יש סיכוי בחיים שאהיה בלי מחשב. במבחן בגרות לא ייתכן מבחן עם מחשב.

(B1 משוואה 1)

• צורך בהבנה ובסקיפות:

ה-'Derive' לא הראה כלום... סתם אמר את התשובה ולא הראה כלום...

(B2 משוואה 2)

הנייר נראה לי יותר בטוח, למרות שה-'Derive' פותר הכול. במשוואות יותר מסובכות אפשר לפעמים להסתבך ואתה לא מבין למה הגעת. ה-'Derive' יותר נוח, כי הוא ישר נותן תשובה אבל אם זה [המשוואה] מסובך אני לא מבינה איך הגעת ל-x.

(D2 משוואה 1)

• ציפיות המורה/המראיין:

'Derive' הכי טוב, מהיר, אבל אם יש תרגילים המורה תרצה את הדרך.

(B2 משוואה 4)

מחשב עדיף, קל יותר, אבל זו לא דרך. בבחינה לא יתנו לנו להשתמש. אם היה אפשר – אז בטח.

(F2 משוואה 3)

• עמדה אישית:

לא רוצה להתעסק עם גרפים.

(C1, C2 משוואה 2)

אוהבת על דף. זה נוח.

(E1 משוואה 1)

רוב התלמידים יכלו לזהות, לפחות ברמה ההצהרתית, את היתרונות של הכלים הממוחשבים. לאור הקשיים האובייקטיביים בפתרון משוואה בסביבת גיליון אלקטרוני (Excel), נתייחס כאן לעמדות התלמידים למחולל גרפים (מתמטי-x) ולמניפולאטור הסימבולי (Derive). התלמידים ציינו את יכולת המחשב לפתור כל משוואה אפשרית (בעיקר כאשר הידע שלהם לא אפשר להם לפתור את המשוואה באופן ידני).

המחשב מוצא כל תוצאה אפשרית ואני לא.

(C1 משוואה 4)

התלמידים ראו בשקיפות דרך הפתרון את היתרון העיקרי של מחולל הגרפים, בעוד שהכוח העיקרי של

המניפולאטור האלגברי טמון לדעתם, במהירות ובקלות שבהפעלתו.

הפתרון [על הנייר] הוא קצת קשה. אני מעדיף את הגרף. הוא נותן את נקודת החיתוך. לפי הצבה [הצבת מספרים בשיטת ניסוי וטעייה] היינו חושבים שיש רק פתרון אחד: $x = 2$. היינו עוצרים ב-2. כאן [בגרף] רואים שיש גם עלייה וגם ירידה ומוצאים את שני הפתרונות. (A1 משוואה 2)

'Derive' היה הכי טוב. הכי מהיר.

(B2 משוואה 4)

התלמידים העדיפו לעיתים קרובות את הגרף, מכיוון שהמניפולאטור לא סיפק את הצורך שלהם להבין את דרך הפתרון.

בין "Derive" ו"מתמטי-x", עדיף המתמטי-x כי הוא ממחיש יותר כשרואים את הגרף אז מבינים, רואים באופן מוחשי, ברור יותר.

(D2,D1 משוואה 2)

בחלק מן המקרים עלתה שאלה של לגיטימיות של המניפולאטור ככלי פתרון.

ב-"Derive" סתם מכניסים [נוסחה], וזה לא ממש דרך [לפתרון משוואות].

(F1 משוואה 1)

'Derive' זה קל יותר, אבל זו לא דרך.

(F1 משוואה 3)

המשוואה בייצוגים שונים, לנוע בין הכלים והייצוגים השונים, ולקשר בין התוצאות שקיבלו. יכולת כזאת מחייבת שילוב מורכב של ידע הקשור במערכות הייצוג השונות וביחסים ביניהן. התלמידים היו מסוגלים להפעיל מגוון של שיטות פתרון, לבצע מעברים ביניהם, ולמצוא את הפתרון השלם – וזאת גם במקרים שבהם עדיין לא הכירו את שיטת הפתרון האלגברית הסטנדרטית בעזרת נייר ועיפרון.

בהקשר לנתונים על העדפות התלמידים לגבי הכלים בהם השתמשו לפתרון משוואות, התמונה פחות ברורה. מעקב אחר מהלך עבודתם של התלמידים הראה, כי בכל פעם בחרו התלמידים להתחיל את עבודתם בניסיון להפעיל אלגוריתם אלגברי, בסביבה של נייר ועיפרון. לעומת זאת, בהערות שביטאו בסוף התהליך של פתרון משוואה, התלמידים השמיעו עמדה פחות חד-משמעית. בדרך-כלל, הם בחרו בכלי ממוחשב ככלי המועדף ביותר, ואף ידעו לנמק את בחירתם. הקריטריונים העיקריים שהשמיעו על העדפות התלמידים היו יכולתו של הכלי לשקף את תהליך הפתרון, יכולת הכלי לאפשר רמה גבוהה של מעורבות הפותר בתהליך הפתרון, ומידת האפשרות להפעיל את הכלי לפי נורמות העבודה המקובלות לדעתם בלימוד המקצוע.

מקורות

- Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A.J. Bishop et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 469-501). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dörfler, W. (1993). Computer use and views of the mind. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.). *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 159-187). Berlin, Germany: Springer.
- Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T. & Tabach, M. (2002). Mathematics curriculum development for computerized environments: A designer-researcher-teacher-learner activity. In L. D. English (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 657-694). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Knuth, E. J. (2000). Understanding connections between equation and graphs. *Mathematics Teacher*, 93, 48-53.
- Yerushalmy, M. & Schwartz, J. L. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. A. Romberg, E. Fennema & T. Carpenter (Eds.). *Integrating Research on Graphical Representations of Functions* (pp. 41-68). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

סיכום ומסקנות

הממצאים מראים בבירור כי התלמידים שהשתתפו בריאיון היו מסוגלים להפעיל מגוון של שיטות לפתרון משוואות. הם ידעו ליצור הקשרים בין משמעויות שונות של מושג המשוואה, וידעו לקשר בין תהליכי הפתרון שעשו בכלים שונים.

מחקרים אחרים הראו שגם אם תלמידים ידעו לפתור הן בעיות המופיעות בייצוג אלגברי, והן בעיות המופיעות בייצוג גרפי, חלקם לא הבין את הקשר בין הייצוגים, או הבין אותם באופן שטחי ומעורפל (Yerushalmy & Schwartz, 1993 ; Knuth, 2000); קושי זה לא נצפה במקרה שלנו. התלמידים שריאיינו היו מסוגלים לזהות ולהציג את אותה

טבלה 1. שיטות פתרון של התלמידים שהשתתפו בריאיון (מספר הזוגות שהשתמשו בכל שיטה *).

משוואה	כלי	
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$1.2(x - 0.5) = 8.4$	
- חלוקה (נכונה) ב- x, ללא יכולת להמשיך בתהליך הפתרון. (2) - חלוקה (לא נכונה) ב- x, וקבלת פתרון שגוי. (3) - היעדר ניסיון לפתור (מתוך מודעות לאי ידיעה של שיטת פתרון אלגברית). (1)	- פישוט הביטוי ומציאת ערכו של x. (6) - ראשית – חלוקה ב- 1.2 ואח"כ מציאת ערכו של x. (2)	נייר ועיפרון
- שירטוט גרף של כל אגף בנפרד, וחיפוש אחר נקודת המפגש (תוך שינוי גודל הצעד או שינוי הסקאלות). (2) - שירטוט גרף של האגף השמאלי, ומעקב אחרי שיעור y המתאים למספר אפס, הרשום באגף ימין של המשוואה. (3) - ציון הצורך בשירטוט גרף אך לא ניסיון לשרטט. (1)	- תחילה, ניסיון לא מוצלח לשרטט גרף של המשוואה ע"י רישום כל המשוואה כמכלול, ואז : א. וויתרו. (1) או ב. שירטוט גרף של כל אגף בנפרד, וחיפוש אחר נקודת המפגש (לבסוף, שינוי גודל הצעד או שינוי הסקאלות). (2) או ג. שירטוט גרף של האגף השמאלי, ומעקב אחרי שיעור y המתאים לרשום באגף ימין של המשוואה. (1) - ביצוע שלבים ב' או ג' שלעיל, ללא ניסיון לרשום משוואה שלמה בחלון הפונקציות. (2)	מחולל גרפים
רישום המשוואה ושימוש במקש "Solve" (6)	רישום המשוואה ושימוש במקש "Solve" (6)	מניפולטור אלגברי סימבולי
- רישום סדרת מספרים בעמודה A (מ-1 עד 10 בקפיצות של 0.1), כנראה תוך שינוי גודל הקפיצות, ואז בעמודה B: רישום אגף שמאל של המשוואה כנוסחה, העתקת הנוסחה לאורך העמודה, וחיפוש אחר הופעת המספר אפס, הרשום באגף ימין או הנוסחה כולה כנוסחה, העתקת הנוסחה לאורך העמודה, וחיפוש אחר הופעת הערך "True". (3) - העדר ניסיון לפתור. (3)	- רישום סדרת מספרים בעמודה A (מ-1 עד 10 בקפיצות של 0.1, כנראה תוך שינוי גודל הקפיצות, ואז בעמודה B: רישום אגף שמאל של המשוואה כנוסחה, העתקת הנוסחה לאורך העמודה, וחיפוש אחר הופעת המספר 8.4, או רישום המשוואה כולה כנוסחה, העתקת הנוסחה לאורך העמודה, וחיפוש אחר הופעת הערך "True". (4) - ניסיונות לא מוצלחים (בלבול בין תפקידי המשתנה התלוי והבלתי-תלוי או השמטת סדרת המספרים המייצגים את המשתנה הבלתי-תלוי). (2)	גיליון אלקטרוני

* לפעמים, היו לאותו זוג יותר משיטה אחת לפתרון של משוואה בסביבת נייר ועפרון.

טבלה 1 (המשך): שיטות פתרון של התלמידים שהשתתפו בראיון (מספר הזוגות שהשתמשו בכל שיטה *).

משוואה כלי		$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 + x \end{cases}$
נייר ועיפרון	- חיבור שתי המשוואות ופתרון המערכת. - חיסור שתי המשוואות ופתרון המערכת. - ביטוי אחד המשתנים בעזרת אחת המשוואות, והצבת הביטוי במשוואה השנייה.	- הצבת במשוואה השנייה של תבנית מתאימה ל- y (מן המשוואה הראשונה), ואז: א. השלמת הפתרון באופן מלא (2) או ב. השלמת הפתרון באופן חלקי (2) או ג. פתרון שגוי (1) - הצבת במשוואה השנייה של תבנית מתאימה ל- y (מן המשוואה הראשונה), ובהמשך אי הצלחה להגיע לפתרון. (2) - מציאת זוג מספרים המתאים כפתרון למשוואה הראשונה, וטענה כי זהו פתרון המערכת. (1)
מחולל גרפים	שירטוט גרף של כל אחת מן המשוואות בנפרד, וחיפוש אחר נקודת המפגש (תוך שינוי גודל הצעד או שינוי הסקאלות).	שירטוט גרף של כל אחת מן המשוואות בנפרד, וחיפוש אחר נקודת המפגש (תוך שינוי גודל הצעד או שינוי הסקאלות).
מניפולאטור סימבולי	רישום שתי המשוואות כמערכת ושימוש במקש "Solve"	רישום שתי המשוואות כמערכת ושימוש במקש "Solve"
גיליון אלקטרוני	- רישום סדרות מספרים בעמודה A ו- B, ואז רישום הסדרה A+B בעמודה C. - וויתור להמשיך לאחר הבנת התלות שבין שני מספרים הרשומים באותה השורה של הגיליון. - נסיון לחפש בתפריט "Functions" - העדר ניסיון כלשהו.	העדר ניסיון כלשהו.

טבלה 2. העדפות הכלים של התלמידים עבור כל אחת מארבע המשוואות (N = 12)

מתלבטים בין נייר ומחשב	מניפולאטור סימבולי (Derive)	מחולל גרפים (מתמטי-א)	נייר ועפרון	כלי משוואה
	2		10	$1.2(x - 0.5) = 8.4$
2	3	5	2	$-5x + 6 = 0^2x$
1	7	2	2	$8x + y = -4 ; x - y =$
1	4	5	2	$+x^2y = x + 1 ; y = x$