



הנושא: 9, 99, 999, ... ומספרים פלינדרומיים

הוכן ע"י: יפים כץ.

תקציר: המחבר עונה על השאלה: מהו התנאי שיבטיח כי המכפלה של מספר טבעי במספרים, אשר כל ספרותיהם הן 9, תהיה מספר פלינדרומי?

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 34, מספרים ופעולות, פעולות חשבון, מכפלה, התחלקות, מספר פלינדרומי, אלגברה, תבנית מספר, מספרים טבעיים, הוכחה, הוכחה באינדוקציה מתמטית, תנאי, סדרות, סדרה הנדסית, סכום סדרה הנדסית.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 34, תשס"ה 2005, עמוד 54-55.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

9, 99, 999, ... ומספרים פלינדרומיים

יפים כץ
מכללת לוינסקי

$$100a - 10a + 9b - a + a = 100a + \frac{9b - 11a}{\text{עשרות}} + a$$

↑ מאות
↑ אחדות

כדי שהביטוי $9b - 11a$ יתאים ליצג את ספרת העשרות יש לדרוש:

- א. שהוא יהיה חיובי
- ב. שהוא יתחלק בעשר.

כדי שהדרישה הראשונה תתקיים נדרוש כמובן $b > a$.
כך למעשה $b \geq 2$. לכן $9b$ הוא מספר דו-ספרתי.
המכפלה של a ב-11 היא בודאי מספר דו-ספרתי לכן ספרת האחדות שלו היא a . כדי שההפרש $9b - 11a$ יתחלק ב-10 עלינו לדאוג שספרת האחדות של המספר הדו-ספרתי $9b$ תהיה a . לצורך כך יש לבחון את הכפולות של 9:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 9 &= 9 \\ 2 \cdot 9 &= 18 \\ 3 \cdot 9 &= 27 \\ &\vdots \\ 9 \cdot 9 &= 81 \\ 10 \cdot 9 &= 90 \end{aligned}$$

ניתן להבחין בתופעה הבאה:

ספרת האחדות של המכפלה שווה למשלים של הכופל של 9 ל-10. לכן, כדי שההפרש המבוקש $9b - 11a$ יתחלק ב-10, יש לדרוש ש- b ו- a ישלימו זה את זה ל-10, כלומר:

$$10 = a + b$$

אפשר להמשיך את החקירה בשני כיוונים:

- א. על-ידי מעבר למספר תלת-ספרתי ובדיקת התנאים שיבטיחו כי המכפלה ב-9 תהיה פלינדרום.

מספר פלינדרומי¹ הוא מספר אשר אם נקרא אותו בסדר הפוך, נקבל מספר זהה לו, כך למשל 345543 הוא מספר פלינדרומי.

בעיה

מהו התנאי שיבטיח כי המכפלה של מספר טבעי במספרים, אשר כל ספרותיהם הן 9, תהיה מספר פלינדרומי?

פתרון

ברור כי אין משמעות לבדיקת המכפלה של מספר טבעי חד-ספרתי ב-9. כל המכפלות הללו אינן מספרים פלינדרומים.

נבחן את השאלה עבור מספר טבעי דו-ספרתי: נסמן את ספרת העשרות שלו ב- a ואת ספרת האחדות שלו ב- b . המספר הוא:

$$10a + b$$

אנו מעוניינים לבדוק מהו התנאי שיבטיח כי המכפלה:

$$9(10a + b)$$

תהיה מספר פלינדרומי.

אם המספר הדו-ספרתי הוא 11, אזי המכפלה שלו ב-9 הוא פלינדרום. לכל מספר הגדול מ-11 התוצאה היא מספר תלת-ספרתי. לכן ניצור בתבנית שלנו ספרת מאות:

$$90a + 9b = 100a - 10a + 9b$$

מכאן כבר ברור כי ספרת המאות של המכפלה היא a . על-כן כך יהיה גם ערכה של ספרת האחדות (כי המכפלה היא פלינדרום).

לכן נוכל לרשום:

¹ קלרה זיסקין התייחסה למספרים כאלה בנספח למאמרה: חיבורים מתמטיים של שני חכמי ספרד: אברהם בר-חייא ואברהם אבן עזרא, שהתפרסם בעל"ה 33 עמ' 12-22.

ב. על-ידי בדיקת התנאים שיבטיחו כי מכפלה של מספר דו-ספרתי ב-99 תהיה פלינדרום.

נבחר באפשרות השניה ונשאיר את האפשרות הראשונה לכם, הקוראים.

מכפלת מספר דו-ספרתי ב-99 תיוצג על-ידי התבנית הבאה:

$$(10a + b) \cdot 99 = 990a + 99b = 1000a - 10a + 100b - b$$

בדומה לכפל לעיל של מספר דו-ספרתי ב-9 עולה מכאן כי ספרת האלפים היא a , ולכן כך גם ספרת האחדות.

נרשום זאת:

$$\underbrace{1000a}_{\text{אלפים}} + 100b - 10a - b - a + \underbrace{a}_{\text{אחדות}}$$

כעת ננסה: אולי התנאי שמצאנו קודם יהיה טוב גם כאן. נציב:

$$a + b = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - a \\ \text{או} \\ a = 10 - b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1000a + 100b - 10(10 - b) - b - (10 - b) + a &= \\ = 1000a + 100b - 100 + 10b - b - 10 + b + a &= \\ \equiv \underbrace{1000a}_{\text{אלפים}} + 100\underbrace{(b-1)}_{\text{מאות}} + 10\underbrace{(b-1)}_{\text{עשרות}} + \underbrace{a}_{\text{אחדות}} \end{aligned}$$

וזה אכן מספר פלינדרומי.

תוכלו לבדוק האם תנאי זה הוא גם הכרחי. באופן כללי, נרצה כעת להראות, כי אם: $a + b = 10$, אזי המכפלה של המספר הדו-ספרתי $10a + b$ במספר הבנוי מ- n ספרות של 9 היא פלינדרום.

נפתח מכפלה זו ונעזר בעובדה הבאה:

$$10^n = 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \dots + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 1 + 1$$

הצגת הביטוי 10^n בעזרת הסכום נעשית כמובן בעזרת הנוסחה לסכום של סדרה הנדסית.

$$\begin{aligned} (10a + b)(10^n - 1) &= 10^{n+1}a + b \cdot 10^n - 10a - b = \\ &= 10^{n+1}a + 10^n b - 10^n + 10^n - 10(10 - b) - (10 - a) = \\ &= 10^{n+1}a + 10^n(b - 1) + 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \dots + \\ &9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 10 - 100 + 10b - 10 + a = \\ &= 10^{n+1}a + 10^n(b - 1) + 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \dots + \\ &9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 10(b - 1) + a \end{aligned}$$

וזהו מספר פלינדרומי!

- האם נחוצה הוכחה נוספת? (בודאי שלא. ההוכחה שהוצגה כאן נכונה לכל מספר טבעי n ולכל שני מספרים טבעיים אשר סכומם 10).
- האם צריך להוסיף מבנה של אינדוקציה מתמטית להוכחה של הטענה? (בודאי שלא. התהליך מראה כי מכפלה של כל מספר דו-ספרתי בכל מספר טבעי שכל ספרותיו הן 9 היא מספר פלינדרומי. אין בתהליך מעבר ממספר הכתוב בעזרת k ספרות של 9 למספר הכתוב בעזרת $k + 1$ ספרות של 9).
- התוכלו להוכיח את הטענה באינדוקציה מתמטית?
- מהו היתרון של ההוכחה באינדוקציה מתמטית על-פני ההוכחה שהוצגה כאן?
- התוכלו להרחיב את הטענה עבור מספרים תלת-ספרתיים?

"אָבִי אֵל חַי שְׁמֵךְ לְמָה מֶלֶךְ מְשִׁיחַ לֹא יָבֵא?"

רבי אברהם אבן עזרא 1089-1167