



הנושא: טרנספורמציות, חבורות וסימטריה או מהו סוד הסדרה: 7, 17, 230, 4783...

הוכן ע"י: נצה מובשוביץ-הדר.

תקציר: במאמר חקירה מתמטית של קישוטי פס, קישוטים במישור או קישוטים תלת ממדיים בעלי חוקיות דומה. החקירה המתמטית מתמקדת בבחינת הטרנספורמציות – העתקות שנעשות על צורות בסיסיות היוצרות את הקישוטים. מכאן מתגלה קשר הדוק למושג החבורה ונוצרת סדרת מספרים מעניינת, אשר גילוי האיבר הבא שלה אינו משימה קלה.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 35, חקירה מתמטית, קישוטים, קישוטי-פס, טרנספורמציה, העתקה, סימטריה, איזומטריה, העתקה צפידה, הזזה, שיקוף, סיבוב, החלקה, הוכחה, חבורה, סגירות, כללי.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 35, תשס"ו 2005, עמודים 56-68.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 13 עמודים.



צימוקים

טרנספורמציות, חבורות וסימטריה או מהו סוד הסדרה: 7, 17, 230, 4783...

נצה מובשוביץ-הדר

nitsa@tx.technion.ac.il

"קשר חס", מוסד הטכניון למחקר ופיתוח
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

(קבוצת התמונות) של T .

$$\text{Range}(T) = T(D) = \{T(x) : x \in D\}$$

שמות נרדפים לטרנספורמציה הם: פונקציה, מיפוי, העתקה.

• מהי טרנספורמציה אוקלידית?

טרנספורמציה היא העתקה חד-חד-ערכית (פונקציה הפיכה). טרנספורמציה אוקלידית היא העתקה חד-חד-ערכית של המישור על עצמו. בטרנספורמציה אוקלידית כל נקודה במישור מועתקת אל נקודה אחת ויחידה, ולכל נקודה יש מקור אחד ויחיד. למשל: כיווץ, מתיחה, עיוות של המישור הן טרנספורמציות אוקלידיות. יש גם טרנספורמציות אוקלידיות "קשיחות", למשל: הזזה, סיבוב. הן נקראות: איזומטריות, (בעברית: שומרות מרחק).

• מהי איזומטריה?

איזומטריה היא טרנספורמציה אוקלידית שומרת מרחק. כלומר אם המרחק בין הנקודות p ו- q הוא r , אז המרחק בין תמונותיהן $T(p)$ ו- $T(q)$ גם הוא r , או במילים אחרות אם q נמצאת על היקפו של מעגל ברדיוס r שמרכזו p , אז $T(q)$ נמצאת על היקפו של מעגל ברדיוס r שמרכזו $T(p)$. לפיכך איזומטריה אינה משנה את מידותיהן של צורות מישוריות, אלא רק את מיקומן במישור או את הכיוונית (אוריינטציה) שלהן.

שמות נרדפים לאיזומטריות הם: טרנספורמציות חפיפה (Congruence transformations); תנועות צפידות/קשיחות (Rigid motions).

אחד מגדולי המתמטיקאים של המאה העשרים, הרמן ווייל (Hermann Klaus Hugo Weyl 1885-1955) כתב בספרו *Symmetry*:

"The art of ornament contains in implicit form, the oldest piece of higher mathematics known to us"

אומנות הקישוט שאליה מתייחס הרמן ווייל בדבריו המצוטטים לעיל והמתמטיקה שמסתתרת מאחוריה, הם מוקדי העניין במאמר זה.¹

המאמר מכיל שלושה פרקים:

א. קישוטים לאורך פס – והמספר 7.

ב. הרחבה למישור ולמרחב והמספרים 17, 230 בהתאמה.

ג. 7, 17, 230, ומה הלאה? – ניסיונות להכללה. קודם לשלושתם הרקע המתמטי הנחוץ להבנתם.

רקע מתמטי: טרנספורמציות, חבורות וסימטריה

• מהי טרנספורמציה?

טרנספורמציה T מעל תחום D היא העתקה של כל איבר השייך ל- D אל איבר אחד ויחיד השייך לטווח

¹ מאמר זה מוקדש לפרופ' ש. אביטל ז"ל (1915-2001). הוא נכתב בעקבות הרצאה במסגרת אירוע חלוקת פרסים על שמו למורים מצטיינים למתמטיקה, בפתחת הכנס השנתי המשותף של האיגוד לקידום החינוך המתמטי ו"קשר-חס" – המרכז הארצי לקידום, שיפור ורענון החינוך המתמטי בישראל, תל-אביב, ח' ניסן תשס"ה, 17 באפריל 2005. מהדורה משופרת הוצגה בבי"ס קיץ "קישורים והקשרים" מטעם "קשר חס", אוגוסט 2005.

הגיאומטריקן הידוע קוקסטר שנפטר לא מזמן (Harold Scott MacDonald Coxeter, 1907-2003) השתמש בספרו (עם גרייצר: Coxeter & Greitzer, 1967) בהגדרת המושג חפיפה על-ידי שימוש באיזומטריה כך: שתי צורות במישור הן חופפות אם ורק אם קיימת איזומטריה המעתיקה את האחת על השנייה.

שלושה משפטים מבססים את התכונות הבסיסיות של איזומטריות, בהן נשתמש במפורש או במובלע בהמשך: **משפט א** – אם הנקודה B נמצאת בין A ל- C (A שונה מ- C ו- B נמצאת בקטע הפתוח AC) אז גם תמונתה של B נמצאת בין תמונותיהן של A ו- C , ולהיפך. במלים אחרות האיזומטריה שומרת על יחס הביניים בשני הכוונים.

משפט ב – הנקודות A, B, C נמצאות על קו ישר, אם ורק אם תמונותיהן נמצאות על קו ישר. במלים אחרות איזומטריה מעתיקה את הישר AB על הישר המחבר את תמונותיהן של A, B .

משפט ג – לנקודות A, B שונות, הנקודות C ו- D נמצאות באותו צד של הישר AB , אם ורק אם תמונותיהן נמצאות באותו צד של הישר העובר בין תמונותיהן של A, B . הוכחת המשפטים האלה יכולה להוות תרגיל מעניין.

בין שתי איזומטריות T_1, T_2 כמו בין כל שתי פונקציות, מגדירים פעולה בינארית הנקראת צירוף, כביצוע של השנייה על תמונותיה של הראשונה. היינו, אם נשתמש בכוכבית כסימן הפעולה, ונסמן את הצירוף של T_1 ו- T_2 ב- $T_1 * T_2$ אז לכל נקודה p במישור:

$$(T_1 * T_2)(p) = T_1(T_2(p))$$

מעצם ההגדרה של איזומטריה כטרנספורמציה אוקלידית השומרת מרחק עולה כי הצירוף של כל שתי איזומטריות הוא איזומטריה. במילים אחרות: קבוצת האיזומטריות סגורה ביחס לפעולת הצירוף.

• כמה איזומטריות קיימות ואילו הן?

האיזומטריות המוכרות ביותר הן הזזות, סיבובים ושיקופים בישר. (מומלץ להמשיך את הקריאה עם נייר ועפרון ביד ולעשות ניסיונות להמחשה והבהרה של הדברים על ידי שרטוט סקיצות).

טבעה של הזזה נקבע על פי וקטור ההזזה, כלומר על פי גודל ההזזה וכיוונה. מובן מאליה שקבוצת ההזזות במישור היא אינסופית שהרי יש אינסוף אפשרויות

לוקטורי הזזה. הצירוף של כל שתי הזזות הוא הזזה (בווקטור המהווה סכום הוקטורים של שתי ההזזות) ואנו יכולים לומר בוודאות שקבוצת ההזזות במישור סגורה ביחס לפעולת הצירוף.

טבעו של סיבוב נקבע על פי נקודה במישור המהווה את מרכז הסיבוב ועל פי מידת הסיבוב (במעלות, בחלקי סיבוב או ברדיאנים). גם קבוצת הסיבובים היא אינסופית, כמובן. יחד עם זאת, קל להבין, שביצוע שני סיבובים של המישור בזה אחר זה סביב אותו מרכז, שקול לסיבוב סביב המרכז המשותף, שמידתו היא סכום מידות הסיבוב של שני הסיבובים. ואם שני הסיבובים הם לא סביב אותו מרכז? – אז מתברר שהתוצאה היא סיבוב או הזזה. הקוראים מוזמנים לתאר שיטה למציאת מקומו של מרכז הסיבוב הנוצר מצירוף כזה ולחשב את מידתו, או לחילופין לבחון את ההזזה המתקבלת. על כל פנים קבוצת הסיבובים וההזזות סגורה ביחס לפעולת הצירוף. במלים אחרות צירוף של שני סיבובים אינו מייצר איזומטריה חדשה.

טבעו של שיקוף נקבע על פי מיקומו במישור של ישר השיקוף. האם קבוצת השיקופים גם היא אינסופית כמו ההזזות והסיבובים? – כמובן. האם היא סגורה ביחס לפעולת הצירוף? – נבדוק. מהי תוצאת הצירוף של שני שיקופים בשני קוים מקבילים? – הזזה. ומהי תוצאת הצירוף של שני שיקופים בשני קוים נחתכים? – סיבוב. ובכן, הצירוף של שני שיקופים, אף פעם איננו שיקוף. קבוצת השיקופים איננה סגורה ביחס לפעולת הצירוף! פעולת הצירוף של שיקופים "זורקת" אותנו אל איזומטריות שאינן שיקופים.

כעת נבדוק האם קבוצת האיזומטריות המוכרות – הזזות, סיבובים ושיקופים, סגורה ביחס לפעולת הצירוף, כלומר האם הצירוף של כל שתי מהאיזומטריות המוכרות הללו היא איזומטריה מוכרת, או שמא פעולת הצירוף של שתי איזומטריות מוכרות "זורקת" אותנו אל איזומטריות בלתי מוכרות. – מהי תוצאת הצירוף של הזזה ואחריה סיבוב? – סיבוב (אחר, בדרך כלל).

– מהי תוצאת הצירוף של סיבוב ואחריו שיקוף? – שיקוף (בישר אחר, מן הסתם).

– מהי תוצאת הצירוף של הזזה ואחריה שיקוף??? – כאן אנחנו בבעיה! הצירוף הזה איננו הזזה, איננו

שיקוף ואיננו סיבוב! הצירוף הזה מביא אותנו להיכרות עם איזומטריה אחרת שנקראת "החלקה" (בלועזית: Glide reflection)².

האם בכך מיצינו את האיזומטריות למיניהן או שמא מחכות לנו עוד הפתעות כשנבצע צירוף של החלקה עם הזזה, סיבוב או שיקוף? די קל לבדוק שהקבוצה (האינסופית) של איחוד ארבע הקבוצות הנזכרות, סגורה ביחס לפעולת הצירוף. אבל עדיין שאלת הקיום של עוד איזומטריות טעונה בדיקה. שהרי הסגירות לגבי פעולת הצירוף אין בה כדי להבטיח שאין איזומטריות נוספות!

משפט: יש בדיוק 4 משפחות (אינסופיות) של איזומטריות במישור האוקלידי:

- הזזות Translations
 - סיבובים Rotations
 - שיקופים Reflections
 - והחלקות Glide Reflection
- אין במישור איזומטריות אחרות.

לפני שניגש להוכחת המשפט, ננסח את הטענה קצת אחרת:

כל העתקה צפידה (איזומטריה) של המישור על עצמו, פרט להעתקת הזהות, שייכת לאחד משלושת הסוגים הבאים ורק אליו:

- א. הזזה מקבילה במישור בווקטור בעל כיוון מסוים וגודל מסוים;
- ב. סיבוב בזווית מסוימת סביב נקודה קבועה במישור;
- ג. שיקוף ביחס לישר במישור והזזה בוקטור בעל גודל מסוים במקביל לישר השיקוף.

הוכחה: כדי להוכיח את המשפט נשיב על סדרת שאלות (מומלץ להתמודד עם פתרון כל שאלה לפני קריאת התשובה)³. שתי השאלות הראשונות עוסקות בהבהרת הנוסח האחרון של הטענה. בשאלה 3 נראה שאם מרחקיהן של שתי נקודות שונות D_1, D_2 שווים הן מנקודה A והן מנקודה B אז הן סימטריות זו לזו ביחס

² יש המתרגמים את השם הלועזי Glide reflection לשיקוף-החלקה או החלקת-שיקוף, נעדיף כאן את השם המקוצר "החלקה".

³ בידועין נעשה שימוש אקראי במונחים השקולים: העתקה איזומטרית, העתקה צפידה, טרנספורמציה קשיחה, איזומטריה, העתקה קשיחה, טרנספורמציה איזומטרית וכד'.

לישר AB . מכאן נגיע בתשובה לשאלה 5 למסקנה שלא ייתכנו שתי איזומטריות שונות אשר תמונותיהן מתלכדות על שלוש נקודות שאינן על ישר אחד.

בהסתמך על כך, נמצא בתשובה לשאלה 6 כי יש לכל היותר שתי העתקות איזומטריות שונות המעתיקות שתי נקודות שונות לאותן שתי תמונות בהתאמה. ועל סמך זה בשאלה 8 נגיע לכך שלא קיימת העתקה צפידה במישור שאיננה ניתנת לסיווג כשייכת לאחד משלושת הסוגים הנזכרים. שאלות 4, 7 אינן הכרחיות למהלך ההוכחה אבל יש בהן עניין ולכן הן משולבות כאן. **שאלה 1:** מדוע מופיע בנוסח המשפט סייג לגבי העתקת הזהות? האם הוא נחוץ?

פתרון: תהי T העתקה צפידה כלשהי של המישור על עצמו. לכל נקודה A נסמן ב- A' את תמונתה: $T(A)$. (יובן מכאן כי $A' = T(A)$).

העתקת הזהות מתאפיינת בכך שלכל נקודה A במישור קיים $A' = A$. העתקת הזהות שייכת גם לסוג א וגם לסוג ב, לכן ההכללה של שייכות לאחד ורק אחד מהסוגים חלה עליה רק באופן חלקי; היא כן שייכת לאחד הסוגים (לפחות), אבל לא לסוג אחד בלבד אלא לשניים. העתקת הזהות היא הזזה מקבילה בווקטור בגודל 0 והיא גם סיבוב בזווית 0 סביב נקודה קבועה במישור.

שאלה 2: מקובל לומר שיש 4 משפחות אינסופיות של העתקות שומרות מרחק: הזזות, סיבובים, שיקופים והחלקות. (החלקה היא צירוף של שיקוף (בישר) והזזה). האם יש סתירה בין האמור כאן לבין טענת המשפט?

פתרון: יש זהות מלאה בין ארבע המשפחות לבין שלושת הסוגים הנזכרים במשפט. אין סתירה כי הסוג שכביכול חסר בנוסח המשפט, שהוא שיקופים, נכלל בתוך סוג ג כשווקטור ההזזה הוא בגודל 0.

שאלה 3: תהיינה A, B נקודות שונות זו מזו. תהיינה D_1, D_2 נקודות שעבורן מתקיים:

$$BD_1 = BD_2; AD_1 = AD_2$$

מה ניתן לומר על D_1, D_2 ?

(רמז: יש רק שתי אפשרויות. מהן?)

פתרון: בתנאים האמורים ניתן לומר על D_1, D_2 שהן מתלכדות $D_1 = D_2$ או שהן שתי נקודות סימטריות זו לזו ביחס לישר AB . (שתי נקודות הן סימטריות זו לזו ביחס לישר במישור, אם ורק אם הישר מהווה אנך אמצעי לקטע המחבר אותן. במילים אחרות הן נמצאות משני עברי הישר ומרחקיהן מהישר שווים).

שאלה 4: תהינה A, B נקודות שונות זו מזו, הנמצאות באותו צד של ישר l במישור. תהי C הנקודה הסימטרית ל- B ביחס לישר l . מה אפשר לומר על היחס בין AB ל- AC ?

פתרון: בתנאים האמורים $AC > AB$. כל נקודה בחצי המישור שבו נמצאת B , מרחקה מ- B קטן יותר ממרחקה מהנקודה הסימטרית ל- B , הנמצאת מעברו השני של הישר.

שאלה 5: תהינה A, B, C שלוש נקודות שאינן על ישר אחד ותהי T איזומטריה המעתיקה את A, B, C ל- A', B', C' בהתאמה. האם ייתכן שקיימת איזומטריה שונה מ- T שגם היא מעתיקה את A, B, C ל- A', B', C' בהתאמה?

פתרון: לא ייתכנו שתי איזומטריות שונות אשר תמונותיהן מתלכדות על שלוש נקודות שאינן על ישר אחד.

תהי S איזומטריה כלשהי המעתיקה את A, B, C אל: A', B', C' בהתאמה. תהי D נקודה כלשהי במישור נסמן את $S(D)$ ב- D^* . עלינו להוכיח כי לכל נקודה D במישור קיים $D^* = D'$ כאשר $D' = T(D)$. תחילה נטפל במקרה בו D נמצאת על הישר AB .

לפי משפט ב, D^* ו- D' שתיהן על הישר $A'B'$, וכיוון ש- T ו- S הן איזומטריות, המרחקים של D' ו- D^* מ- A' ו- B' שווים בהתאמה. על ישר יש לכל היותר נקודה אחת עם מרחקים נתונים משתי נקודות שונות על הישר (מדוע?) לכן $D^* = D'$.

כעת נדון במקרה בו D אינה על הישר AB . במקרה זה, לפי משפט ב, גם D' וגם D^* אינן על הישר $A'B'$ וקיים $D^*A' = DA = D'A'$ ו- $D^*B' = DB = D'B'$. לפי שאלה 3 $D^* = D'$ או ש- D^* ו- D' הן נקודות סימטריות ביחס לישר $A'B'$, ונראה שהאפשרות השנייה אינה קיימת. אמצע הקטע D^*D' נמצא על הישר $A'B'$, לכן הנקודות D' ו- D^* הן בצדדים שונים של ישר זה. אם D נמצאת באותו צד של הישר AB כמו C אז, לפי משפט ג, D' ו- D^* נמצאות באותו צד של הישר $A'B'$ כמו C' , בסתירה למה שאמרנו. אם D נמצאת בצד של הישר AB הנגדי לצד של C אז, לפי משפט ג, D' ו- D^* נמצאות בצד של הישר $A'B'$ הנגדי לצד של C' , בסתירה למה שאמרנו, ולכן שתיהן באותו צד של הישר $A'B'$, בסתירה למה שאמרנו.

מכאן נובע שלכל נקודה D תמונותיה על ידי S ו- T מתלכדות. מ.ש.ל.

שאלה 6: תהינה A, B נקודות שונות זו מזו ותהינה A', B' תמונותיהן של A, B בהתאמה ע"י איזומטריה T . יש להוכיח כי קיימת לכל היותר עוד העתקה איזומטרית אחת של המישור על עצמו, שונה מ- T , המעתיקה את A, B ל- A', B' בהתאמה. במלים אחרות יש לכל היותר שתי העתקות איזומטריות שונות המעתיקות שתי נקודות שונות לאותן תמונות בהתאמה.

פתרון: אם קיימת איזומטריה T^* שונה מ- T שמעתיקה את A, B ל- A', B' בהתאמה, אזי לפי התשובה לשאלה 5, לכל נקודה שלישית C שאינה על הישר AB . במישור, קיים: $T(C) \neq T^*(C)$.

מהתשובה לשאלה 3 נובע ש- $T(C)$ סימטרית ל- $T^*(C)$ ביחס לישר AB .

אם קיימת איזומטריה T^{**} שונה מ- T שמעתיקה את A, B ל- A', B' בהתאמה, אזי לכל נקודה שלישית במישור תמונתה מקיימת: $T(C) \neq T^{**}(C)$.

מהתשובה לשאלה 3 נובע ש- $T(C)$ סימטרית ל- $T^{**}(C)$ ביחס לישר AB .

מכאן שהיא בהכרח מתלכדת עם התמונה של T^* ועל כן $T^*(C) = T^{**}(C)$. מ.ש.ל.

שאלה 7: בכל העתקה צפידה, יש קבוצה L של קווים ישרים שמועתיקים על עצמם. מהו הרכב הקבוצה הזאת בכל אחד מהמקרים הבאים:

- בהעתקת הזהות? – בהעתקת זו כל הקווים הישרים נכללים ב- L .
- בהזזה מקבילה? – L היא קבוצת הישרים בכיוון ההזזה.
- בסיבוב של 180° סביב נקודה A ? – L מכילה את כל הישרים העוברים דרך A .
- בסיבוב אחר שבין 0° ל- 360° סביב אותה נקודה? – הקבוצה L ריקה.
- בשיקוף (ללא הזזה)? – L מכילה את ציר השיקוף ואת כל הישרים הניצבים לו.
- בהחלקה (צירוף של שיקוף והזזה $0 < \theta$)? – L מכילה רק את ציר השיקוף.
- האם הקבוצה L שזיהית בתשובותיך לעיל מיוחדת ושונה לכל העתקה צפידה מהסוגים שמנינו? – אכן כן.

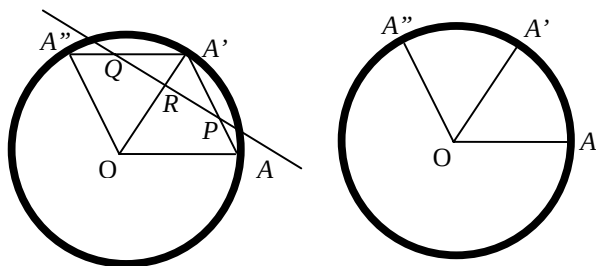
שאלה 8: ניגש כעת להוכחת המשפט הטוען, כאמור, שכל ההעתקות הצפידות במישור הן מאחד משלושת

התשובה לשאלה 6, נובע מכאן ש- T היא או T_1 או T_2 כלומר היא שייכת לאחד משלושת הסוגים. מ.ש.ל. למקרה ב.

רמזים למקרה ג: נסמן ב- O את מרכז המעגל החוסם של המשולש $AA'A''$.

שאלה: האם A ו- A'' נמצאות באותו צד של הישר $A'O$? (להזכירך: $AA' = A'A''$).

פתרון: התשובה היא לא. A ו- A'' לא נמצאות באותו צד של הישר $A'O$. במקרה שלפנינו שלוש הנקודות A, A', A'' הן שלוש נקודות שונות שאינן על ישר אחד. כיוון ש- $AA' = A'A''$ נכון גם ש- $\angle A'OA = \angle A'OA''$. (ר' שרטוט להלן) אילו A ו- A'' היו נמצאות באותו צד של הישר $A'O$, היו הקרניים AO ו- $A''O$ מתלכדות וכך גם הנקודות A ו- A'' בניגוד להנחה.



נסה גם למקרה זה כמו לשני קודמיו לבנות שתי העתקות שונות אשר מעתיקות את A ל- A' ואת A' ל- A'' . יהיו:

P אמצע הקטע AA' ;
 Q אמצע הקטע $A'A''$;
הרדיוס OA' ניצב למיתר AA'' ולכן גם ל- PQ שהוא קו האמצעים במשולש $AA'A''$;
 AS אנך מ- A על PQ .

שאלה: מהו סדר הנקודות P, Q, R, S על הישר PQ ?
פתרון: סדר הנקודות (ר' שרטוט להלן) הוא: Q, R, P, S . ההוכחה לכך די קלה ולא מובאת כאן בפרוטרוט.

יהי $A''E$ הגובה מ- A'' במשולש $PA''Q$;
שאלה: מהו סדר הנקודות P, Q, R, S, E על הישר PQ ?
פתרון: סדר הנקודות (ר' שרטוט להלן) הוא: E, Q, R, P, S . ההוכחה לכך די קלה ולא מובאת כאן בפרוטרוט. תהי T_1 סיבוב של המישור סביב O בזווית $\angle AOA'$ בכיוון מ- A ל- A' .

תהי T_2 הזזה של המישור בווקטור $\vec{RE} = \vec{SR}$ בצירוף עם שיקוף בישר PQ . (שוויון הקטעים הללו מתקבל על ידי חפיפת משולשים).

הסוגים הנזכרים בנוסח המשפט, כלומר שלא קיימת העתקה צפידה במישור שאיננה ניתנת לסיווג כשייכת לאחד משלושת הסוגים הנזכרים.

תהי T העתקה צפידה כלשהי של המישור על עצמו. לכל נקודה A נסמן ב- A' את תמונתה: $T(A)$. (ניבן מכאן כי $A'' = T(A')$). היות והוצאנו את העתקת הזהות מהדיון (ר' שאלה 1), הרי שלא לכל נקודה A , $A' = A$. לפיכך קיימת נקודה A , כך ש- $A' \neq A$.

נחלק את הדיון לשלושה מקרים:

- $A' = A$;
- A' נמצאת על הישר AA' בצד של A' הנגדי לצד של A ;
- A' איננה על הישר AA' .

שאלה: האם המקרים האלה ממצים את כל האפשרויות?

פתרון: כן. מקרים ב ו-ג מכסים את כל האפשרויות שבהן $A' \neq A$. מכיוון ש- T היא טרנספורמציה צפידה, המרחק בין A ל- A' שווה למרחק בין תמונותיהן היינו $AA' = A'A''$ ומאותן סיבות גם $A' \neq A''$. אם נמצאת על הישר AA' , אז או ש- $A' = A$ או ש- A' נמצאת בצד אחר של A' מאשר A . האפשרות הנותרת היא ש- A' איננה על הישר AA' .

ובכן – לעבודה, כיצד ניתן להוכיח כל אחד מהמקרים? – ניתן רמז לכל מקרה. מקרה ג הוא הקשה מכולם. לו ניתן שורת רמזים.

רמז למקרה א: תהי T_1 סיבוב המישור ב- 180° סביב אמצע הקטע AA' ותהי T_2 השיקוף של המישור ביחס לאנך האמצעי של הקטע AA' .

שאלה: בהסתמך על התשובה לשאלה 6, מה נובע מכאן לגבי T ?

פתרון: $T_1 \neq T_2$ ושתיהן מעתיקות את A ואת A' ל- A' ול- A בהתאמה. בהסתמך על התשובה לשאלה 6, נובע מכאן ש- T היא או T_1 או T_2 כלומר היא שייכת לאחד משלושת הסוגים. מ.ש.ל. למקרה א.

רמז למקרה ב: אם T_1 היא הזזה מקבילה של המישור בווקטור AA' , ו- T_2 היא אותה הזזה בצירוף עם שיקוף ביחס לישר AA' .

שאלה: בהסתמך על התשובה לשאלה 6, מה נובע מכאן לגבי T ?

פתרון: $T_1 \neq T_2$ ושתיהן מעתיקות את A ואת A' ל- A' ול- A בהתאמה, שכן A' במקרה שלפנינו נמצאת על הישר AA' בצד של A' הנגדי לצד של A . בהסתמך על

עם תמונתה, אחרי שמבצעים עליה איזומטריה כלשהי – הזזה, סיבוב, החלקה, או שיקוף. כך למשל, לריבוע יש שמונה סימטריות – ארבע סימטריות של סיבוב (90, 180, 270 ו-360 מעלות) וארבע סימטריות של שיקוף (בשני האלכסונים ובשני קטעי האמצעים). אין הזזות ואין החלקות שמביאות להתלכדותו של ריבוע עם תמונתו.

בפרק הבא נתמקד בסימטריות שיש או יכולות להיות לקישוטי-פס.

פרק א: קישוטים לאורך פס – Frieze Design

• איפה מוצאים קישוטי-פס?

אם תתבוננו סביבכם תמצאו קישוטי-פס רבים: במסגרות של תמונות, על גבי סימניות וכריכות ספרים, מעטפות של תקליטים ותקליטורים, בהשחלת מחרוזות, על כרכובי משקופים, מעקות ברזל ועמודים דקורטיביים, באמרות של מפות, מעשי-רקמה ואריגת שטיחים, בריקועי מתכת, על גבי כלי-אוכל, כדים וכלי חרס, בסידורי פרחים במדשאות ועוד ועוד -

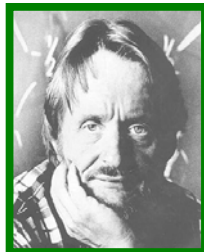
• מהי ההגדרה של "פס"? ושל "קישוט-פס"?

המרכיב העיקרי של קישוט-פס הוא דפוס מסוים שחוזר על עצמו ללא חיפוי, לאורך פס, והפס מתלכד עם תמונתו תחת איזומטריות מסוימות. לא נתייחס לקישוטי פס שאין להם כל סימטריה. כמה קישוטי-פס (סימטריים) שונים אפשר ליצור? – כיד הדמיון הטובה על האומן היוצר את הדפוס החוזר. ובכל זאת – האם יש חוקיות וסדר בדברים? – זאת כבר שאלה של מתמטיקאי.

• מה שואל מתמטיקאי?

- מה משותף לכל קישוטי-הפס ומהם ההבדלים ביניהם?
- כמה אפשרויות שונות קיימות ליצירתם?
- האם יש ערך שימושי לתשובות על שאלות אלה?
- האם התשובות ניתנות להרחבה? להכללה?
- איזה שאלות חדשות נובעות מהתוצאות?

• הסימון של קונוויי לקישוטי-פס



המתמטיקאי ג'ון הורטון קונוויי (John H. Conway) נולד בליברפול שבאנגליה בשנת 1937 וכיום הוא פרופסור למתמטיקה

שאלה: מה אפשר לומר על שתי האיזומטריות האלו: לאן הן מעתיקות את A ואת A' ? מה משתמע מכך לגבי T ? (כמובן שאפשר ורצוי מאד להיעזר בשרטוט).

פתרון: $T_1 \neq T_2$ (מדוע?) ושתיהן מעתיקות את A ואת A' ל- A' ול- A'' בהתאמה, בהסתמך על התשובה לשאלה 6, נובע מכאן ש- T היא או T_1 או T_2 כלומר היא שייכת לאחד משלושת הסוגים. מ.ש.ל. למקרה ג.

מסקנה: משלושת המקרים וממהלך ההוכחה בשלמותה נובע שהמשפט הוכח, ואין במישור אלא ארבע קבוצות של איזומטריות: הזזות, סיבובים, שיקופים והחלקות. זאת ועוד, קבוצת האיזומטריות סגורה ביחס לפעולת הצירוף. יתרה מזאת – קבוצת הטרנספורמציות האיזומטריות במישור האוקלידי עם פעולת הצירוף מהוות חבורה. (מומלץ לנסות להוכיח זאת).⁴

מן הראוי לשים לב לכך שההזזות וההחלקות אינן מותירות אף נקודה אחת במקומה. ואילו הסיבובים והשיקופים יש להם 'נקודות שִׁבְת' – נקודות שמתלכדות עם תמונתיהן. לכל סיבוב יש בדיוק נקודה אחת כזאת – היא מרכז הסיבוב, ולכל שיקוף יש ישר שלם שכל הנקודות שעליו נשארות במקומן אחרי השיקוף, זהו הישר שמהווה את ציר השיקוף. ההזזות והסיבובים שומרים על הכיווניות (אוריינטציה) של הצורה, ואילו השיקופים וההחלקות הופכים את הכיווניות (אוריינטציה), כך למשל צד שמאל של המקור הופך לימין של התמונה וצד ימין של המקור הופך לשמאל של התמונה.

• לבסוף, מהי סימטריה?

לפני שנעבור אל הפרק העוסק בקישוטים לאורך פס, עלינו לעסוק עוד בסוגיה אחת חשובה – מהי סימטריה? מקובל לומר על צורה שמתלכדת עם תמונתה אחרי שמבצעים עליה שיקוף ש"לצורה יש סימטריה". נרחיב את המושג סימטריה להתלכדות לא רק ע"י שיקוף. נאמר שלצורה יש סימטריה, אם ורק אם היא מתלכדת

⁴ תזכורת: חבורה היא קבוצה עם פעולה המוגדרת היטב בין כל שניים מאיבריה, והיא סגורה ביחס לפעולה, כלומר לכל שני איברים בקבוצה, תוצאת הפעולה גם היא איבר בקבוצה. על הפעולה חל חוק הקיבוץ. בנוסף לכך קיים בקבוצה איבר אחד, ורק אחד, שתוצאת הפעולה שלו עם כל איבר בקבוצה בכל סדר, מתלכדת עם האחרון. איבר אחד ויחיד זה נקרא האיבר הניטרלי, או האדיש. כמו כן לכל איבר בקבוצה קיים בן זוג אחד, ורק אחד, שאם מפעילים עליהם את הפעולה, לא חשוב באיזה סדר, מתקבל האיבר האדיש. בני הזוג נקראים איברים נגדיים או הופכיים זה לזה.

- H שיקוף דרך הקו האופקי $y = 0$: לכל נקודה $H(x, y) = (x, -y)$ במישור:

- G_a החלקה אופקית: לכל נקודה (x, y) במישור $G_a(x, y) = (x + a, -y)$

- V_p שיקוף בקו ניצב לקו האופקי העובר דרך $(p, 0)$: לכל נקודה (x, y) במישור:

$$V_p(x, y) = (2p - x, y)$$

- R_m סיבוב של 180° סביב הנקודה $(m, 0)$: לכל נקודה (x, y) במישור: $R_m(x, y) = (2m - x, -y)$

כאמור $T_0 = I$. יצוין גם כי: $G_0 = H$ וכל הפרמטרים הם מספרים ממשיים.

אלו הן חמש האיזומטריות המהוות סימטריות של פס, ארבע מהן מהוות, כל אחת כשלעצמה, קבוצה אינסופית, כפי שמעידים הפרמטרים המציינים את סמליהן!

ב. יש שבע אפשרויות ליצור מתוך חמש האיזומטריות הללו תת-קבוצות (על-ידי בחירה של אחת מהן, שתיים מתוכן, שלוש, ארבע או כל החמש), כך שתת-הקבוצה המתקבלת סגורה (בעצמה) ביחס לפעולת הצירוף ומהווה חבורה (תת-חבורה של חבורת האיזומטריות במישור).

כדי להשתכנע בכך נתבונן ב'לוח-הצירוף' (מלשון לוח-הכפל) של הקבוצה המכילה את כל חמש האיזומטריות האורכיות (טבלה 1). לוח זה נקרא טבלת קיילי על שמו של אחד המתמטיקאים שהרבה לעסוק בתחום זה. נבחן את תכונות החבורה הנראות בטבלה:

1. קל לראות (איך?) שזוהי קבוצה סגורה ביחס לפעולת הצירוף.
2. הזזת האפס I , שהיא איבר הזהות או ה'אדיש' של חבורת האיזומטריות כולה, נכללת בתת-הקבוצה הנדונה, ואכן רואים שהשורה הראשונה והטור הראשון של לוח-הצירוף מתלכדים עם שורת השוליים וטור השוליים בהתאמה.
3. באלכסון הראשי, העובר מהקדקוד השמאלי למעלה אל הקדקוד הימני למטה, כל האיברים הם הזזות ובבחינה נבונה של הפרמטרים, הם כולם הזזת האפס. לכן נכון לקבוע שלכל איבר יש איבר הופכי אחד ורק אחד שצירופם נותן את הזזת האפס.
4. היות וזוהי תת-קבוצה של האיזומטריות ולעיל כבר הבהרנו שהאיזומטריות כולן מהוות חבורה,

באוניברסיטת פרינסטון שבניו ג'רזי.⁵

האיש עטור פרסים על יצירה מתמטית, פורה במיוחד בתחום החבורות הסופיות, תורת הקשרים, תורת המשחקים, ותורת הקודים. הוא נודע בין היתר כממציא המשחקים 'נבטים' ו'חיים', ניתח את 'קובית סומא' ועוד. קונוויי ידוע גם כמורה ססגוני. כך כשהוא מלמד את הנושא קישוט-פס הוא נוהג לחלוץ את נעליו, לשים אותן על כפות הידיים וליצור על הלוח את הדפוסים השונים, תוך שהוא נותן להם שמות מתאימים, הנה כך בערך:

1. ניתור (hop)



2. ניתור סיבובי (spinning hop)



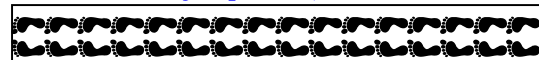
3. צעידה צידית (sidle)



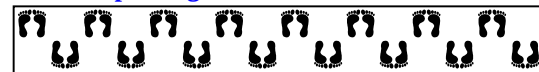
4. צעידה (Step)



5. קפיצה (jump)



6. צידוד סיבובי (spinning sidle)



7. קפיצה סיבובית (spinning jump)



סה"כ 7 טיפוסים של קישוטי-פס!

ההוכחה שאלו הן כל האפשרויות, ואין אחרות, נשענת על שני טיעונים:

א. קיימות חמש קבוצות של איזומטריות "אורכיות" כלומר איזומטריות שעם הפעלתן מתלכד פס אינסופי עם תמונתו:

- T_a הזזה אופקית: לכל נקודה (x, y) במישור $T_a(x, y) = (x + a, y)$

אם $a = 0$ מתקבלת איזומטריית הזהות I : לכל

נקודה (x, y) במישור: $I(x, y) = (x, y)$

⁵ פרטים נוספים על קונוויי אפשר למצוא באתר:

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Conway.html>

אנו פטורים מלבדוק כאן את תכונת הקיבוציות של הפעולה.

$^{\circ}$	I	T_a	G_c	H	V_p	R_m
I	I	T_a	G_c	H	V_p	R_m
T_b	T_b	T_{b+a}	G_{b+c}	G_b	$V_{p/2+m}$	$R_{b/2+m}$
G_d	G	G_{d+a}	T_{d+c}	T_d	$R_{d/2+p}$	$V_{d/2+m}$
H	H	G_a	T_c	I	R_p	V_m
v_a	v_a	$V_{q-a/2}$	$R_{q-c/2}$	R_q	T_{2q-2p}	G_{2q-2m}
R_n	R_n	$R_{n-a/2}$	$V_{n-c/2}$	V_n	G_{2n-2p}	T_{2n-2m}

טבלה 1: טבלת קיילי: לוח לפעולת הצירוף $T_b G_c = G_{b+c}$ בין האיזומטריות האורכיות

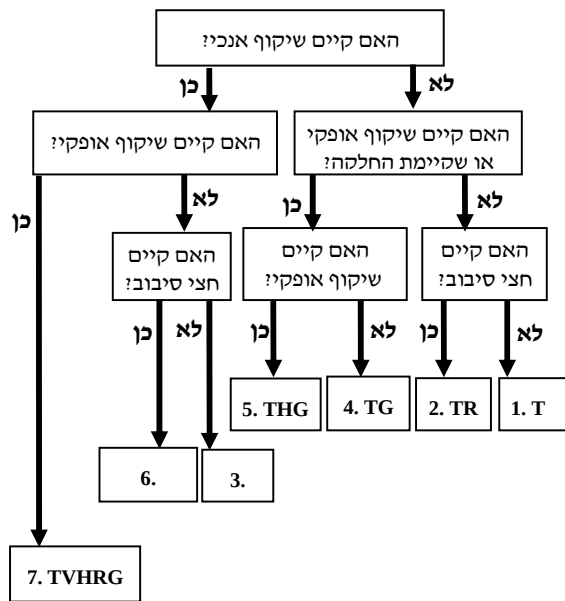
על כן ניתן להסיק מהטבלה שקבוצת האיזומטריות האורכיות מהווה חבורה. זוהי תת-חבורה של חבורת האיזומטריות במישור האוקלידי.

נברר כעת אלו תת-קבוצות ממש של חמש האיזומטריות האורכיות, מהוות אף הן חבורות בפני עצמן. בעיית המפתח היא הסגירות. ובכן – בנוסף לקבוצה של חמש האיזומטריות האורכיות המהווה כאמור חבורה, יש עוד שש תת-קבוצות כאלו ובסך הכל – שבע: הראשונה מכילה רק את ההזזות למיניהן, זהו פס הניתור T (מס. 1 לעיל), שש האחרות מכילות בנוסף להזזות עוד איזומטריה אחת או יותר. שלוש מהן מכילות עוד סוג אחד של איזומטריה (מס. 2. ניתור סיבובי TR, מס. 3. פס צעידה צידית TV, מס. 4. פס צעידה TG), אחת מכילה עוד שני סוגים (מס. 5. פס קפיצה TGH – אחת עוד שלושה סוגי איזומטריות (מס. 6. צידוד סיבובי TVRG – והאחרונה היא זו שהוצגה למעלה המכילה את כל החמש (מס. 7. פס קפיצה סיבובית TVHRG). על ידי עיון מעמיק בטבלת קיילי וניסיון ליצור 'לוחות פעולה' לכל אחת מהקבוצות הללו אפשר לוודא שהקבוצות הללו הן סגורות ובעלות מבנה של חבורה, אין דרך נוספת ליצור מבנה סגור של חבורה בין האיזומטריות האורכיות. לפיכך יש רק שבעה דפוסים של קישוטי-פס.

• שימושים

המידע על קיומם של לא פחות ולא יותר משבעה טיפוסים שונים של קישוטי פס נותן בידינו כלי לניתוח וכלי ליצירה. מידע זה מאפשר ניתוח של הסימטריות השונות של כל פס-קישוט. לפי קבוצת הסימטריות המתקבלת בניתוח הפס ניתן לשייכו לאחד משבעת הסוגים, ותהיה הצורה החוזרת על עצמה היוצרת אותו מסולסלת או מעוטרת ככל שתהיה. תרשים מס. 1

מתאר תהליך של ניתוח המבנה של פס-קישוט כלשהו עד לקבלת החלטה על אחד משבעת הסוגים שאליו הוא שייך. כך למשל הענף השמאלי ביותר של התרשים מצביע על העובדה שאם קישוט מסוים מכיל גם שיקוף אנכי וגם שיקוף אופקי, הוא בהכרח מכיל את כל האיזומטריות האורכיות האחרות. כדי לעמוד על כך מומלץ להתבונן באיור המתאים (מס. 7) של תבניות כף הרגל לעיל. דוגמא זו ממחישה את המשמעות של הסגירות של הקבוצה השביעית. באופן דומה אפשר לראות את ההרכב של יתר דפוסי הפס מתוך התרשים.



תרשים מס. 1: תרשים זרימה לשייך של דפוס-פס כלשהו לאחד משבעה הטיפוסים של קישוטי פס ("האם קיים" הוא קיצור של "האם קיימת סימטריה של")

המידע יכול לשמש גם ליצירת פסי קישוט. פסי קישוט שונים נבדלים זה מזה בדפוס ובצורה הבסיסית היוצרת כל אחד מהם. תהא היחידה החוזרת על עצמה אשר תהא, יש לכל היותר שבע דרכים ליצור ממנה פס קישוט. אמרנו לכל היותר, כי אם הצורה הבסיסית היא עצמה סימטרית, מספר האפשרויות קטן (מדוע?). לפיכך מי שמבקש ליצור דפוס קישוט אורכי צריך לבחור את הצורה הבסיסית החוזרת על עצמה ולבחור אחד משבעה הדפוסים כדי ליצור את הפס. (התוכנה Kali 5.0 מאפשרת ליצור דפוסי פס נהדרים. ניתן להורידה באתר:

<http://comp.uark.edu/~strauss/sym.2/index.html>

• לסיכום

עשינו כבר דרך לא קטנה – מהגדרה של 'פס' ושל 'קישוט-פס' באמצעות הרחבת המושג סימטריה, תוך שימוש באיזומטריות השונות, דרך חקירת המשותף לכל קישוטי-הפס וההבדלים ביניהם, ועד להכרה שקיימים בדיוק שבעה דפוסים שונים של פסי-קישוט, שבע חבורות סימטריה אורכית, מידע שימושי למדי.

- האם הדברים ניתנים להרחבה? להכללה?

- איזה שאלות חדשות נובעות מהתוצאות?

פרק ב: הרחבה והכללה

בפרק הקודם ראינו שיש בדיוק שבעה דפוסים קישוט שונים לאורך פס אינסופי, במובן שכל דפוס קישוט מתלכד עם תמונתו על-ידי חבורה של תנועות קשיחות (איזומטריות). כתוצאה מהרחבת המושג סימטריה להתכדות של צורה עם תמונתה המתקבלת על-ידי תנועה קשיחה כלשהי, אפשר לומר במלים אחרות, שראינו, כי קיימות בדיוק שבע חבורות של סימטריה לאורך פס, סימטריה קווית. השאלה המתבקשת היא: מה קורה במישור? כמה דפוסים-קישוט דו-ממדיים קיימים? במלים אחרות: האם יש לחבורת האיזומטריות במישור האוקלידי תת-חבורות (לא אורכיות) שהן חבורות סימטריה של המישור? ואם כן – כמה כאלו יש?

• כמה דפוסים קישוט דו-ממדיים קיימים במישור האוקלידי האינסופי?

כבר במאה ה-13, היו ידועים חמישה-עשר טיפוסים שונים של סימטריה במישור. באריחים בארמון אלהאמברה בגרנאדה יש דוגמאות שלהם. (ר' למשל <http://weasel.cnrs.humboldt.edu/~spain/alh>).

הוכחה לכך שיש אך ורק שבעה-עשר טיפוסים שונים הושגה רק בשנת 1891 (!), על-ידי צעיר רוסי בן 26, סטודנט במכון למכרות Gorny Institute בשם יבגני סטפנוביץ פֶּדּוּרוב (1853-1919). חבורות הסימטריה של המישור נקראות חבורות-טאפט (Wallpaper groups).

• 17 חבורות-הסימטריה במישור האוקלידי – 17 חבורות טאפט

בכל חבורת-טאפט יש הזזות שלמות בשני כיוונים שונים שעם הפעלתן הטאפט המקורי מתלכד עם תמונתו. כל חבורת-טאפט יכולה (לא חייבת) להכיל גם סיבובים, שיקופים והחלקות ובלבד שעם הפעלתן הטאפט יתלכד עם תמונתו. בדומה ליצירה של דפוס-קישוט אורכיים, ליצירה של דפוס קישוט במישור

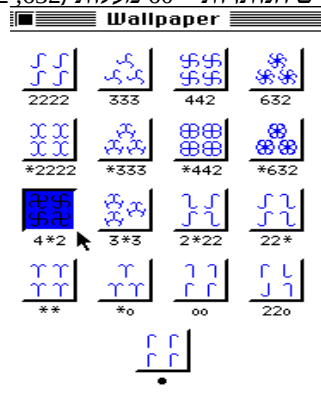
נחוצה קודם כל יחידה בסיסית – זהו החלק הכי קטן של המישור המכיל את כל המידע הדרוש כדי שהפעלת סדרה של תנועות קשיחות על היחידה הזאת תמלא את המישור בהעתקים זרים שלו. בדומה לקיומם של שבעה דפוסים קישוט לאורך פס, במישור יש, כאמור, 17 דרכים שונות שבהן הדפוס חוזר של יחידה יוצרת אחת מִכֶּסֶה את המישור האינסופי. בעזרת התוכנה Kali 5.0 שהוזכרה לעיל, ניתן ליצור גם את 17 הדפוסים ולהתרשם מההבדלים ביניהם.

• מיון 17 חבורות הסימטריה במישור

מובן מאליו שההבחנה בין 17 דפוסים הטאפט והסימול שלהם מהווים בעיה הרבה יותר קשה מהמיון והסימול של שבעה דפוסים הקישוט לאורך פס. כבסיס למיון שבע-עשרה החבורות משמש משפט ההגבלה הקריסטלוגרפית הקובע, כי אם חבורת-טאפט מכילה סיבוב, זה יכול להיות רק סיבוב ב- $90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ או 60° . ההוכחה לכך נשענת על העובדה שריצוף המישור במצולע משוכלל יחיד ייתכן רק ע"י משולשים שווים-צלעות (60°), ריבועים (90°), ומשולשים (120°). הוכחה למשפט זה ניתן למצוא באתר:

<http://t2.technion.ac.il/~sborfig/crystal.html>

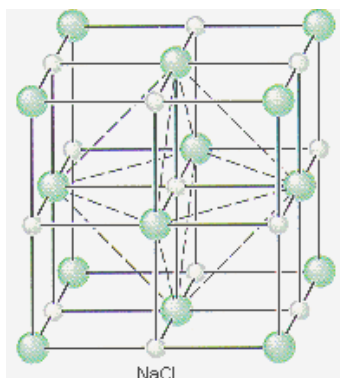
לאור משפט זה, ניתן למיין את שבע-עשרה חבורות הטאפט לפי הסיבוב המינימאלי שהן מכילות. נשתמש להבחנה ביניהן בסימול של קונוויי המקובל בקרב רבים, אף כי הוא מעורר קשיים לא מעטים, ולא נוכל להיכנס כאן להסבר על כללי הסימול. באיור למטה המציג יחידה מינימאלית בדרך כלל של כל חבורת טאפט אפשר לראות שיש ארבע חבורות-טאפט שאינן מכילות סיבוב (טאפט הזהות, **, 0*, 00); בחמש מהן הסיבוב המינימאלי הוא של 180 מעלות (220, 22*, 22*2, 2222*, 333), בשלוש – 120 מעלות (333, 333*, 3*3) בשלוש נוספות – 90 מעלות (244, 4*2, 244*) ובשתיים הנותרות – 60 מעלות (632, 632*).



בלתי תלוי, פרסם את אותה תוצאה עצמה גם המתמטיקאי הגרמני ארתור מוריץ שיינפלד (1853-1928) מאוניברסיטת גטינגן.

• "בשביל מה זה טוב?"

ב-1912 פרסם מקס ון-לאוה (Max Von Laue 1879-1960), ביסוס מתמטי לתגליתו – שגבישים בעלי מבנים שונים גורמים לשבירה שונה של קרני רנטגן (קרני-X) כאשר אלומות קרניים כאלו פוגעת בהם ולהפרעה הניכרת בעת ההשוואה של כניסתן ויציאתן מהגביש. אורך הגל של קרני רנטגן נמדד ביחידות אנגסטרם שהן 10^{-8} ס"מ שהוא סדר הגודל של המרחק בין שכבות האטומים בחלק ניכר מהחומרים⁶. והתופעה נקראת עקיפה (Diffraction). ון-לאוה קיבל על כך פרס נובל בפיסיקה ב-1914. בעקבות זאת זוהו באופן אמפירי מאות אלפי חומרים במצב מוצק כבעלי מבנה גבישי שמתאים לאחת מ-230 חבורות הסימטריה התלת-מימדית. כבר במאה ה-19 זוהו 32 חבורות-סימטריה סופיות המאפיינות את כל המינרלים השונים. מיצגיהן נקראים: 32 גופי בראוה ע"ש אוגוסט בראוה (August Bravais 1811-1863). כך למשל נראית היחידה הבסיסית של הגביש של מלח בישול NaCl. חומרים גבישיים אחרים כאמור הם בעלי סימטריה המתאים ליתר החבורות.



• תחום מדעי חדש - קריסטלוגרפיה

הסימטריה של סידור האטומים בגבישי החומר נמצאה קשורה לתכונות כגון מגנטיות, שבירת אור, מוליכות חשמלית, ועוד, ואף מאפשרת חיזוי של תכונות החומר. תחום מדעי חדש בא לעולם – קריסטלוגרפיה, תורת מבנה החומר הגבישי, והפך במאה ה-20 למדע המשרת כימאים, גיאולוגים, פיסיקאי-מצב-מוצק, מהנדסי-חומרים, מפתחי תרופות, מתמטיקאים-שימושיים ועוד רבים שהמורפולוגיה של החומר נוגעת לתחום עיסוקם.

⁶ ליתר פירוט על תופעת העקיפה ר' למשל:

<http://www.geosci.ipfw.edu/xrd/techniqueinformation.html>

להרחבה בנושא ניתן לגלוש לאתרים:

<http://clowder.net/hop/17walppr/17walppr.html>

<http://comp.uark.edu/~strauss/symmetry.unit/index.html>

<http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/history.html>

<http://encyclopedia.thefreedictionary.com/2D+crystallographic+group>

• שימושים

הידע על קיומן של 17 חבורות-טאפט מהווה בסיס לתכנון שטיחים וטאפטים על פי 17 הדפוסים (למסגרות ופסי-גימור משמשים כמובן 7 דפוסים-הפס). בנוסף לכך משתמשים בכך כיום גם באנימציה ממוחשבת הדורשת הפעלת טרנספורמציות קשיחות במישור על מצולעים שונים המהווים בסיס לציורים בסרטי אנימציה. תוכנת המחשב כוללת את הנוסחאות הפרמטריות של הפונקציות המבצעות את ההעתקים האיזומטריים למיניהם.

• 7, 17, ומה הלאה ?

פליכס קליין (Felix Klein 1849-1925) היה מתמטיקאי גרמני רב השפעה גם בתחום הפדגוגי ובמיוחד בגיאומטריה. הוא נודע בין היתר בזכות 'תוכנית ארלנגן' – תוכנית מחקר אותה הגה למיון הגיאומטריות השונות שנחשפו במהלך המאה ה-18 וה-19 על פי חבורות הסימטריה שלהן. היה זה פליכס קליין שהעלה את השאלה המתבקשת לגבי חבורות של תנועות קשיחות במרחב התלת-מימדי.

בשנת 1891 פרסם הצעיר הרוסי יבגני פֶדורוב לא רק את דבר קיומן של 17 חבורות הטאפט, אלא גם הוכחת קיום של בדיוק 230 חבורות סימטריה במרחב התלת-מימדי חבורות "אריזה" (באנלוגיה ל"ריצוף" במישור ו"הדפס" קווי). הוא קבע שקיימות 230 קבוצות שונות של תנועות קשיחות במרחב, אשר מעתיקות אותו על עצמו, ומהוות חבורות ביחס לפעולת הצירוף. יצוין כי במרחב מתווספת לתנועות הקשיחות תנועת-בורג, זוהי התנועה שבמישור מתבטאת כהחלקה. גם במרחב חוזרים על עצמם אותם מושגים שנזכרו בחבורות-טאפט במישור ובקישוטי-פס: הדפס חוזר של יחידה יוצרת שממלאת ללא חיפוי (כמו באריזה) את המרחב האינסופי.

כפי שקרה יותר מפעם אחת במהלך ההיסטוריה של המתמטיקה והמדעים, באותה שנה ממש, ובאופן לגמרי

לומר רק, שהחלק התיאורטי נבדק במלואו, אולם על החלק הממוחשב רמת הביטחון שלהם בנכונותה היא 99%... כך שהשערת קפלר היא במעמד של 'כמעט' משפט. באוגוסט 2005, החליטה מערכת העיתון היוקרתי הנ"ל לפרסם בכל זאת את ההוכחה של היילס והיא תראה אור בעתיד הקרוב. בהקשר זה מומלץ הספר:

[George Szpiro \(2003\): Kepler's Conjecture. How Some of the Greatest Minds in History Helped Solve One of the Oldest Math Problems in the World, John Wiley & Sons Inc.](http://www.wiley.com/go/kepler)

ואתר ובו פרק מתוכו: <http://plus.maths.org/issue23/features/kissing/index.html>

תחום אחר שמתקשר לענייננו הוא חקר פאונים אינסופיים. בשנת 1937 פרסם הגיאומטריקן בן זמננו ה.ס.מ. קוקסטר, שהזכרנו אותו כבר לעיל, מאמר ובו הפתיע בתיאור של שלושה פאונים משוכללים בנוסף לחמשת הפאונים הקמורים שקיומם ובלעדיותם הייתה ידועה⁸. היו אלה שלושה פאונים משוכללים אינסופיים: באחד נפגשים ששה ריבועים בכל קדקוד (ר' איור), בשני נפגשים ארבעה משושים משוכללים בכל קדקוד ובשלישי נפגשים שישה משושים משוכללים בכל קדקוד. שלושתם אינסופיים וסכום הזוויות של המצולעים הנפגשים בקדקוד אחד של פאון כזה גדול מ-360 מעלות.

הנושא הצית את דמיונם של שלושה חוקרים בפקולטה לארכיטקטורה בטכניון: אברהם וכמן, מיכאל בורט ומנחם קליינמן. הם חקרו ובנו מודלים של פאונים אינסופיים למיניהם ופרסמו את תוצאות מחקרם בשנת

⁸ פאון משוכלל הוא גוף מרחבי סגור שכל פאותיו הן מצולעים משוכללים חופפים. סכום הזוויות של המצולעים הנפגשים בקדקוד אחד של פאון כזה קטן מ-360 מעלות. קיימים חמישה פאונים קמורים משוכללים בלבד: פירמידה משולשת (פאותיה הם 4 משולשים שווים צלעות ובכל קדקוד נפגשים שלושה), קובייה (6 ריבועים, גם כאן שלושה בכל קדקוד), תמנון/אוקטאדר (8 משולשים שווים צלעות, ארבעה מהם נפגשים בכל קדקוד), תריסרון/דודקאדר (12 פאות מחומשות, שלוש בכל קדקוד), עשירימון/איקוזאדר (20 פאות משולשות חמש בכל קדקוד). ההוכחה שאין יותר מחמישה פאונים משוכללים קמורים היא פשוטה ונובעת מהיכולת ליצור פינה ע"י שלושה או יותר מצולעים משוכללים. ההוכחה שקיימים בדיוק חמישה פאונים מעט יותר מסובכת. ר' למשל:

H. Dorrie (1965): *One hundred great problems of elementary mathematics*. Dover Publications, pp. 295-300

להרחבה והעמקה בתחום זה ניתן לגלוש לשני אתרים מרהיבים:

<http://www.polymorf.net/knownhere.htm>
http://www.chem.ox.ac.uk/icl/heyes/structure_of_solids/Lecture1/Lec1.html

• שאלות חדשות, ממצאים מפתיעים

העיסוק בחבורות הסימטריה במרחב מתקשר באופן טבעי למשפחה של בעיות מתמטיות הנקראות 'בעיות אריזה'. איזה פיאונים⁷ 'אורזים' את המרחב? כלומר איזה פיאונים יכולים לשמש כיחידה הבסיסית החוזרת על עצמה ויוצרת חבורת סימטריה בדומה ליצירת דפוסי קישוט לאורך פס ודפוסי טאפט במישור על-ידי יחידה בסיסית החוזרת על עצמה? מאות שנים קודם לכן העסיקה שאלת האריזה של כדורים את האסטרונום ואיש האשכולות הגרמני יוהאן קפלר (Johannes Kepler 1571-1630). בראשית המאה ה-17, בהיותו בשנות ה-30 לחייו, העלה קפלר את ההשערה שמבין כל האריזות האפשריות של כדורים קשיחים שווי-רדיוס במרחב, האריזה האופטימלית, היינו האריזה "הצפופה" ביותר, זו שמותירה חללים מינימאליים בין הכדורים, היא זו שבה אורזים תפוזים בדוכני הפירות.

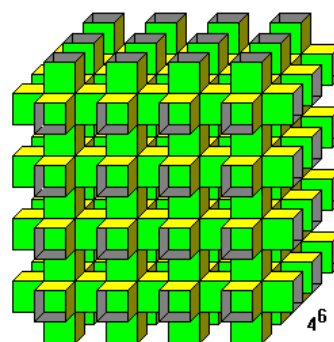


באריזה זו כל כדור נוגע ב-12 כדורים אחרים: ארבעה מתחתיו, ארבעה לצידיו וארבעה מעליו.

ניסיונות חוזרים ונשנים להוכיח את השערת קפלר נכשלו במשך מאות שנים, עד אשר בשנת 1998 הציג המתמטיקאי האמריקאי תומס הילס (Hales Thomas) הוכחה-באמצעות-מחשב-על להשערת קפלר. ההוכחה היא על-ידי מיצוי כל האפשרויות אותן הילס בודק באמצעות מחשב והיא משתרעת על פני מאות עמודים וקובץ מחשב של שלושה גיגא-בייטס. היא הומלצה לפרסום בעיתון המתמטי היוקרתי *Annals of Mathematics*. שנים-עשר מומחים נקראו בשנת 1999 לבדוק את ההוכחה לקראת פרסומה. תהליך הבדיקה שלה נמשך למעלה מארבע שנים, ולבסוף יכלו הבודקים

⁷ פאון משמש כאן כשם העברי לפוליאדר (Polyhedron) רבים: פיאונים (Polyhedra), כלומר גוף מרחבי בעל פאות מישוריות שכולן מצולעים.

1974 בספר ובו צילומים מרהיבים של מעל 300 פאונים אינסופיים שונים, הכולל מיון של מגוון ממצאיהם לקבוצות על פי חבורות הסימטריה שלהם (ר' רשימת המקורות).



• ... הישג ישראלי מזהים

במשך כשבעים שנה נשענה התפתחות הקריסטלוגרפיה על התפנית החדה שחלה הודות לגילוי תופעת העקיפה של קרני-X ע"י ואן-לאווה. ההנחה הבלתי מעורערת להתפתחותה היתה שגבישים הם מוצקים הבנויים מיחידות במערך מחזורי, והם לפיכך בעלי סימטריה רגולארית. ואז, בשנת 1982, גילה פרופ' דן שכתמן מהטכניון התגבשות לא רגולארית של מוצקים. היתה זו הפתעה מהפכנית לקריסטלוגרפים שעד אז דבקו במבנה מחזורי ורגולארי של מילוי המרחב. שכתמן גילה גבישים כביכול-מחזוריים (קוואזי-מחזוריים) בעלי סימטריה איקוסהדרלית (מחומשת!), בניגוד לכל מה שהיה ידוע עד אז לאור משפט ההגבלה הקריסטלוגרפית שהוזכר לעיל בסעיף על מיון 17 חבורות הטאפט. פיסיקאים העוסקים במבנה החומר נרתמו לנתיב המחקר החדשני וגילו עוד גבישים קוואזי-מחזוריים. תורה חדשה על יישומיה, הולכת וקורמת עור וגידים כתוצאה מתגלית זו. בשנת 1991 שינתה החברה הבינלאומית לקריסטלוגרפיה את

ההגדרה של גביש כדי להתאים אותה לממצאים המהפכניים של שכתמן. שכתמן עצמו הוא חתן פרס-ישראל לשנת ה-50 למדינה (תשנ"ח), זכה בפרס וולף לשנת 1999 ובפרסים בינלאומיים רבים. עוד פרטים על הנושא אפשר לקרוא במאמר מאת רון ליפשיץ: "קוואזי-גבישים מקפלים ועד שכתמן, מהארנבות של פיבונאצ'י ועד נייר הטואלט שפנרוז לא אהב", בפיזיקה פלוס, המגזין המקוון של החברה הישראלית לפיזיקה, מס. 3:

<http://physicaplus.org.il/zope/home/he/3/Lifshitz>

• לסיכום שוב, מה שואל מתמטיקאי?

יצאנו מההגדרה של 'פס' ושל 'קישוט-פס' אל המשותף לכל קישוטי-הפס ולהבדלים ביניהם, ראינו שיש 7 אפשרויות שונות ליצירתם, הרחבנו את השאלה למישור ולמרחב ובהם מצאנו 17 ו-230 חבורות סימטריה בהתאמה. אף ראינו שהנושא הוא לא רק אסתטי ומרתק, אלא גם עתיר יישומים, מתקשר לענפים נוספים במתמטיקה ולתחומים מדעיים אחרים. מתמטיקאים בדרך כלל אינם מסתפקים בתוצאות שהם משיגים. הם עוסקים בהצגת שאלות ובחיפוש תשובות, תשובה שנמצאה מעלה מיד שאלות חדשות והמנגינה המתמטית איננה נגמרת. ובכן –

פרק ג: 7, 17, 230 ומה הלאה?

בשנת 1900 נשא דייוויד הילברט (David Hilbert 1862-1943) מגדולי המתמטיקאים של המאה ה-20, את הרצאת הפתיחה בכנס הבין-לאומי של המתמטיקאים, שנערך באותה שנה בפאריס. הרצאה זו נחשבת להרצאה המפורסמת ביותר שניתנה אי פעם במתמטיקה. בהרצאתו הציג הילברט 23 בעיות שבהן ראוי לדעתו למקד את המחקר המתמטי במאה ה-20. הבעיה ה-18 מעידה על החשיבות הרבה שהילברט ייחס להבנת המתמטיקה הקשורה לחבורות סימטריה חד-ממדית, דו-ממדית ותלת-מימדי וליישומיה. הכותרת שניתנה לה היא:

Mathematische Probleme 18: Building up of space from congruent polyhedra

בגוף החומר קובע הילברט: "...פדרוב, שיינפל'ז ולאחרונה גם רון הוכיחו שבמרחב האוקלידי יש רק מספר סופי של חבורות-של-תנועות בעלות יחידה בסיסית... מתברר שיש קשיים בהכללת המשפט הזה..."

לאחר שבדק את העניין בדיוקנות וביעילות האופיינית לדרך בה הוא מנהל את האתר, רשם סלואן את הסדרה כפריט מספר A092240 באתר שלו.

ובכן – קישוטים – גם זה מתמטיקה!!!

מי שהגיע בקריאה עד לכאן יודע שהתשובה לשאלה הזאת היא כן, בהחלט. קישוטי-פס, טאפטים וחבורות קריסטלוגרפיות נשענים על פרק מרתק במתמטיקה. המחקר הפורה בשאלות הכרוכות בהם והנובעות מהם עדיין לא הושלם. כמו פרקים רבים במתמטיקה – כדי ליהנות מהתוצאות הכרחי להשקיע מאמץ לא מבוטל בלימוד היסודות שעליהם הוא נשען, וכך הרקע המתמטי בפתח המאמר מהווה חלק נכבד ממנו. ההתפתחויות שליוו את הנושא מאפיינות את העיסוק במתמטיקה לדורותיה. שאלה פשוטה לכאורה מסתעפת לתורה שלמה דרך הרחבות, הכללות והפשטות של תוצאות המתקבלות במקומות שונים בעולם, בהם מתמטיקאים ומיישמי המתמטיקה חוברים יחד לעיסוק במסכת הבלתי נגמרת של שאלה-תשובה-שאלה וכך המתמטיקה היא עשייה אנושית שאיננה נגמרת.

ביבליוגרפיה

Coxeter, H. S. M. & Greitzer, S. L. (1967): Geometry Revisited. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., p. 80.

Weyl, Hermann Klaus Hugo (1952): Symmetry, Princeton University Press, Princeton NJ.

א. וכמן, מ. בורט, מ. קליינמן (1974) פוליהדרה אינסופיים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה לארכיטקטורה ובינוי ערים. מהדורה שנייה 2005.

אתר ובו תוכנה להורדה המאפשרת יצירת קישוטי פס: <http://www.geometrygames.org/Kali/index.html>

לפיכך מן הראוי להמשיך ולחקור בשאלה הבאה: האם גם במרחב אוקלידי בעל n מימדים, קיים רק מספר סופי של חבורות-של-תנועות בעלות יחידה בסיסית?..."



• מה קרה מאז?

בשנת 1910 הוכיח ביברבך (L. Bieberbach) שבכל מימד יש רק מספר סופי של חבורות סימטריה, אבל מבלי לקבוע מהו המספר הסופי, בשום מימד.

ב-1948 פיתח זסנהאוס (H. Zassenhaus) אלגוריתם לקביעת קבוצה מלאה של מייצגים של חבורות סימטריה במרחבים n -מימדיים.

ב-1968 בראון (H. Brown) הריץ עם שותפיו תוכנית מחשב על-פי האלגוריתם של זסנהאוס וקבע כי במרחב הארבע-מימדי יש לא פחות ולא יותר מ-4,783 חבורות סימטריה.

למיטב ידיעתי עד היום לא ידוע המשך הסדרה 7, 17, 230, 4783 למימדים גבוהים יותר, אף כי מתקיים מחקר מתמשך ויש תוצאות חלקיות. בחיפוש אחר המשך הסדרה, פניתי בין היתר אל אתר "האנציקלופדיה המקוונת של סדרות בשלמים" המנוהל על-ידי המתמטיקאי ניל סלואן.

Neil Sloane: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences:

<http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html>

