הנושא: **התנהגות מתמטית בעלת גוון של שימור**

הוכן ע"י: שלמה חריר, משה סטופל.

תקציר: המחברים סוקרים מגוון רחב של בעיות מתמטיות, מוכרות בחלקן הגדול, אשר ניתן להציגן כמצביעות על 'גדלים שמורים' – 'אינווריאנטים'. נקודת מבט כזו מזמנת חקירה דינאמית של מצבים מתמטיים ויכולה להוביל להבנה עמוקה.

מילות מפתח: כתב העת עלי"ה, עלי"ה 35, גיאומטריה, גיאומטריה דינאמית, הוכחה, שטח, היקף, משולש, מלבן, טרפז, משיק, גרף, מעגל, מרחק, זווית, שיפוע, מיתר, גיאומטריה אנליטית, חשבון דיפרנציאלי, חשבון אינטגרלי.

החומר פורסם במסגרת: עלי"ה 35, תשס"ו 2005, עמודים 72-79.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

ale35-14

התנהגות מתמטית בעלת גוון של שימור

שלמה חריר
harir@macam.ac.il

משה סטופל
stupel@bezeqint.net

"שאנן" המכללה הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה

הקדמה

בתחומי הפיזיקה ידועים מספר חוקי שימור, כגון: חוק שימור האנרגיה, חוק שימור התנע, חוק שימור המטען. חוקי השימור מצביעים על תכונה של חומרים או של גופים בטבע, אשר אינה משתנה גם כאשר מתחוללים שינויים הקשורים בה. כך למשל, במהלך תנועתו של גוף האנרגיה הקינטית שלו הופכת לאנרגיה פוטנציאלית, אלסטית או לחום, אך סך כל האנרגיה במערכת הסגורה בה נמצא הגוף נשאר קבוע.

גם במתמטיקה ניתן לגלות תופעות של שימור. מוכר המונח: 'אינווריאנטה' – 'שמורה' הבא לתאר גודל שאינו משתנה למרות ביצוע פעולה מסוימת. במאמר זה נציג דוגמאות מעניינות של מצבים מתמטיים, אשר לא תמיד זוכות לתשומת הלב הראויה, וניתן לזהות בהם גדלים שמורים. לפני שנחקור דוגמאות שונות, נזכיר מעט דוגמאות מוכרות לכולנו:

א. כשחותכים צורה מסוימת, באופן שרירותי ומצמידים את כל חלקיה לכדי צורה חדשה, השטח של הצורה שהתקבלה שווה לשטח של הצורה המקורית. דוגמאות לצורות מיוחדות שנחתכו והודבקו מחדש לצורות מיוחדות אחרות ניתן למצוא במספר מקורות (1-4).

גם בפירוק טור סופי לתת-טורים שונים, לפי סדרות שונות של מספרים, הסכום הכולל נשמר.

ב. המיתרים העוברים במעגל נתון במרחק קבוע ממרכזו, הם שווי אורך.

ג. הזוויות ההיקפיות במעגל הנשענות על קשת אחת קבועה שוות זו לזו.

ד. במערכת צירים קרטזית תנועה על פני ישר המקביל לציר ה-x לא משנה את הערך של שיעור ה-y.

ה. בתנועה על אליפסה או היפרבולה נשמר הסכום או ההפרש בין המרחקים של הנקודה הנעה ממוקדיהן.

ו. סכום הזוויות במשולש הוא קבוע ושווה ל- $180°$, ללא תלות באורכי הצלעות.

בכל הסעיפים הנ"ל, כאשר מתבצעת תנועה של נקודה (אחת או יותר) וקטע (אחד או יותר), נשמרים גדלים אחרים.

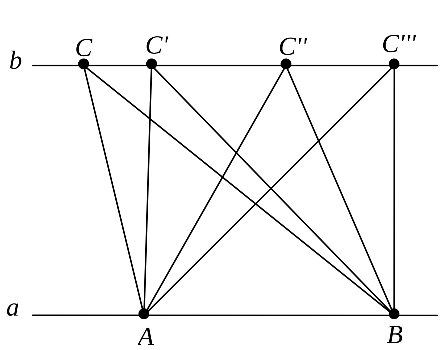
בדוגמאות המובאות בהמשך המאמר נשמרות תכונות כמו: שטח, היקף, מרחק או סכום מרחקים, זוויות, יחסים בין גדלים (שטח וקטעים), שיפוע של ישר, למרות שחלים שינויים בתכונות אחרות. מקרים אלה מצביעים לא רק על עומקה של המתמטיקה, אלא גם על יופייה.

בכל אחד מהמצבים המתוארים להלן ניתן להמחיש את תכונת ה'שינוי-שימור' באמצעות לומדות מתמטיות: מחוללי גרפים למיניהם או באמצעות לומדות גיאומטריות שונות. שימוש בלומדות כאלה מאפשר את ביצוע התנועה – ביצוע השינוי, ומראה גם את הגודל הנשמר.

שטח קבוע

ישרים מקבילים

בהינתן קטע AB וישר מקביל לו b, כל נקודה C על הישר יוצרת משולש ABC. המשולשים הנוצרים הם



איור 1

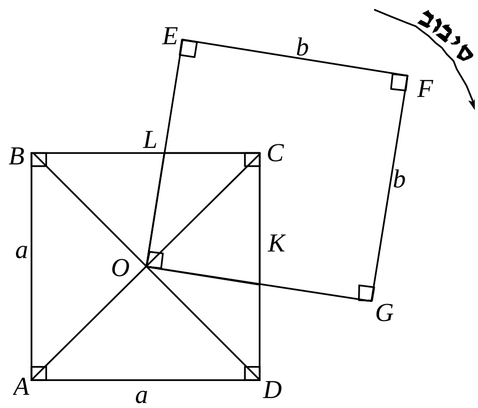
שווי-שטח. כלומר: תנועה של נקודה C על הישר b משנה את המשולש, אך שומרת על מידת שטחו (איור 1).

הוכחה

השטח של כל אחד מהמשולשים, אשר הקטע AB הוא צלע שלהם והקדקוד השלישי שלהם מונח על הישר המקביל b, שווה למחצית המכפלה של אורך הקטע AB במרחק שבין המקבילים. כלומר, שטח המשולש ABC נשמר קבוע גם כאשר הנקודה C משנה את מקומה.

ריבוע מסתובב

בהינתן ריבוע $ABCD$ בעל צלע באורך a וריבוע נוסף $OEFG$ בעל צלע באורך $b > \frac{a}{2}$ שקדקודו O מונח במפגש האלכסונים של הריבוע הראשון, סיבוב הריבוע השני סביב הנקודה O אינו משנה את השטח של התחום המרובע המשותף לשני הריבועים($OLCK$) (ר' איור 2) (5).



איור 2

הוכחה

המשולשים OLC ו-OKD חופפים (ז.צ.ז.), לכן שטח המרובע המבוקש שווה לרבע משטח הריבוע:

$$S_{OLCK} = S_{\Delta COD} = \frac{1}{4}a^2$$

כלומר, השטח של התחום המשותף נשמר תחת תנועת הסיבוב של הריבוע ותחת שינוי האורך של צלעו.

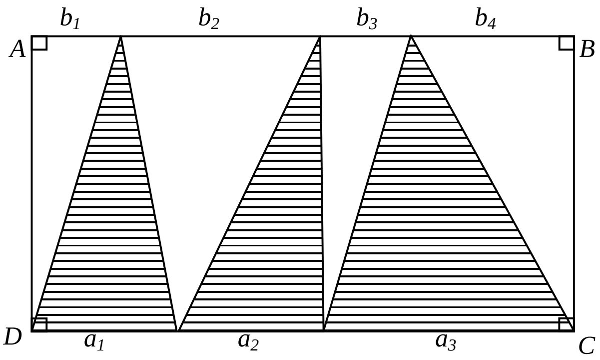
משולשים שונים בתוך מלבן

בהינתן מלבן $ABCD$ אשר בו חסומים משולשים שונים (איור 3), אשר לחלקם קדקוד המונח על הצלע AB וצלע על הצלע DC (מקווקוים) ולאחרים קדקוד המונח על הצלע DC וצלע על הצלע AB, סכומי השטחים של המשולשים בכל אחת משתי הקבוצות שווים זה לזה.

הוכחה

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) \cdot AD = \frac{1}{2}DC \cdot AD = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$ מקווקווים

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \cdot AD = \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$ לבנים

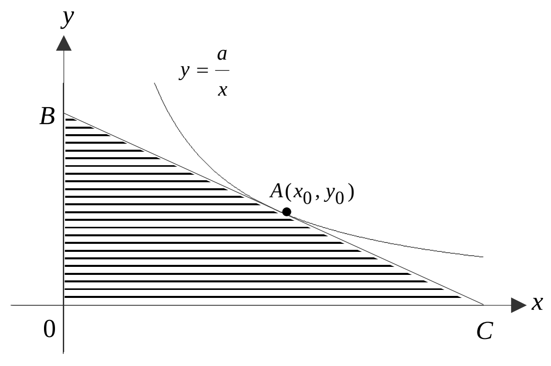


איור 3

באופן דומה ניתן להוכיח לכל מספר של משולשים, כלומר: חלוקה שונה של צלע AB שומרת על סכום שטחי המשולשים בכל אחת מהקבוצות.

היפרבולה ומשיק

בהינתן גרף הפונקציה: $y = \frac{a}{x}$ ונקודה כלשהי ברביע הראשון $A(x_0, y_0)$ עליו, השטח הנוצר בין ציר ה-x, ציר ה-y, והמשיק לגרף בנקודה A, אינו תלוי בבחירת הנקודה A (איור 4) (6).



איור 4

הוכחה

שיפוע המשיק בנקודה A הוא: $y'(x_0) = -\frac{a}{x_0^{\,2}}$

ומשוואת המשיק היא:

$$y-y_0=-\frac{a}{x_0^2}(x-x_0) \Leftrightarrow y=-\frac{ax}{x_0^2}+\frac{a}{x_0}+y_0$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{ax}{x_0^2}+\frac{2a}{x_0} \Leftrightarrow y=\frac{a}{x_0}\left(2-\frac{x}{x_0}\right)$$

מכאן, $B(0,\frac{2a}{x_0}),C(2x_0,0)$ ושטח המשולש,

$$S_{\Delta BOC}=\frac{OC\cdot OB}{2}=2a$$

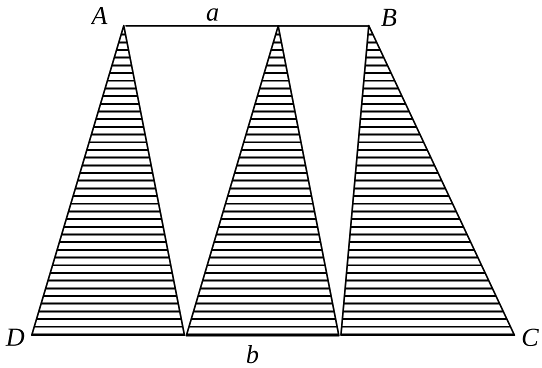
כלומר, התנועה של הנקודה A על פני הגרף, שומרת על מידת השטח של המשולש.

יחס שטחים קבוע

משולשים בתוך טרפז

בהינתן טרפז $ABCD$ אשר בו חסומים משולשים (איור 5), אשר לחלקם קדקוד המונח על הבסיס הקצר וצלע על הבסיס הארוך (מקווקווים) ולחלקם קדקוד המונח על הבסיס הארוך וצלע על הבסיס הקצר, היחס בין סכומי השטחים של המשולשים בכל אחת מהקבוצות הוא גודל קבוע ושווה ליחס בין האורכים של בסיסי הטרפז.

הוכחת הטענה דומה מאד להוכחה שהוצגה עבור שטחי המשולשים החסומים במלבן.



איור 5

פרבולה ומשיק

בהינתן הפונקציה: $y=\sqrt{x}$ (ענף של פרבולה), ונקודה $P(x_0,y_0)$ עליה, השטחים: S_1 – השטח בין הפרבולה, המשיק לפרבולה בנקודה $P(x_0,y_0)$ וציר ה-x, ו- S_2 – השטח בין הפרבולה וציר ה-x והאנך לציר ה-x בנקודת ההשקה, מתייחסים זה לזה ביחס $1:2$, שאינו תלוי בבחירת הנקודה $P(x_0,y_0)$ (איור 6) (7).

הוכחה

$$S_2=\int_0^{x_0}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x_0\sqrt{x_0}$$

שיפוע המשיק: $y'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

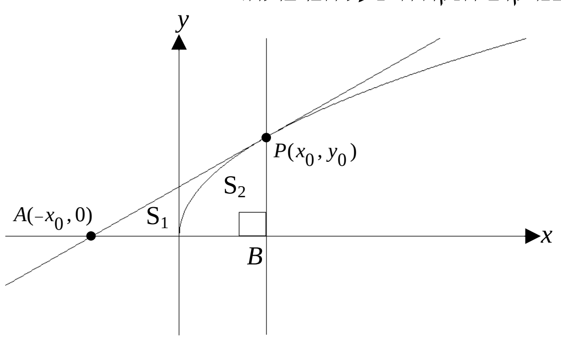
משוואת המשיק: $y=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot x+\frac{\sqrt{x_0}}{2}$

נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x היא $A(-x_0,0)$, מכאן:

$$S_{\Delta ABP}=\frac{AB\cdot PB}{2}=\frac{2x_0y_0}{2}=x_0y_0=x_0\sqrt{x_0}$$

ולכן: $S_1=S_{\Delta ABP}-S_2=\frac{1}{3}x_0\sqrt{x_0}$

ואכן, יחס השטחים $S_1:S_2=1:2$ קבוע, ללא תלות במיקום הנקודה P על הפרבולה.

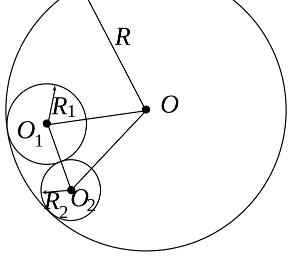


איור 6

היקף קבוע

שני מעגלים משיקים זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שלישי

בהינתן מעגל שמרכזו O ומחוגו R, היקף המשולש OO_1O_2, אשר צלעותיו מחברות בין מרכז המעגל הנתון לבין מרכזיהם של שני מעגלים (O_1 ו- O_2) המשיקים לו וזה לזה, הוא קבוע ואינו תלוי ברדיוסים של המעגלים O_1 ו- O_2. (איור 7).



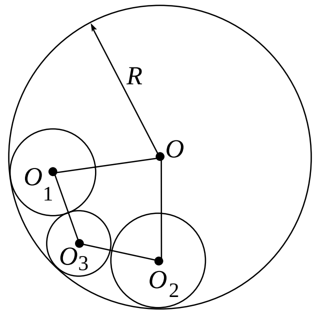
איור 7

הוכחה

נסמן את המחוגים של המעגלים שמרכזיהם ב- O_1 ו- O_2 ב- R_1 וב- R_2 בהתאמה. נחשב את היקף המשולש:

$$P = OO_1 + O_1O_2 + O_2O = R - R_1 + R_1 + R_2 + R - R_2 = 2R$$

ההוכחה מבוססת על המשפט: 'הישר המחבר בין מרכזי מעגלים משיקים זה לזה, עובר דרך נקודת ההשקה שלהם'. בצירוף של מעגל שלישי פנימי שמרכזו O_3 ומחוגו R_3 כמודגם באיור 8, יהיה היקף המרובע $OO_1O_3O_2$ קבוע בעל ערך $P = 2R + 2R_3$, ושוב בלתי תלוי באורכי המחוגים של המעגלים O_1 ו-O_2, אך תלוי ב- R_3.



איור 8

משיקים למעגל

בהינתן מעגל שמרכזו O, נקודה A מחוץ למעגל, ושני משיקים למעגל בנקודות B ו-C שעליו, היקף המשולש הנוצר מהעברת משיק שלישי דרך נקודה D שעל הקשת BC, הוא קבוע ואינו תלוי בבחירת המקום של הנקודה D. (המשיק השלישי חותך את שני המשיקים AB ו-AC בנקודות E ו-F בהתאמה (איור 9) (9).

הוכחה

שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה משותפת, שווים באורכם. לכן נוכל לסמן:

$$AB = AC = a$$

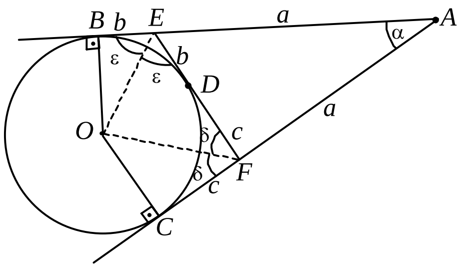
$$EB = ED = b$$

$$FC = FD = c$$

$$P_{\Delta AEF} = AE + EF + FA = (a-b) + (b+c) + (a-c) = 2a$$

כלומר, היקף המשולש תלוי באורך המשיקים היוצאים מהנקודה A בלבד ולא במיקום נקודת ההשקה D.

הערה: לסימון הזוויות α,δ ו- ε באיור 9 יהיה שימוש בדוגמה הבאה.



איור 9

זווית קבועה

משיק למעגל

באותם נתונים של משימה הקודמת: הזווית $\angle EOF$ קבועה ואינה תלויה במיקום הנקודה D על הקשת.

הוכחה

לפי המשפט: ישר המחבר נקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל (קודקוד זווית הראייה) עם מרכז המעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים (זווית הראייה), נוכל לסמן:

$$\angle F_1 = \angle F_2 = \delta$$

$$\angle E_1 = \angle E_2 = \varepsilon$$

הזווית $\angle EFC$ היא זווית חיצונית למשולש EFA, לכן:

$$2\delta = 180° - 2\varepsilon + \alpha \Rightarrow \varepsilon + \delta = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

מכאן,

$$\angle EOF = 180^0 - (\varepsilon + \delta) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$

כלומר, מידת הזווית $\angle EOF$ קבועה ואינה תלויה במיקום הנקודה D.

מרחק או סכום מרחקים קבוע

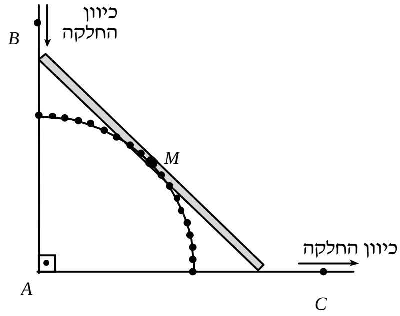
סרגל מחליק

בהינתן זווית ישרה $\angle BAC$ וקטע באורך l אשר קצותיו נעים על פני שוקי הזווית, מרחקה של נקודת אמצע הקטע M מקודקוד הזווית הישר ($\angle A$) נותר קבוע ושווה למחצית אורך הקטע (10). במילים אחרות, אמצע הקטע M נע על קשת של מעגל שאורך מחוגו $\frac{l}{2}$ ומרכזו בנקודה A (איור 10).

הוכחה

המרחק של אמצע הקטע M מהנקודה A הוא קבוע לפי

המשפט: במשולש ישר-זווית, התיכון ליתר שווה באורכו למחצית היתר.

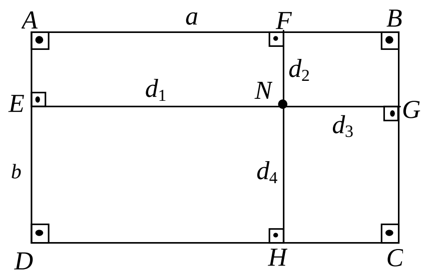


איור 10

לעובדה שהמרחק נותר קבוע יש השלכה מעשית. כאשר מבקשים להחליק קורה כבדה וקיים חשש שבמהלך ההחלקה היא תסטה לאחד הצדדים, ניתן לרתום אותה באמצעות כבל חזק היוצא מהנקודה A ומתחבר ל-M.

נקודה בתוך מלבן

בהינתן מלבן $ABCD$ שאורכי צלעותיו: $AB=a$, $CD=b$, סכום מרחקיה של נקודה כלשהי פנימית למלבן N מצלעות המלבן הוא גודל קבוע השווה למחצית היקף המלבן (איור 11).



איור 11

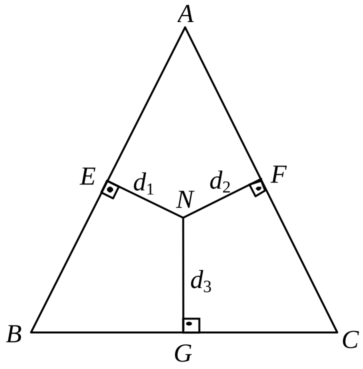
הוכחה

$$d_1+d_2+d_3+d_4=d_1+d_3+d_2+d_4=a+b$$

הערה: סכום המרחקים של נקודה פנימית למקבילית מצלעותיה יהיה גם הוא קבוע.

נקודה במשולש שווה צלעות

בהינתן משולש שווה-צלעות, סכום מרחקיה של נקודה פנימית למשולש N מצלעותיו, הוא גודל קבוע השווה לגובה h של המשולש (טענה זו ידועה כמשפט וויואני) (איור12).

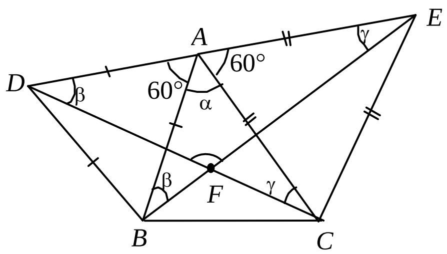


איור 12

הוכחה לכך, בדרכים שונות, ניתן למצוא במספר מקומות (12,11).

משולשים שווי צלעות הבנויים על צלעות משולש

בהינתן משולש ABC ושני משולשים שווי-צלעות ADB ו-AEC הבנויים על צלעותיו AB ו-AC, מידת הזווית הנוצרת בין הקטעים DC ו-EB בנקודה F קבועה ושווה ל- 120 מעלות (איור 13).



איור 13

<u>הוכחה</u>:

מתקיים: $\Delta DAC \cong \Delta BAE$

שכן:

$(AE=AC, \angle DAC=\angle EAB=60°+a, AD=AB)$

מחפיפת המשולשים נובע:

$\angle ACD=\angle AEB=\gamma, \angle ABE=\angle ADC=\beta$

סכום הזווית במשולש ABE הוא:

$\beta+\alpha+\gamma+60^0=180^0$

סכום הזוויות במרובע $ADFE$ הוא :

$$\alpha+\beta+\gamma+\angle DFE+120^\circ=360^\circ$$

משני שיוויונים אלו נובע : $\angle DFE=120^0$

מ.ש.ל.

<u>הערות</u>

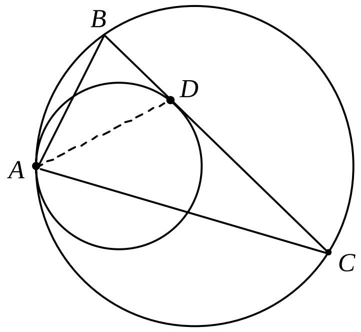
1) הנקודות A, E ו-B אינן על ישר אחד.

2) דרך אחרת ויפה להוכחה משתמשת במעגלים החוסמים את המשולשים ADB ו-AEC. מעגלים אלה נחתכים בשתי נקודות (כמובן בנקודה A וגם בנקודה F למה?).

3) אם נבנה על הצלעות AB ו-AC כלפי חוץ משולשים ישרי-זווית ושווי-שוקיים, הזווית AFE תהיה בת 135° (במקרה זה המשולשים BAE ו-DAC לא יהיו חופפים אלא דומים בלבד).

לעולם חוצה זווית

בהינתן שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה A, כל מיתר BC במעגל הגדול המשיק למעגל הקטן, משיק לו בנקודה, כך שהקטע המחבר את A עם נקודת ההשקה חוצה את הזווית BAC (13) (איור 14).



איור 14

הוכחה:

נסמן ב-D את נקודת ההשקה ונעביר את המשיק המשותף EF, (איור 15). נחבר גם את המיתרים DH ו-DG במעגל הקטן. נקבל, בהיסתמך על שוויון זוויות בין משיק למיתר לבין הזוויות ההיקפיות המתאימות להן :

$$\angle GAF=\angle GDA=\angle CBA=\alpha$$

$$\angle HAE=\angle HDA=\angle BCA=\theta$$

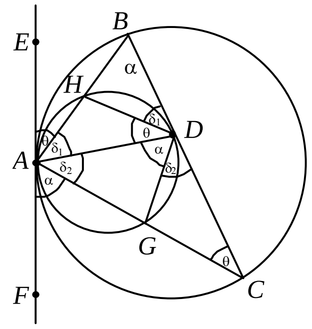
$$\angle BDH=\angle DAH=\delta_1$$

$$\angle CDG=\angle DAG=\delta_2$$

כמו כן $\angle BDA$ חיצונית למשולש ADC, לכן :

$$\theta+\delta_1=\theta+\delta_2\Rightarrow\delta_1=\delta_2$$

מ.ש.ל.

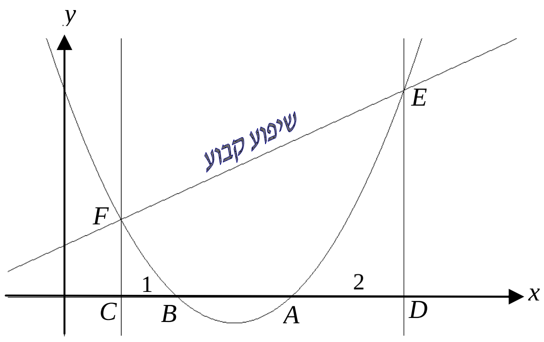


איור 15

שיפוע קבוע

פרבולה ונקודות חיתוך

בהינתן גרף של פונקציה מהמשפחה : $y=x^2+px+q$ שיפוע המיתר EF, המתקבל בדרך המתוארת בהמשך, הוא קבוע ושווה ל-1. הנקודות E ו-F הן נקודות החיתוך של הפרבולה עם אנכים לציר ה-x בנקודות C ו-D. הנקודה C נמצאת על ציר ה-x במרחק יחידה אחת משמאל לנקודת החיתוך השמאלית של הפרבולה עם ציר ה-x (B), והנקודה D נמצאת על הציר ה-x במרחק שתי יחידות מימין לנקודת החיתוך הימנית שלה (A) (איור 16) (14).



איור 16

הוכחה:

$$x_D-x_C=(x_A+2)-(x_B-1)=x_A-x_B+3$$

$$y_D-y_F=(x_D^2+px_D+q)-(x_C^2+px_C+q)=$$

$$x_D^2-x_C^2+p(x_D-x_C)=(x_D-x_C)(x_D+x_C+p)$$

$$m_{FE}=\frac{y_D-y_F}{x_D-x_C}=x_D+x_C+p=x_A+2+x_B-1+p=$$

$$=x_A+x_B+1+p$$

לפי משפט ויטה $x_A+x_B=-p$ ומכאן,

$$m_{EF}=-p+p+1=1$$

מ.ש.ל.

הערה : ניתן להוכיח את הטענה ללא שימוש באלגברה,

תוך הישענות על העובדה שכל הפרבולות במשפחה הנ"ל חופפות זו לזו, בפרט לפרבולה: $y = x^2$.

נקודה קבועה על ציר ה-x

פרבולה

בהינתן משפחת הפונקציות: $y = 3mx^2 - (6m-1)x - 2$

אחת משתי נקודות החיתוך של הפרבולות השונות אשר במשפחה, עם ציר ה-x נשמרת תחת שינוי של הפרמטר m. הנקודה הקבועה היא: $(2,0)$. נקודת החיתוך השנייה משתנה בהתאם לערך של m (איור 17).

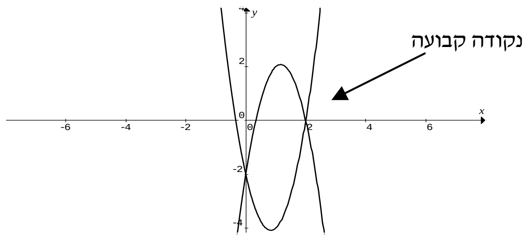
לצורך ההוכחה ניתן לפתור את המשוואה הריבועית:

$$3mx^2 - (6m-1)x - 2 = 0$$

אם ידועה הנקודה הקבועה, אפשר להיעזר בחילוק פולינומים (נושא מודגש כעת בבחינת הבגרות) ולקבל בקלות:

$$3mx^2 - (6m-1)x - 2 = (x-2)(3mx+1)$$

ומכאן הטענה ברורה.



איור 17

פרבולה, ישר ואנך

בהינתן הפרבולה $y^2 = 2px$, המיתר הנמתח בין נקודות החיתוך של הפרבולה עם הישרים המאונכים:

$$y = mx \quad \text{ו-} \quad y = -\frac{1}{m}x$$

חותך את ציר ה-x בנקודה קבועה $(2p,0)$, אשר שיעוריה אינם תלויים בערכו של הפרמטר m (איור 18) (15).

הוכחה:

מציאת הנקודה A:

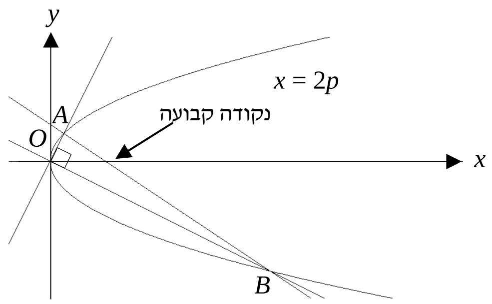
$$y^2 = 2px = (mx)^2 \Rightarrow x_A = \frac{2p}{m^2}, y_A = mx_A = \frac{2p}{m}$$

מציאת הנקודה B:

$$y^2 = 2px = (-\frac{1}{m}x)^2 \Rightarrow x_B = 2pm^2, y_B = -\frac{1}{m}x_B = -2pm$$

משוואת הישר עליו מונח הקטע AB על סמך שיעורי הנקודות A ו-B היא: $y + 2pm = \frac{m}{1-m^2}(x - 2pm^2)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה-x, נציב $y = 0$ ונקבל: $x = 2p$, כלומר שיעורי נקודת החיתוך אינם תלויים בשיפועי המיתרים המאונכים, אלא רק בפרבולה.



איור 18

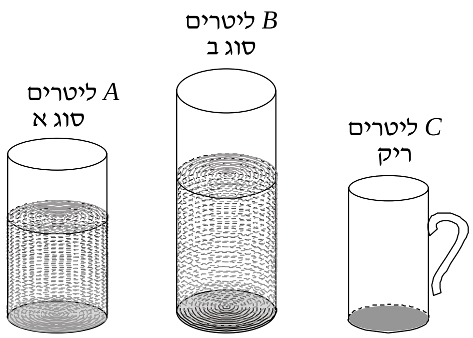
שוויון כמויות

שוויון כמויות בערבוב נוזלים

בהינתן שני כלים – כלי ראשון ובו A ליטרים של נוזל מסוג אחד (א'), וכלי שני ובו B ליטרים של נוזל מסוג אחר (ב') – מעבירים נוזלים בין הכלים באופן הבא: בעזרת כלי שלישי שנפחו C ליטרים, מעבירים C ליטרים של נוזל מהכלי הראשון לכלי השני. מערבבים את הנוזל בכלי השני ולאחר מכן מעבירים באמצעות הכלי השלישי C, ליטרים מהכלי השני לראשון.

נכנה את הפעולה שתוארה לעיל בשם 'מחזור שלם'. ניתן לחזור על הפעולה. תופעה בעלת גוון של שימור, המתגלה כאן היא: בסוף כל מחזור שלם הכמות של הנוזל המקורי מהכלי הראשון (סוג א') הנמצאת בכלי השני, שווה לכמות של הנוזל המקורי מהכלי השני (סוג ב') הנמצאת בכלי הראשון.

באיור 19 נראה איור של המצב הראשוני.



איור 19

הוכחה:

כלי ראשון

מצב ראשוני: A ליטרים מסוג א.

לאחר העברה לכלי השני: $A-C$ ליטרים מסוג א.

כלי שני

מצב ראשוני: B ליטרים מסוג ב.

לאחר העברה מהכלי הראשון: B ליטרים מסוג ב ו- C ליטרים מסוג א.

כמויות יחסיות: $\frac{B}{B+C}$ מסוג ב ו- $\frac{C}{B+C}$ מסוג א.

לאחר העברה מהכלי השני לראשון: נותר בכלי השני נוזל מסוג א שכמותו $C-\left(\frac{C}{B+C}\right)\cdot C=\frac{C\cdot B}{B+C}$.

כלי ראשון

מהכלי השני הועברו לכלי הראשון C ליטרים של נוזל מעורב. הכמות של נוזל מסוג ב שהועברה לכלי הראשון היא: $\left(\frac{B}{B+C}\right)\cdot C$ כלומר: $\frac{C\cdot B}{B+C}$

המסקנה: בתום המחזור הראשון, הכמות של הנוזל מסוג ב הנמצאת בכלי הראשון שווה לכמות של הנוזל מסוג א הנמצאת בכלי השני. ברור כי גם בתום כל מחזור נוסף יהיה שוויון בין הכמות של נוזל מסוג א בכלי השני לכמות של הנוזל מסוג ב בכלי הראשון, אולם הכמויות אינן קבועות. כמות הנוזל מסוג א בכלי השני עולה ככל שמבצעים יותר מחזורים, כמו גם כמות הנוזל מסוג ב בכלי הראשון. בתום מספר רב של מחזורים ייפסקו השינויים בהרכב הנוזלים בכל אחד מהכלים, ויתקבל הרכב אחיד בשניהם. ההרכב האחיד נקבע על-פי הכמויות ההתחלתיות: A ו-B בכל אחד מהכלים. אם: $A=B$ אזי בשלב הסופי ההרכב בכל כלי יהיה 50% מכל סוג נוזל.

הערה: ראוי לציין שבתום כל מחזור, אין שימור של הכמויות המקוריות של הנוזלים בכל כלי, אך מתקבל שוויון בין הכמויות של הנוזלים המקוריים שהועברו מכלי לכלי. בדומה לכלים שלובים של נוזלים גם כאן מקבלים שוויון כמויות.

שוויון במספר מטבעות – אנלוגיה לערבוב נוזלים

בדומה למשימה הקודמת, בה הועברה כמות קבועה של נוזל מכלי A לכלי B ולאחר ערבוב, עברה אותה כמות של נוזל מכלי B לכלי A.

הפעם מונחים על שולחן שני סוגי מטבעות: 60 מטבעות מסוג א' בצד ימין של השולחן ומופרדות מהן (על-ידי מחיצה נמוכה) 40 מטבעות מסוג ב' בצד שמאל של השולחן.

אדם שעיניו מכוסות מעביר 10 מטבעות מסוג א' לצד שמאל של השולחן ומערב אותן היטב עם המטבעות מסוג ב'. לאחר מכן הוא מעביר 10 מטבעות מצד שמאל של השולחן לצד ימין ומערבב אותן היטב עם המטבעות מסוג א'.

בקירוב טוב, בתום כל מחזור מספר המטבעות של סוג א' הנמצאות בצד שמאל שווה למספר המטבעות מסוג ב' הנמצאות בצד ימין.

לאחר הפעלה של מספר גדול של מחזורים, יהיו 24 מטבעות מסוג א' בצד שמאל ו-24 מטבעות מסוג ב' בצד ימין. נסו והיווכחו!

סיכום

במאמר הוצגו דוגמאות מגוונות מתחומים השונים של המתמטיקה, בהן משנים גודל אחד או יותר ולמרות השינויים נשמרים גדלים אחרים, כגון: שטח, היקף, מרחק (סכום מרחקים), זווית, שיפוע, כמויות ועוד. הקורא מוזמן לחפש דוגמאות נוספות.

לצורך גילוי התכונות השמורות, מומלץ לבצע עם התלמידים פעילויות במעבדת מחשבים, במהלכן יוכלו הם בעצמם לבצע את השינויים ולחוש את השמירה על הגדלים הקבועים. הדגמות מסוג זה, השייכות לתוכניות הלימודים במתמטיקה, מזמנות מבט אחר על המתמטיקה ועל יופייה ומאפשרות עיצוב עמדה אוהדת יותר כלפיה אצל התלמידים.

רשימת מקורות

1. סטופל, מ' (תש"ס). שנתון אמי"ת – רשת מוסדות חינוך בישראל, עמ' 159
2. גזית, א' (תשס"ב). מת לחשוב 10!, חולון, יסוד, שאלה 41, עמ' 22.
3. ארז, ב"צ (תשמ"ה). לתפוס ראש, תל-אביב, תמר, שאלה 184, עמ' 82
4. בירנבוים, ע' (תשנ"ז). מספר חזק, חידות ואתגרי חשיבה, תל-אביב, תמר, שאלה 63, עמ' 25
5. בן-יהודה, ח' (תשס"ג). חד וחלק, תל-אביב, אורנית, שאלה 92, עמ' 39
6. גורן, ב' (תשס"ג). חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי, ספר לימוד, תל-אביב, הוצאת המחבר, שאלה 153, עמ' 151
7. יקואל, ג' (תשס"א). מבחני מתכונת במתמטיקה לתלמידי 5 י"ל, קרית ביאליק, משבצת, בעיה 7, עמ' 14 (בשינוי)
8. גורן, ב' (תשמ"ו). גיאומטריה של המישור – ספר לימוד, תל-אביב, מישלב, בעיה 53, עמ' 204
9. גורן, ב' (תשמ"ו). גיאומטריה של המישור – ספר לימוד, תל-אביב, מישלב, בעיה 19, עמ' 195 (בשינוי)
10. אבירי, ח' (תשל"ב). גיאומטריה אנליטית, תל-אביב, מישלב, פרק מקומות גיאומטריים, בעיה 19, עמ' 63
11. סטופל, מ', מוגילבסקי, ר' (תשנ"ט). משימות הוכחה בהנדסה המתבססות על בנייה חלופית, שאנן, ה', שנתון המכללה הדתית לחינוך, חיפה, משימה 7, עמ' 192
12. אבירי, ח' (תשל"ג). מבחר בעיות בהנדסה בגרות, רביב, בעיה 26, עמ' 70
13. יוז, ל' (תשס"ב). הנדסת המישור, קרית מוצקין, גוטנברג, בעיה 25, עמ' 22
14. מקור מס' 7, בעיה 10 עמ' 118
15. מקור מס' 7, בעיה 11, עמ' 238 (בשינוי)