הנושא: תגובה למאמר: "הוכחה בדרך אחרת"

הוכן ע"י: מארק אפלבאום, פטר סמובול.

תקציר: במאמר מובאות טענות מתמטיות והוכחות להן. הטענות המובאות הן כאלה אשר נהוג להוכיחן באמצעות אינדוקציה מתמטית. ההוכחות המצגות במאמר אינן נשענות על רעיון זה. מן הפתרונות המצוגים ניתן לאמץ דרכים גם לפתרון שאלות אחרות.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 35, הוכחה, אלגברה-סדרות, סדרה כללית, סדרה חשבונית, כלל נסיגה, סכום, תכונות התחלקות, חשבון דיפרנציאלי, זהויות טריגונומטריות, טריגונומטריה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 35, תשס"ו 2005, עמודים 82-80.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

קוראים כותבים

תגובה למאמר: "הוכחה בדרך אחרת"

מארק אפלבאום mark@kaye.ac.il

פטר סמובול pet12@012.net.il

המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר שבע

אין ספק ששיטת ה"הוכחה באינדוקציה מתמטית" היא אחד הכלים החזקים והיעילים במתמטיקה ואין עוררין על הכוח של הרעיון הלוגי המוביל שיטה זו.

בגיליון על"ה 31, תשס"ד, התפרסם המאמר "הוכחה בדרך אחרת" בו הציג המחבר, פתחי סאלח, דרכים חליפיות להוכחות של טענות המופיעות במבחני בגרות כמתאימות להוכחה באינדוקציה מתמטית. ברצוננו להציג דוגמאות נוספות של הוכחות "בדרך אחרת".[1]

אנו מזמינים את הקוראים לא רק להכיר את ה"דרך אחרת", אלא גם להשוות בין השיטות השונות של הפתרון, במסגרת אותה בעיה.

שימוש בסדרות

טענה: לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\ldots+ +(2n-1)2+(2n)^2=\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(7n+1)}{6}$$

הוכחה

נשתמש בסכום הריבועים:

$$S_n^{(2)}=1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}\cdot(n+1)\cdot(2n)$$

מכאן:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(2\cdot n)^2=S_{2\cdot n}{}^{(2)}-S_n^{(2)}=$$
$$=\frac{2\cdot n}{6}\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)-\frac{n}{6}\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)=$$
$$=\frac{n}{6}\cdot(2\cdot n+1)(7\cdot n+1)$$

מ.ש.ל.

טענה: לכל n טבעי מתקיים:

אם: $a_1=2,\ a_{n+1}=(a_n+3\cdot n^2+3\cdot n)$

אז: $a_n=n^3-n+2$

הוכחה[2]

ניעזר בכלל הנסיגה. נרשום את n האיברים הראשונים של הסדרה בטור ונסכם:

$$\begin{cases} a_1=2, \\ a_2=a_1+3\cdot1^2+3\cdot1, \\ a_3=a_2+3\cdot2^2+3\cdot2 \\ \vdots \\ a_n=a_{n-1}+3\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1) \end{cases}$$

אחרי סיכום בטור וביטול איברים זהים משני צידי השוויון, נקבל:

$$a_n=2+3(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)+$$
$$+3\cdot(1+2+\ldots+(n-1))=$$
$$=2+3\cdot\frac{n-1}{6}\cdot n\cdot(2n-1)+3\cdot\frac{1+n-1}{2}\cdot n=$$
$$=n^3-n+2$$

מ.ש.ל.

טענה: לכל n טבעי מתקיים: $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\ge n!$

הוכחה

נזכור כי: $\frac{1}{2}n(n-1)=1+2+3+\ldots+(n-1)$ וניעזר בחוקי החזקות. נוכל לכתוב את האגף השמאלי של האי-שוויון כך:

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}=2^{[1+2+3+\ldots+(n-1)]}=2\cdot2^2\cdot2^3\cdot\ldots\cdot2^{n-1}$$

[1] הדוגמאות לקוחות מהספר: אפלבאום מ., סמובול פ. (2004), מתמטיקה מתיכון לאוניברסיטה – חלק א': אינדוקציה, ספר לכל. בספר מופיעות דוגמאות נוספות.

[2] שיטת ההוכחה המוצגת כאן נכונה לכל טענה העוסקת במעבר מכלל נסיגה להגדרה לפי מקום, כאשר כלל הנסיגה הוא מהצורה: a_1, $a_{n+1}=1\cdot a_n+k\cdot n^2+l\cdot n+m\cdot b^n$, כאשר k,l,m קבועים ממשיים.

כעת נותר להוכיח: $2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^{n-1}\ge 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$

כלומר, מספיק להוכיח כי לכל k טבעי: $2^k\ge k+1$

(פרט למספר 1, המופיע כגורם כופל באגף ימין, קיימת התאמה חד-חד ערכית בין הגורמים של המכפלות בשני האגפים של האי-שיוויון). ואמנם:

$$2^k=(1+1)^k=1^k+k\cdot 1\cdot 1+\ldots+1^k\ge k+1$$

(למעשה השוויון יתקיים רק עבור $k=1$)

מ.ש.ל.

שיטת ניסוי וטעייה

טענה: הביטוי (n^5-n) מתחלק ב-30 לכל n טבעי.

הוכחה

נפרק את הביטוי (n^5-n) לגורמים:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)$$

המכפלה: $n\cdot(n-1)\cdot(n+1)$ מכילה מספר זוגי אחד לפחות ומספר אחד בדיוק המתחלק בשלוש, לכן היא מתחלקת ב-6 לכל n טבעי. נשאר להוכיח כי (n^5-n) מתחלק ב-5. אם מספר טבעי n מסתיים באחת מהספרות: 1,0,4,5,6 או 9 אז המכפלה $n\cdot(n-1)\cdot(n+1)$ מתחלקת ב-5. אם מספר טבעי n מסתיים באחת מהספרות: 2, 3, 7, 8 אז המספר (n^2+1) מסתיים בספרה 5 ומכאן המכפלה $n\cdot(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)$ מתחלקת ב-5.

מ.ש.ל

טענה: הביטוי (n^4-1) מתחלק ב-16 לכל n טבעי אי- זוגי.

הוכחה

$$(n^4-1)=(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)$$

מהעובדה שהמספר n הוא אי-זוגי נובע ש- $(n-1)$ ו- $(n+1)$ הם שני מספרים זוגיים עוקבים ומכאן המכפלה $(n+1)\cdot(n-1)$ מתחלקת ב-8.

כעת נותר להוכיח כי (n^2+1) מתחלק ב-2.

טענה זו נובעת מכך ש-n מספר אי- זוגי, ומכאן n^2 גם הוא אי- זוגי ו- (n^2+1) מספר זוגי.

מ.ש.ל.

התחלקות ושקילויות

טענה: לכל n טבעי השארית בחילוק של $A(n)=(2\cdot 10^n+1)$ ב-9 היא 3.

הוכחה א

נתבונן במחובר הראשון. היות ו- $10\equiv 1(\bmod 9)$, מתקיים גם: $10^n\equiv 1(\bmod 9)$

נתחשב בכך ש- $1=1^n$ נקבל:

$$10^n\equiv 1(\bmod 9)\Leftrightarrow 2\cdot 10^n\equiv 2\cdot 1(\bmod 9)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot 10^n+1\equiv 3(\bmod 9)$$

כלומר, בחלוקה ב-9 של הביטוי: $(2\cdot 10^n+1)$ נשארת שארית 3.

מ.ש.ל.

הוכחה ב

כדי להוכיח שהביטוי $A(n)=(2\cdot 10^n+1)$ משאיר שארית 3 בחלוקה ב-9 מספיק להוכיח כי הביטוי: $B(n)=(2\cdot 10^n+1-3)$ מתחלק ב-9 ללא שארית.

$$\frac{B(n)}{9}=\frac{2\cdot 10^n+1-3}{9}=\frac{2\cdot(10^n-1)}{9}=$$
$$=\frac{2\cdot(10-1)\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}\ldots+1)}{9}=$$
$$=\frac{2\cdot 9\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}\ldots+1)}{9}=2\cdot(10^{n-2}+10^{n-2}\ldots+1)$$

מ.ש.ל.

שימוש בתכונות שברים

טענה: לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\frac{2}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{2}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{3n+2}$$

ההוכחה מבוססת על השוויון:

$$\frac{m}{n\cdot(n+k)}=\frac{m}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$$

לפיו נקבל:

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)=$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{n}{3n+2}$$

טענה: לכל n טבעי מתקיים:

$$(1-\frac{2}{n+2})\cdot(1-\frac{2}{n+4})\cdot(1-\frac{2}{n+6})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{2}{3n+2})=$$
$$=\frac{n}{3n+2}$$

הוכחה

נפשט את הביטויים בתוך הסוגריים ונקבל אחרי הצמצום:

$$\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+4}\cdot\frac{n+4}{n+6}\cdot\ldots\cdot\frac{3n}{3n+2}=\frac{n}{3n+2}$$

מ.ש.ל.

טענה: לכל מספר טבעי n הגדול מ-1 מתקיים:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

הוכחה

נשים לב כי לכל n טבעי גדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n\cdot(n-1)} \quad ; \quad \frac{1}{n\cdot(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

נקבל:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+...+$$

$$+\frac{1}{n\cdot(n-1)}=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=$$

$$=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}$$

מ.ש.ל.

טענה: לכל מספר טבעי n הגדול מ-2 מתקיים:

$$2^n+3^n+4^n<5^n \qquad (*)$$

הוכחה

נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=3$, נקבל:

$$2^3+3^3+4^3<5^3$$

$$99<125$$

רואים שהאי-שוויון מתקיים עבור $n=3$.

כעת נחלק את שני האגפים של האי-השוויון ב- $5^n\neq0$ נקבל:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n<1 \qquad (**)$$

אי שוויון זה מתקיים עבור $n=3$ כשקול לאי-שוויון (*). עבור כל n גדול מ-3 הערך שיקבל האגף השמאלי של האי-שוויון יהיה קטן מערכו עבור $n=3$, שכן כל אחד מהמחוברים באגף זה הוא מספר בין 0 ל-1.

מ.ש.ל.

שימוש בחשבון דיפרנציאלי

טענה: לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+4\cdot2^4+...+$$
$$+(2\cdot n+1)\cdot2^{2n+1}=2+n\cdot2^{2\cdot n+3}$$

הוכחה

נסמן את הסכום:

$$A(n)=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+4\cdot2^4+...+(2\cdot n+1)\cdot2^{2\cdot n+1}$$

מכאן, אחרי חילוק ב-2 של שני אגפי השוויון, נקבל:

$$\frac{A(n)}{2}=1+2\cdot2^1+3\cdot2^2+4\cdot2^3+...+(2\cdot n+1)\cdot2^{2\cdot n}$$

כעת נחליף בצד ימין של השוויון את הבסיס 2 של החזקות ל-x ונקבל את הפונקציה הבאה:

$$f(x)=1+2\cdot x^1+3\cdot x^2+4\cdot x^3+...+(2\cdot n+1)\cdot x^{2\cdot n}$$

(למעשה, $f(2)=\frac{A(n)}{2}$).

ניתן לראות כי הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה הבאה:

$$F(x)=x+x^2+x^3+x^4+...+x^{2\cdot n+1},\ f(x)=F'(x)$$

$F(x)$ היא פולינום אשר המחוברים בו מהווים סדרה הנדסית. מכאן, לפי הנוסחה למציאת סכום של סדרה הנדסית, ובהמשך, על-פי נגזרת של פונקצית מנה, נקבל:

$$f(x)=(x+x^2+x^3+...+x^{2n+1})'=$$

$$=\left(\frac{x\cdot(x^{2n+1}-1)}{x-1}\right)'=\left(\frac{x^{2n+2}-x}{x-1}\right)'=$$

$$\frac{\left[(2n+2)\cdot x^{2n+1}-1\right]\cdot(x-1)-(x^{2n+2}-x)}{(x-1)^2}$$

נזכור כי $x=2$ נקבל:

$$\frac{A(n)}{2}=f(2)=(2n+2)\cdot2^{2n+1}-1-2^{2n+2}+2=$$

$$=(n+1)\cdot2^{2n+2}-2^{2n+2}+1=n\cdot2^{2n+2}+1$$

ומכאן, נקבל:

$$A(n)=2\cdot f(2)=2+n\cdot2^{2\cdot n+3}$$

מ.ש.ל.

שימוש בזהויות טריגונומטריות

טענה: לכל n טבעי מתקיים:

$$\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\cos4\alpha\cdot...\cdot\cos2^{n-1}\alpha=\frac{\sin2^n\alpha}{2^n\sin\alpha}$$

הוכחה

נכפול את אגף שמאל ב- $1=\frac{2\sin\alpha}{2\sin\alpha}$ ונקבל:

$$\frac{2\sin\alpha}{2\sin\alpha}\cdot\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\cos4\alpha\cdot...\cdot\cos2^{n-1}\alpha$$

נזכור כי מתקיים: $\sin2\alpha=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

כך נוכל מעט להתקדם ולקבל באגף שמאל את הביטוי:

$$\frac{1}{2\sin\alpha}\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\cos4\alpha\cdot...\cos2^{n-1}\alpha$$

נחזור ונכפול את המונה ואת המכנה $(n-1)$ פעמים ב-2 ונקבל את הדרוש.

מ.ש.ל.