



הנושא: שלשות פיתגוריות ויותר מזה על מקביליות ומרובעים נוספים שמידות האורך של צלעותיהם ואלכסוניהם הן מספרים שלמים

הוכן ע"י: אבי סיגלר.

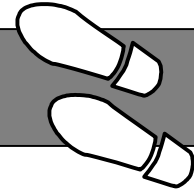
תקציר: במאמר חקירה מתמטית של שלשות פיתגוריות פרימיטיביות מנקודת מבט גיאומטרית. משפט פיתגורס ניתן לניסוח גם בדרך הבאה: קיימים אינסוף מלבנים שונים (לא דומים), אשר מידות האורך של צלעותיהם ואלכסוניהם הן מספרים טבעיים. שאלות החקר בהן עוסק המאמר הנובעות מן האסטרטגיה "מה אם לא?" הן: האם קיימות מקביליות (שאינן מלבנים) בעלות אותה תכונה? אם כן, כמה מקביליות כאלה יש שאינן דמות זו לזו? (מה אם לא 90°)? ואילו מרובעים אחרים כאלה יש?

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 35, שאלות חקר, חקירה מתמטית, מה אם לא?, פיתגורס, שלשה פיתגורית, משוואה דיופנטית, משולש, משולש ישר זווית, מלבן, מקבילית, מרובע, דלתון, טרפז, מרובע חסום במעגל, צלע, אלכסון, תורת המספרים, גיאומטריה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 35, תשס"ו 2005, עמודים 6-11.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

חקירה מתמטית



שלשות פיתגוריות ויותר מזה על מקביליות ומרובעים נוספים שמידות האורך של צלעותיהם ואלכסוניהם הן מספרים שלמים

אבי סיגלר

ביה"ס הטכני של חיל-האוויר, חיפה

מבוא

הגיאומטריה ותורת המספרים היו עיקר עיסוקם של המתמטיקאים ביוון העתיקה. אוקלידס, בספרו מעורר ההערצה ELEMENTA הקדיש פרקים לשני הנושאים ושילב ביניהם בהוכחה שסיפק לטענה שיש אינסוף שלשות פיתגוריות פרימיטיביות¹.

אפשר להסתכל על קיום אינסוף שלשות פיתגוריות פרימיטיביות מנקודת מבט גיאומטרית גם בדרך הבאה: קיימים אינסוף מלבנים שונים (לא דומים), אשר מידות האורך של צלעותיהם ואלכסוניהם הן מספרים טבעיים. שאלה טבעית היא: האם קיימות מקביליות (שאינן מלבנים) בעלות אותה תכונה? אם כן, כמה מקביליות כאלה יש שאינן דמות זו לזו? (מה אם לא 90°). אפשר, כמובן, גם להמשיך לשאול: "מה אם לא מקביליות?"

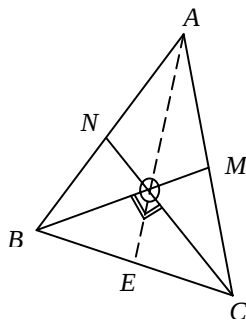
במאמר זה תינתן תשובה לשלוש השאלות.

שתי בעיות שקולות ובנית דוגמה של מקבילית שמידות האורך של צלעותיה ואלכסוניה הן מספרים טבעיים

בעיה 1

אם במשולש ABC ,
התיכונים BM ו- CN

מאונכים זה לזה,
אז קיים: $(1) AB^2 + AC^2 = 5BC^2$

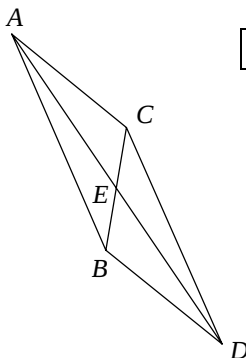


בעיה 2

אם במקבילית $ABCD$ מתקיים: $AD = 3 \cdot BC$

אז קיים:

$$AB^2 + AC^2 = 5BC^2$$



פתרון 1

התיכונים במשולש ABC נפגשים בנקודה O .
ידוע: $AO = 2OE$. אבל המשולש BOC ישר-זווית ב- O ,
לכן $BC = 2OE$. ולכן: $BC = AO$.
ידועה הנוסחה לחישוב אורך תיכון במשולש אם נתונים האורכים של צלעותיו. במקרה שלנו:

¹ שלשה פיתגורית פרימיטיבית היא שלשה פיתגורית, אשר כל מרכיביה זרים זה לזה. כדאי לראות גם:

<http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html>

$$n = 4, \quad m = 3, \quad a = 5$$

$$\begin{cases} b = 10 \\ a = 5 \\ c = 5 \end{cases} \quad \text{נקבל:}$$

אך עלינו לדאוג גם ליצירת משולש. כאן: $a + c = b$
ולכן לא ניתן ליצור משולש. גם הבחירה $n = 3, m = 4$
אינה מתאימה.

נעבור לשלשה פיתגורית נוספת (5,12,13) ונקבל:

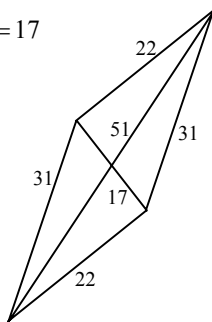
$$\begin{cases} b = 22 \\ c = 19 \\ a = 13 \end{cases}$$

לכן קיבלנו את המקבילית הרצויה שמידות האורך של
צלעותיה הן: 22 ו-19 ושל אלכסוניה: 13 ו-39.

שיטה לבניה של אינסוף מקביליות רצויות

נבדוק שלשה פיתגורית אחרת (8,15,17). נקבל:

$$\begin{cases} b = 31 \\ c = 22 \\ a = 17 \end{cases}$$



והרי לנו עוד מקבילית רצויה:

השלשה הפיתגורית מן הדוגמה האחרונה, (8,15,17)
היא מן הצורה $(4k, 4k^2 - 1, 4k^2 + 1)$ (כ טבעי). שלשה
מסוג זה יוצרת את השלשה (b, c, a) :

$$\begin{cases} b = 4k^2 + 8k - 1 \\ c = 8k^2 - 4k - 2 \\ a = 4k^2 + 1 \end{cases}$$

קל להוכיח שעבור $k > 3$ מתקיים $c + b > a$, כלומר
השלשה (b, c, a) יוצרת משולש. כמו כן לא קשה
להוכיח שעבור $b > 3, k > 3$ טבעיים, השוויון:

$$\frac{4k^2 + 1}{8k^2 - 4k - 2} = \frac{4l^2 + 1}{8l^2 - 4l - 2}$$

מתקיים אם ורק אם $k = l$. לכן השלשות (b, c, a)
יוצרים משולשים לא דומים ולכן המקביליות הרצויות
הנגזרות משלשות אלה שונות בזוויותיהן.

$$AE^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$$

לכן:

$$AO^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 AE^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{9} = BC^2$$

ומכאן:

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 5BC^2}$$

פתרון 2

ידועה התכונה של המקבילית: סכום הריבועים של
אורכי הצלעות שווה לסכום הריבועים של אורכי
האלכסונים. לכן מתקיים:

$$2AB^2 + 2AC^2 = AD^2 + BC^2$$

אבל במקרה שלנו $AD = 3BC$, לכן:

$$2AB^2 + 2AC^2 = 9BC^2 + BC^2$$

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 5BC^2}$$

כלומר:

שקילות שתי הבעיות מבהירה שמציאת משולש
שמידות האורך של צלעותיו ושל אחד התיכונים הן
מספרים טבעיים (אפילו רציונאליים), פירושה מציאת
מקבילית בעלת התכונה הרצויה. מעתה והלאה,
למרובע שמידות האורך של צלעותיו ואלכסוניו הן
מספרים טבעיים נקרא 'מרובע רצוי'.

על סמך הבעיה השנייה, נבנה דוגמה למקבילית רצויה
שאלכסונה AD אורך פי שלושה מאלכסונה BC. (מקובל
בבדיקת השערה 'להעמיס' את הבעיה בנתון נוסף
וליצור מקרה פרטי). המשימה כרגע שייכת לתורת
המספרים. עלינו לפתור במספרים טבעיים את
המשוואה הדיופנטית: $b^2 + c^2 = 5a^2$ ולדאוג
שהקטעים a, b, c יצרו משולש.

$$b^2 + c^2 = 5a^2 \quad \text{פתרון המשוואה הדיופנטית:}$$

תחילה נסלק את המקדם מן האגף הימני על-ידי
ההצבה:

$$\begin{cases} b = 2m + n \\ c = 2n - m \end{cases}$$

ואז:

$$(2m + n)^2 + (2n - m)^2 = 5a^2$$

$$5m^2 + 5n^2 = 5a^2$$

$$\boxed{(3) \quad m^2 + n^2 = a^2}$$

כך נולדה שלשה פיתגורית: (m, n, a) ממשוואה (2).

נבחר לדוגמה את השלשה הפיתגורית:

כך הוכחנו כי :

$$(a, b, c) = (t(p+q) + q - p, t(p-q) + p + q, 2\sqrt{p^2 + q^2})$$

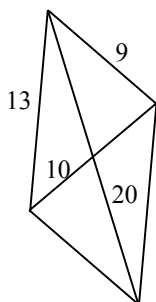
מקיימת את המשוואה הדיופנטית :

$$2a^2 + 2b^2 = (t^2 + 1)c^2$$

(אם a או b שליליים, ניקח ערכים מוחלטים).

ניצור שלשה (a, b, c) עבור $t = 2$. נבחר $p = 3, q = 4$
ואז : $(a, b, c) = (13, 9, 10)$

והמקבילית הרצויה היא :



לא ארחיב לגבי תנאים נוספים על t, p ו- q , הנדרשים לכך ש : (a, b, c) ייצגו אורכים של צלעות משולש.

הצגת קבוצה של מקביליות רצויות עם יחס רציונאלי בין אורכי האלכסונים

נפתור את המשוואה הדיופנטית :

$$2a^2 + 2b^2 = c^2 + d^2$$

$$a = x + y, b = x - y$$

נציב :

$$4x^2 + 4y^2 = c^2 + d^2$$

ונקבל :

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

או :

$$x^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - y^2$$

לכן :

$$(5) \left(x - \frac{d}{2}\right) \left(x + \frac{d}{2}\right) = \left(\frac{c}{2} - y\right) \left(\frac{c}{2} + y\right)$$

או :

זהו פירוק לגורמים של מספר בשני אופנים שונים :

נבחר פירוק פשוט :

$$x + \frac{d}{2} = pq, x - \frac{d}{2} = 1, \frac{c}{2} + y = q, \frac{c}{2} - y = p$$

$$(2 > q, p, q > 1)$$

$$y = \frac{q-p}{2}, c = p+q, d = pq-1, x = \frac{pq+1}{2}$$

לכן נקבל את הרביעייה :

$$\left(\frac{pq+q-p+1}{2}, \frac{pq+p-q+1}{2}, p+q, pq-1\right) = (a, b, c, d)$$

יש אינסוף מקביליות רצויות בעלות התכונה : אחד האלכסונים ארוך פי שלושה מן האלכסון השני.

ומה הלאה? האם יש גם אינסוף מקביליות רצויות אשר בהן היחס בין האלכסונים הוא מספר טבעי אחר?

מקביליות רצויות עם יחס אחר בין אורכי האלכסונים

נסמן את היחס בין אורכי האלכסונים ב- t . ונטפל במקבילית בעלת צלעות באורכים a ו- b ואלכסונים c ו- d כך ש : $d = tc$.

מתקיים :

$$2a^2 + 2b^2 = c^2 + t^2c^2$$

כדי לבדוק האם קיימת מקבילית רצויה כזו, עלינו לפתור את המשוואה הדיופנטית :

$$(4) 2a^2 + 2b^2 = (t^2 + 1)c^2$$

עבור $t = 1$ נקבל שלשה פיתגורית (מהי המשמעות?);

עבור $t = 3$ פתרנו בסעיף קודם.

כדי לחפש פתרונות נוספים נציב :

$$a = m + n, b = m - n$$

ונקבל :

$$(4^*) 4m^2 + 4n^2 = (t^2 + 1)c^2$$

$$2m = x, 2n = y$$

אם נסמן :

נקבל את המשוואה :

$$(4^{**}) x^2 + y^2 = (t^2 + 1)c^2$$

במטרה לבטל את המקדם $t^2 + 1$ נציב :

$$x = tp + q$$

$$y = tq - p$$

כך נקבל :

$$(4^{**}) p^2 + q^2 = c^2$$

לכן אם : (p, q, c) שלשה פיתגורית

$$n = \frac{tq-p}{2}, m = \frac{tp+q}{2}$$

אז :

ו-

$$c = \sqrt{p^2 + q^2}, b = \frac{t(p-q) + p + q}{2}, a = \frac{t(p+q) + q - p}{2}$$

אפשר, ללא הגבלת הכלליות, לכפול ב-2 לצורך ביטול המכנים, לכן השלשה :

מה אם לא מקבילות?

אעיר תחילה שאם נמצא מרובע, אשר מידות האורך של צלעותיו ושל אלכסונו הן מספרים רציונאליים, נוכל, על-ידי הכפלה במכנה המשותף, לקבל מרובע דומה שאורכי צלעותיו הם מספרים טבעיים. לכן מספיק להציג 'מרובעים רצויים' אשר מידות האורך של צלעותיהם ואלכסוניהם הן מספרים רציונאליים.

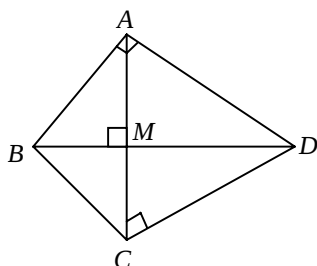
קבוצה א – דלתונים המורכבים משני משולשים ישרי-זווית, בעלי יתר משותף.

דוגמא:

$$AB = BC = 3$$

$$AD = CD = 4$$

$$BD = 5$$



במקרה זה AM גובה ליתר במשולש ישר זווית ומידת

אורכו היא: $\frac{12}{5}$ לכן $AC = \frac{24}{5}$, רציונאלי.

קבוצה ב – טרפזים שווי-שוקים בעלי בסיס, שוק ואלכסון אשר מידות האורך שלהם הן מספרים טבעיים.

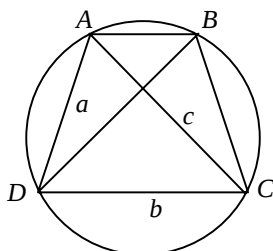
טענה: אם ABCD טרפז שווה-שוקיים ו-

$$AD = a, DC = b, AC = c$$

$$(8) \quad AB = \frac{c^2 - a^2}{b}$$

אז:

הוכחה: אפשר לחסום את הטרפז במעגל. לפי משפט תלמי קיים: $AB \cdot b + a \cdot a = c \cdot c$ ולכן (8) הוכח. ומכאן: אם a, b, c טבעיים, אז AB רציונאלי.



קבוצה ג – דלתונים המורכבים משני משולשים הרוניים חופפים (משולש הרוני – משולש בעל צלעות ושטח

או, ללא הגבלת הכלליות:

$$(6) \quad \begin{aligned} a &= pq + q - p + 1 \\ b &= pq + p - q + 1 \\ c &= 2(p + q) \\ d &= 2(pq - 1) \end{aligned}$$

קל מאוד להוכיח שאם: $p > q > 1$ אז: a, b, c, d

טבעיים. כמו כן:

$$0 < 2(p-1)(q-1) = 2pq + 2 - 2p - 2q = a + b - c$$

$$0 < 4q = a + c - b$$

$$0 < 4p = b + c - a$$

לכן a, b, c יוצרים משולש ו- d, c, b, a יוצרים מקבילית רצויה שהיחס בין מידות באורך של אלכסוניה הוא:

$$(7) \quad \frac{c}{d} = \frac{q+p}{pq-1}$$

נוכל לבנות כעת אינסוף מקבילות רצויות בהן היחס בין מידות האורך של האלכסונים הוא מספר רציונאלי.

טבלה 1 מציגה את הרביעיות (a, b, c, d) כאשר $p = 2$ ו- q מקבל ערכים שלמים מ-3 עד 10.

	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$
$a=3q-1$	8	11	14	17
$b=q+3$	6	7	8	9
$c=2q+4$	10	12	14	16
$d=4q-2$	10	14	18	22
$\frac{c}{d} = \frac{q+2}{2q-1}$	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{11}$
	$q=7$	$q=8$	$q=9$	$q=10$
$a=3q-1$	20	23	26	29
$b=q+3$	10	11	12	13
$c=2q+4$	18	20	22	24
$d=4q-2$	26	30	34	38
$\frac{c}{d} = \frac{q+2}{pq-1}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{17}$	$\frac{12}{19}$

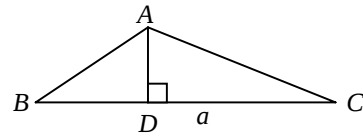
טבלה 1

במקרה ש: $p = 2$ מתקבל: $\frac{1}{2} + \frac{5}{2q-1} = \frac{q+2}{2q-1} = \frac{c}{d}$

לכן כש- q גדל, היחס $\frac{c}{d}$ קטן. כך קיבלנו שוב אינסוף

מקבילות רצויות שונות בהן היחס בין מידות האורך של האלכסונים הוא מספר רציונאלי.

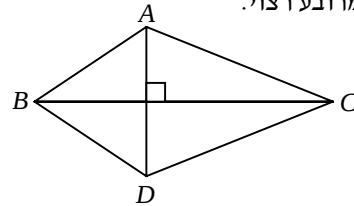
שמידותיהם הן מספרים טבעיים):



הוכחה: אם ABC משולש הרוני, אזי גובהו AD מקיים:

$$AD = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot 2}{a}$$

לכן מידת הגובה היא מספר רציונאלי. וכך הדלתון $ABCD$ הוא מרובע רצוי.



עד עתה הוצגו קבוצות של מרובעים רצויים די פשוטים (דלתונים, טרפזים שוי שוקיים). נציג קבוצה נוספת הקשורה למקביליות רצויות.

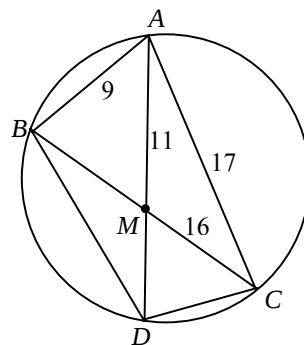
קבוצה ד – מרובעים חסומים במעגל בהם אלכסון אחד חוצה את האחר

נשתמש בשיטת ההוכחה **השקופה**² – נדגים את הבניה על מקרה פרטי, אשר ממנו ניתן בקלות להבין כיצד לבנות מרובע רצוי מכל מקרה פרטי מתאים אחר.

נבחר את המקבילית הרצויה:

$$(a, b, c, d) = (17, 9, 16, 22)$$

בציור, המשולש ABC מהווה חצי ממנה וצלעותיו: $BC = 16, AC = 17, AB = 9$. ואורך התיכון AM הוא 11.



נחסום את ABC במעגל ונמשיך את AM עד למפגש עם המעגל ב- D .

² שיטת ההוכחה השקופה תוארה במאמר: "הוכחות" שקופות, מאת נצה מובשוביץ-הדר, עלי"ה 31, עמ' 29-35.

טענה: $ABCD$ מרובע רצוי מקבוצה ד.

הוכחה: ברור ש: $AM \cdot MD = BM \cdot MC$. אם נציב את

$$MD = \frac{64}{11}$$

מתקיים: $AD = AM + MD$

לכן מידת האורך של AD היא מספר רציונאלי.

מדמיון המשולשים BMD ו- AMC נקבל:

$$\frac{BM}{BD} = \frac{AM}{AC}$$

$$\frac{8}{BD} = \frac{11}{17}$$

ולכן:

ומכאן גם מידת האורך של BD היא מספר רציונאלי.

באותה דרך ניתן להוכיח שמידת האורך של DC היא מספר רציונאלי.

קבוצות נוספות של מרובעים רצויים קיימות, אך לא ארחיב כאן עוד. אציין רק, שלא מצאתי דוגמה של מרובע 'ללא ייחוס מיוחד' שאורכי צלעותיו ואלכסונו הם מספרים טבעיים.

סיכום

המאמר עסק בעיקר בשיטות למציאת משפחות של מקביליות, שמידות האורך של צלעותיהם ואלכסוניהן הן מספרים טבעיים. ניתן לראות בכך הכללה לשלושת פיתגוריות, היוצרות תת-קבוצה של מקביליות רצויות – המלבנים. במאמר הוצגו שיטות לפתרון של משוואות דיפרנטיות מן הצורה:

$$2x^2 + 2y^2 = (t^2 + 1)z^2, \quad x^2 + y^2 = 5z^2 \quad (\text{טבעי } t)$$

$$2x^2 + 2y^2 = z^2 + w^2$$

בתהליך הפתרון של כל אחת מהמשוואות, אחרי הצבות שונות, התקבלו שלשות פיתגוריות. פתרון המשוואות הדיפרנטיות והתניית קיום אי-שוויון המשולש אפשרו מתן מענה מספק לשתי השאלות הראשונות, כלומר: קיימות אינסוף מקביליות (שאינן מלבנים) בעלות צלעות ואלכסונים, אשר מידות האורך שלהם הן מספרים טבעיים.

ניתנה תשובה חיובית לגבי קבוצות נוספות של מרובעים (שאינם מקביליות) בעלי אותה התכונה.

הערות דידקטיות

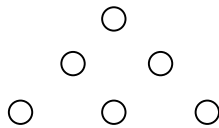
- המאמר משלב שיקולים גיאומטריים ושיטות פעולה של תורת המספרים.
- השאלות שנדונו קשורות להיסטוריה של המתמטיקה, כלומר לתרבות המקצוע.

שימוש מושכל בהערות הדידקטיות שצוינו, עשוי להגביר את העניין שימצאו התלמידים במקצוע ולשפר את יעילות הלימוד.

אסיים בשאלה שעדיין לא מצאתי לה תשובה:

האם קיימת מקבילית שאינה מלבן, אשר מידות האורך של צלעותיה, אלכסוניה ומידת שטחה הן מספרים טבעיים?

- השאלה החשובה "מה אם לא?" נשאלה פעמים רבות: "מה אם לא מלבנים?", "מה אם לא מקבילות?" "מה אם t אינו שלם אלא רציונאלי?" נעשה שימוש ב"הוכחה שקופה".
 - פרופ' שמואל אביטל ז"ל טבע את הסיסמה "מה עוד אפשר לשאול?". במאמר אפשר היה לשאול שאלות רבות נוספות. לדוגמא:
 - (1) עבור אילו ערכים של k (טבעי) למשוואה הדיופנטית: $x^2 + y^2 = kz^2$ יש פתרון?
 - (2) האם עבור כל t רציונאלי קיימת מקבילית רצויה שיחס אלכסוניה t ?
 - (3) האם קיים מרובע רצוי שאחת מזוויותיו היא 60° ?
- ועוד רבות נוספות.



משפט פיתגורס



בולים מתוך התערוכה
"מתמטיקה על בולי דואר"
המוצגת מטעם "קשר חם" בטכניון