



הנושא: אליפסה, היפרבולה ופרבולה מנקודת ראות מישורית ומרחבית

הוכן ע"י: חמוטל דוד.

תקציר: במאמר מובאות הוכחות לשקילות בין ההגדרות המישוריות כמקומות גיאומטריים של העקומים: אליפסה, היפרבולה ופרבולה, לבין הגדרותיהם כחתי חרוט. הדיון בשקילות מאשר, למעשה, את הזכות לכנות עקומים מישוריים, המצויים בהגדרה מישורית כמקום גיאומטרי, בשם המתייחס לצורה מרחבית – חרוט.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 35, היסטוריה של המתמטיקה, חתכי חרוט, מעגל, אליפסה, פרבולה, היפרבולה, חרוט, גיאומטריה, גיאומטריה אנליטית, גיאומטריה המרחב, כדור, חתך, מישור, מקום גיאומטרי, הגדרה, הגדרות שקולות, הוכחה, דנדלין, גלילאו.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 35, תשס"ו 2005, עמודים 32-37.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

אליפסה, היפרבולה ופרבולה

מנקודת ראות מישורית ומרחבית

חמוטל דוד¹

hamutal@tx.technion.ac.il

"קשר-חם", מוסד הטכניון למחקר ופיתוח
בית-הספר הריאלי העברי, חיפה

חקר עקומים אלה. את שמותיהם קיבלו מהמתמטיקאי והאסטרונום היווני אפולוניוס (190-262 לפנה"ס). כולם הכירו בעובדה שעקומים אלה הינם חתכים של חרוט, הוכחו טענה זו בשימוש בשיקולים גיאומטריים, וחקרו את תכונותיהם כצורות גיאומטריות במישור. אפולוניוס חקר בין השאר את תכונות המשיקים לעקומים אלה. תוצאות מחקריו פורסמו בשמונה ספרים הנקראים: 'חתכי-החרוט'. ארבעת הספרים הראשונים שרדו בשפת המקור ושבעת הספרים הראשונים תורגמו לערבית ושרדו עד ימינו. הספר השמיני לא שרד ולא הגיע אפילו לידיהם של המתמטיקאים בתקופה הערבית. במאות השש-עשרה והשבע-עשרה גלילאו (1564-1642), קפלר (1571-1630) וניוטון (1643-1727) גילו תכונות פיזיקליות ומכניות של עקומים אלה.

חתכי החרוט והגיאומטריה שלהם מלווים את המחקר המתמטי ואת הוראת המתמטיקה במשך שנים ארוכות ועד עצם היום הזה. כבר במסגרת הלימודים בבית-הספר היסודי מתוודעים התלמידים אל המושגים: מעגל ואליפסה. בחטיבת הביניים הם מכירים את הפרבולה, כגוף של פונקציה ריבועית, ובהמשך לימודיהם בעל-יסודי, הם נפגשים גם עם ההיפרבולה. בלימודי הגיאומטריה האנליטית ברמת חמש יחידות לימוד, הם נפגשים עם ההגדרות של עקומים אלה כמקומות גיאומטריים במישור. אבל היותם של עקומים אלה עקומי חיתוך של חרוט אינסופי ישר עם מישורים שונים נזכרת בצנעה, ובכל מקרה לרוב ללא הוכחת הקשר בין הדברים. במאמר זה ננסה להצדיק את הכינוי חתכי החרוט שניתן לקבוצת העקומים: מעגל, אליפסה, פרבולה והיפרבולה

חתך של חרוט – הגדרה של עקום

במונח חתך של חרוט, אנו מתכוונים לעקום החיתוך המתקבל כאשר מישור חותך חרוט אינסופי ישר (כפול, מן הסתם). החתכים האפשריים הם: מעגל, אליפסה, פרבולה והיפרבולה. השניים הראשונים הם עקומים סגורים ואילו השניים האחרונים הם עקומים פתוחים. האליפסה מתקבלת כאשר עקום החיתוך של החרוט והמישור החותך הוא עקום סגור. המעגל הוא, אם כך, מקרה פרטי של אליפסה. הוא מתקבל כאשר המישור החותך מאונך לציר החרוט. הפרבולה מתקבלת כאשר המישור החותך מקביל לקו היוצר של החרוט

הקדמה היסטורית

כאשר משתמשים בשם 'חתכי החרוט' לתיאור עקומים, מתכוונים, כאמור, אל הפרבולה ההיפרבולה, האליפסה והמעגל. עקומים אלה נחקרו לראשונה על-ידי מנכמוס (320-380 לפנה"ס) בעת שעסק בניסיון לפתור את בעיית "הכפלת הקוביה". גם אוקלידס (265-325 לפנה"ס)

1. המאמר נכתב בעקבות סדנה בשם: **חתכי החרוט**, שניתנה במסגרת השתלמות הקיץ: בית ספר קיץ, שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה, במרכז הארצי "קשר חם" בטכניון, תשס"ד.

ואפשר גם כך :

קבוצה ב:

- פרבולה היא מקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, אשר היחס בין מרחקן מנקודה נתונה (מוקד) ומישור נתון (מדריך) שווה לאחד.
 - אליפסה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, אשר היחס בין מרחקיהן מנקודה נתונה (מוקד) ומישור נתון (מדריך) קטן מאחד.
 - היפרבולה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, אשר היחס בין מרחקיהן מנקודה נתונה (מוקד) ומישור נתון (מדריך) גדול מאחד.
 - המעגל מתקבל כמקרה פרטי של האליפסה שבו היחס שווה לאחד.
- היחס בין המרחקים נקרא : אקסצנטריות.
- הוכחת השקילות בין ההגדרות בקבוצות השונות באמצעות גיאומטריה אנליטית, היא משימה לא מסובכת.

השקילות בין ההגדרות המישוריות לבין ההגדרות המרחביות

נסה להראות את השקילות בין ההגדרות המישוריות לבין ההגדרות המרחביות. כלומר נרצה להצדיק את זכותנו לכנות את המעגל, האליפסה, הפרבולה וההיפרבולה בשם משותף: 'חתכי החרוט'. בהוכחות בודאי נידרש להצביע על מוקדים, או על מוקד ומדריך המתקבלים, כאשר מישור חותך חרוט.

בשנת 1822 פרסם המתמטיקאי הבלגי ג'רמינל פייר דנדלין (Germinal Pierre Dandelin, 1794-1847) הוכחה פשוטה ויפה לשקילות ההגדרות של העקומים כחתכי חרוט לבין ההגדרות שבקבוצה א. הוכחה אחרת, הנשענת על אלגברה ומעט גיאומטריה אנליטית סיפק גלילאו כמאתיים שנה קודם לכן.

האליפסה

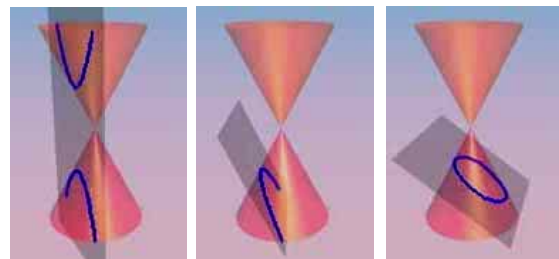
על-ידי הצבעה מפורשת על שתי נקודות כמוקדי האליפסה, הוכיח דנדלין כי כאשר מישור חותך חרוט בחתך שהוא עקום סגור העקום המתקבל הוא אליפסה. נצטרף אליו להוכחה. ניעזר לשם כך בשרטוט 1 :

וההיפרבולה מתקבלת בכל מקרה אחר. ראוי לשים לב לכך שהיפרבולה המתקבלת כאשר המישור החותך את החרוט מקביל לצירו היא רק אחת מאינסוף היפרבולות אפשריות.

המחשה טובה של תיאורים אלה ניתן למצוא באתרי אינטרנט רבים, למשל :

http://mathdemos.gcsu.edu/family_of_functions/conic_gallery.html

<http://www.jalacy.com/conics/java.shtml>



ניתן להתייחס גם אל שני חתכים נוספים מנוונים : נקודה או שני ישרים. הנקודה היא מקרה גבולי של מעגל ואילו שני הישרים הם מקרה גבולי של היפרבולה.

הגדרות העקומים כמקומות גיאומטריים במישור

ההגדרות הבאות של העקומים כמקומות גיאומטריים במישור מוכרות לכולנו :

קבוצה א:

- פרבולה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, אשר מרחקן מנקודה נתונה (מוקד) ומישור נתון (מדריך) שווים זה לזה.
- אליפסה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, אשר סכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות (מוקדים) הוא קבוע.
- היפרבולה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, אשר הפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות (מוקדים) הוא קבוע.
- המעגל מתקבל כמקרה פרטי של האליפסה, כאשר שני המוקדים מתלכדים והוא, על-כן, המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור אשר מרחקן מנקודה קבועה במישור הוא גודל קבוע.

$$PF_1 = PQ_1$$

$$PF_2 = PQ_2$$

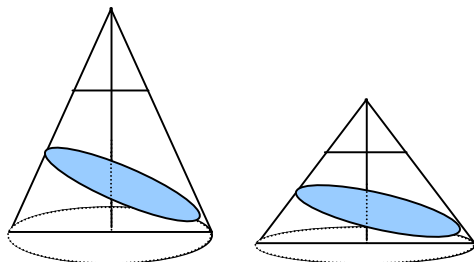
מחיבור המשוואות נקבל:

$$PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2 = \text{קבוע}$$

כלומר, סכום המרחקים מהנקודות F_1 ו- F_2 של נקודה אקראית על עקום החיתוך של החרוט עם המישור, הוא גודל קבוע. נוכל לקבוע, אם כן, כי עקום החיתוך של החרוט עם המישור הוא אליפסה, אשר מוקדיה נמצאים בנקודות ההשקה של הכדורים המשיקים לכדור ולמישור, הנמצאים משני צידי המישור.

בכיוון הפוך: כל אליפסה היא חתך של כל חרוט. כיון שהחרוט הוא אינסופי נוכל למקם את מישור האליפסה קרוב לקודקוד או רחוק ממנו כרצוננו, ובזווית נטייה חדה כרצוננו (ר' שרטוט 2).

כפי שראינו לעיל, דנדלין הוכיח שקילות של ההגדרה של האליפסה כמקום גיאומטרי של נקודות אשר סכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות הוא קבוע, עם הגדרת האליפסה כחתך סגור של חרוט אינסופי ישר. אפשר להרחיב את ההוכחה גם להיפרבולה ולפרבולה.

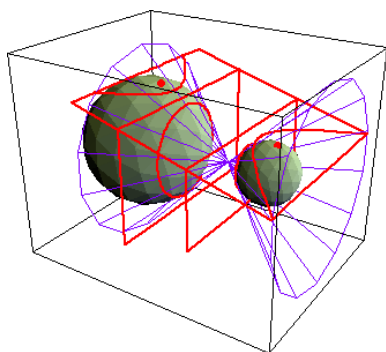


שרטוט 2: אליפסה כחתך של כל חרוט

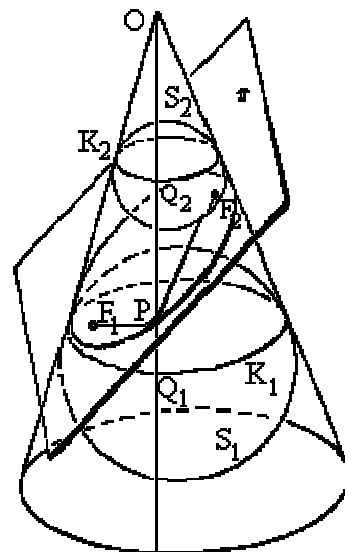
היפרבולה

ננסה לעשות זאת עבור היפרבולה:

נדמיין שני כדורים החסומים בחרוט ומשיקים למישור החיתוך (ר' שרטוט 3).



שרטוט 3: הכדורים של דנדלין עבור היפרבולה



שרטוט 1: ההוכחה של דנדלין עבור

המישור π חותך את החרוט, כמתואר בשרטוט. נדמיין כדור ענק המשיק לחרוט מבפנים. נכוץ את הכדור. תוך כדי תהליך הכיווץ נדאג לכך שבכל רגע ישיק הכדור לחרוט. נסיים את תהליך הכיווץ בדיוק ברגע שהכדור ישיק גם לחרוט וגם למישור. כדור זה, שנשמנו ב- S_1 , משיק לחרוט במעגל K_1 ולמישור בנקודה F_1 . נבצע תהליך דומה גם מצידו השני של המישור. נדמיין כדור מזערי המשיק לחרוט סמוך לקודקודו. ננפח את הכדור, תוך שמירה על ההשקה לחרוט, עד אשר ישיק גם למישור π . נסמן כדור זה ב- S_2 . משיק לחרוט במעגל K_2 ולמישור בנקודה F_2 .

כך, שני המעגלים K_1 ו- K_2 מונחים במישורים מקבילים זה לזה, באופן שהיטליהם על מישור משותף המאונך לציר החרוט, הם מעגלים קונצנטריים. מכאן נקבל כי אורך הקטע המחבר בין שתי נקודות על שני מעגלים אלה ועובר בקדקוד החרוט, הוא גודל קבוע.

נתבונן בנקודה כלשהי P על העקום התוחם את חתך החרוט. נעביר ישר דרכה ודרך קדקוד החרוט. (ישר זה מוכל במעטפת החרוט). נסמן את נקודות החיתוך של הישר עם המעגלים K_1 ו- K_2 ב- Q_1 ו- Q_2 בהתאמה.

הקטעים: PF_1 ו- PQ_1 הם שני משיקים לכדור S_1 היוצאים מנקודה משותפת ולכן הם שווים באורכם. גם הקטעים: PF_2 ו- PQ_2 שווים באורכם מסיבה דומה.

עבור כל נקודה P הנמצאת על עקום החיתוך בין הישר למישור, יתקיימו הקשרים:

שני הכדורים נמצאים בשני ענפיו השונים של החרוט.

ניתן לבצע שלבים דומים לאלה שהופיעו בהוכחה הקודמת, תוך התייחסות לישורים המחוברים את הקדקוד אל נקודה על מעגל השקה אחד ועוברים גם דרך נקודה על מעגל ההשקה השני. קווי הרשת התוחמים את החרוט בשרטוט 3 הם בעלי תכונה זו.

נחזור על השלבים של ההוכחה הקודמת בשינויים קלים ונוכיח כי חתך פתוח של חרוט אינסופי המתקבל מחיתוך עם מישור שאינו מקביל לקו היוצר של החרוט, הוא היפרבולה.

המישור חותך את החרוט, כמתואר בשרטוט 3. נדמיין כדור מזערי סמוך לקדקוד, בציודו האחד של החרוט ומשיק לו מבפנים. ננפח את הכדור, תוך כדי תהליך הניפוח נדאג לכך במשך כל התהליך ישיק הכדור לחרוט. נסיים את תהליך הניפוח בדיוק ברגע שהכדור ישיק גם לחרוט וגם למישור. כדור זה, שנשמנו ב- S_1 , משיק לחרוט במעגל K_1 ולמישור בנקודה F_1 . נבצע תהליך דומה גם מצידי השני של החרוט. נדמיין כדור מזערי המשיק לחרוט סמוך לקדקודו. ננפח את הכדור, תוך שמירה על ההשקה לחרוט, עד אשר ישיק גם למישור π . נסמן כדור זה ב- S_2 . משיק לחרוט במעגל K_2 ולמישור בנקודה F_2 .

כך, שני המעגלים K_1 ו- K_2 מונחים במישורים מקבילים זה לזה, באופן שהיטליהם על מישור משותף המאונך לציר החרוט, הם מעגלים קונצנטריים. מכאן נקבל כי אורך הקטע המחבר בין שתי נקודות על שני מעגלים אלה ועובר בקדקוד החרוט, הוא גודל קבוע.

נתבונן בנקודה כלשהי P על העקום התוחם את חתך החרוט. נעביר ישר דרכה ודרך קדקוד החרוט. נסמן את נקודות החיתוך של הישר עם המעגלים K_1 ו- K_2 ב- Q_1 ו- Q_2 בהתאמה.

הקטעים: PF_1 ו- PQ_1 הם שני משיקים לכדור S_1 היוצאים מנקודה משותפת ולכן שווים באורכם.

הקטע: PF_2 שווה באורכו לסכום אורכי הקטעים: PQ_1 ו- Q_1Q_2 ,

כלומר: $PF_2 = PQ_1 + Q_1Q_2$
או: $PF_2 - PQ_1 = Q_1Q_2$

נחליף את PQ_1 בגודל השווה לו: PF_1 , ונקבל כי:

$$PF_2 - PF_1 = Q_1Q_2$$

אפשר כמובן לבצע את התהליך גם על נקודה אקראית בחלקו השני של עקום החיתוך.

קבלנו אם כן, כי הפרש המרחקים מהנקודות F_1 ו- F_2 של נקודה אקראית על עקום החיתוך של החרוט עם מישור הוא גודל קבוע. נוכל לקבוע, אם כן, כי עקום החיתוך של החרוט עם מישור הוא היפרבולה, אשר מוקדה נמצאים בנקודות ההשקה של הכדורים המשיקים לכדור ולמישור, הנמצאים משני צידי המישור.

בכיוון הפוך: כל היפרבולה היא חתך של כל חרוט. כיון שהחרוט אינסופי נוכל למקם את מישור ההיפרבולה קרוב לקדקוד או רחוק ממנו כרצוננו, ובזווית נטייה חדה כרצוננו.

פרבולה

גם עבור פרבולה אפשר להפעיל את ההוכחה של דנדלין הוכחה זו הופיעה בעלייה 9, עמ' 56-57, במאמר מאת עמוס אלטשולר. נביא כאן את ההוכחה של גלילאו:

נשתמש במעט גיאומטריה אנליטית ונתייחס אל הגרף של הפונקציה: $y = kx^2$. גרף של כל פונקציה ריבועית אחרת מתקבל מביצוע של הזזות מקבילות לצירים, שיקוף ביחס לציר x , ו/או מתיחה. על כן התייחסות לגרף הזה, אינה מגבילה את הכלליות של ההוכחה.

ראשית נוכיח כי גרף זה אכן עונה על ההגדרה של פרבולה כמקום גיאומטרי במישור, כלומר נמצא את המוקד ואת המדריך שלה:

נסמן את המוקד המבוקש ב- $(0, f)$ ואת המדריך נקבע כישר: $y = -f$.

תכונת שוויון המרחקים תיתן:

$$(x-0)^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2$$

מכאן נקבל:

$$x^2 + y^2 - 2yf + f^2 = y^2 + 2yf + f^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4yf \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4f}$$

הגרף שלנו מתאים לפונקציה $y = kx^2$, על-כן נדרוש:

$$k = \frac{1}{4f}, \text{ או: } f = \frac{1}{4k}. \text{ כלומר: המוקד של הפרבולה,}$$

שהיא הגרף של הפונקציה $y = kx^2$ נמצא בנקודה:

$$\left(0, \frac{1}{4k}\right), \text{ והמדריך שלה הוא הישר: } y = \left(-\frac{1}{4k}\right).$$

כעת ניגש להוכחת הכיוון ההפוך.

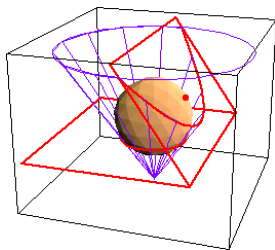
היוצר שלו, כלומר כל מישור כזה יוצר פרבולה אחרת. היכן נמצאים המוקד והמדריך של החתכים הקוניים (על-פי ההגדרות של קבוצה ב')?

דנדלין הוכיח גם כי העקומים מקבוצה ב' הם אכן חתכי חרוט בהוכחה ישירה הנשענת על שיקולים טריגונומטריים פשוטים ביותר. גם בהוכחה זו, יש לדמיין כדור המשיק לחרוט ולמישור החותך. עבור הפרבולה ואלפסה יש שני כדורים כאלה ועבור פרבולה ומעגל יש כדור אחד (ר' שרטוט 5).

המוקד של העקום הוא נקודת ההשקה של הכדור למישור החותך, והמדריך של העקום הוא ישר החיתוך של המישור החותך עם המישור בו מונח מעגל ההשקה של הכדור לחרוט.

הוכחה זו נמצאת, בין היתר, באתר:

http://www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/ConicSections_dir/conicSections.html



שרטוט 5: הכדור של דנדלין עבור פרבולה

מקורות והצעות לקריאה נוספת:

אלטשולר ע., (1991), חתכי חרוט בגישה סינטטית, עלייה 9, עמ' 56-57.

שריקי ע., דוד ח., (2001), פרבולה וחתכי חרוט אחרים, אצל: שריקי ע., "קידמה" – קידום ידע בדידקטיקה ובמתמטיקה, אוגדן למורה, "קשר חס" המרכז הארצי לקידום, שיפור ורענון החמנוך המתמטי, הטכניון.

Ogilvy, C. S., (1969), Excursions in Geometry, Dover Publishers, Inc. New York. p. 56-85

Olmstead, E. A., (1998), Exploring the Locus Definitions of the Conic Sections, in: The Mathematics Teacher, Vol. 91, No. 5, p. 428-434.

<http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/jbconics.htm>

<http://csep10.phys.utk.edu/astr161/lect/history/newtonkepler.html>

http://en.wikipedia.org/wiki/Conic_sections

<http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student.Folders/Jones.June/conics/conics.html>

נחפש את משוואת העקום המתקבל מחיתוך של חרוט ישר עם מישור המקביל לציר החרוט, וניעזר בשרטוט 4:

נמקם מערכת צירים מישורית במישור החיתוך, כך שהראשית בנקודה O וציר y מקביל לקו היוצר של החרוט. נסמן את הנקודה שעל העקום ב- $P(x, y)$. הנקודות A, P, B, R מונחות על מעגל הנמצא במישור המאונך לציר החרוט, כך ש- AB קוטר המאונך ל- PR בנקודה C . הקטע OQ מאונך גם הוא לציר החרוט.

קל להבחין בכך שמתקיימים הקשרים הבאים:

$$(1) \quad x^2 = AC \cdot CB \quad (\text{מיתרים נחתכים במעגל});$$

$$(2) \quad \text{המרובע } BCOQ \text{ הוא מקבילית, ועל-כן: } CB = OQ$$

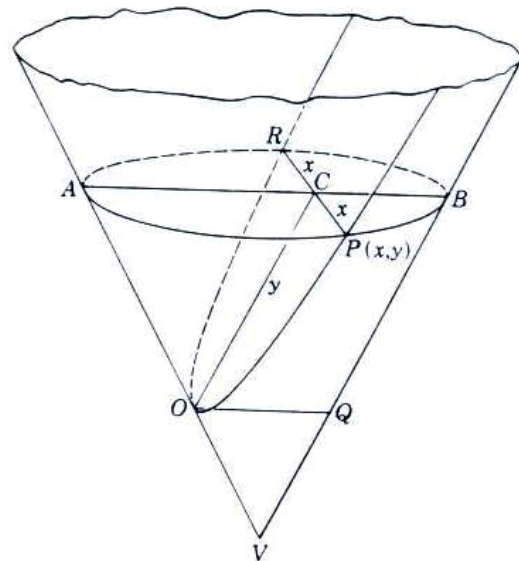
$$(3) \quad \text{מ- (1) ו- (2) נקבל } x^2 = AC \cdot OQ$$

$$(4) \quad \text{המשולשים } OAC \text{ ו- } VOQ \text{ הם משולשים דומים, על-פי שוויון זוויות.}$$

$$(5) \quad \text{מיחס הדמיון נקבל: } \frac{AC}{OQ} = \frac{OC}{VQ} = \frac{y}{OV}$$

$$(6) \quad \text{כלומר: } AC = \frac{OQ}{OV} y$$

$$(7) \quad \text{מ- (3) ו- (6) נקבל: } x^2 = \frac{OQ^2}{OV} \cdot y$$



שרטוט 4: ההוכחה של גלילאו עבור

הגודל $\frac{OQ^2}{OV}$ הוא קבוע עבור מישור חותך קבוע המקביל

לקו יוצר של חרוט ישר אינסופי נתון, על-כן הנקודה $P(x, y)$, אכן נמצאת על פרבולה. גודל זה אופייני לכל מישור החותך חרוט קבוע ומקביל לקו

http://www.keypress.com/sketchpad/java_gsp/conics.html
<http://www.krellinst.org/UCES/archive/resources/conics/>
<http://www.krellinst.org/UCES/archive/resources/conics/node5.html>
<http://www.math2.org/math/algebra/conics.htm>
http://www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/ConicSections_dir/conicSections.html
<http://www3.adnc.com/~topquark/math/conicsec.html>

http://mathdemos.gcsu.edu/family_of_functions/conic_gallery.html
<http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html>
<http://nsm1.nsm.iup.edu/gsstoudt/conics/conics.html>
<http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/MultCalc/PolarConics/conics.htm>
<http://www.cut-the-knot.com/proofs/conics.html>
<http://www.edmath.org/MATtours/ellipses/ellipses1.01.2.html>
<http://www.jalacy.com/conics/java.shtml>

יצא לאור – ונשלח לספריות בתי-הספר –

אינדקס של מאמרי על"ה שפורסמו בגיליונות 1-34

לאינדקס ארבעה חלקים :
 כרטסת מאמרים ;
 מפתח מחברים ;
 מפתח מדורים ;
 רשימת תוכני העניינים .

גרסה מקוונת מצויה באתר האינטרנט של "קשר חס" – המרכז הארצי למתמטיקה בבית הספר העל-יסודי : <http://kesher-cham.technion.ac.il>

בכרטסת המאמרים, מופיעים לפי סדר הא"ב של שם המחבר הראשון, כל המאמרים והכתבות שהתפרסמו בגיליונות 1-34 של על"ה. לכל פריט מספר סידורי משלו, תחתיו רשומים : שמות כל מחבריו, הכותרת, מספר גיליון על"ה בו פורסם ומספרי העמודים בו ומילות המפתח.

במפתח המחברים מופיעים, לפי סדר הא"ב, כל המחברים שפרי עטם ראה אור בגיליונות 1-34 של על"ה. ליד שם של כל מחבר מופיעים המספרים הסידוריים של הפריטים שהשתתף בכתיבתם.

במפתח המדורים מופיעים, לפי סדר הא"ב, שמות כל המדורים שהתפרסמו בגיליונות 1-34 של על"ה. ליד שם של כל מדור מופיעים המספרים הסידוריים של הפריטים שהתפרסמו בו. פריטים שהתפרסמו שלא תחת שם מדור כלשהו מאוגדים ברשימה שכותרתה : "בלתי מסווגים".

ברשימת תוכני העניינים מאוגדים תוכני העניינים של גיליונות 1-34 של על"ה.