



הנושא: למידה משמעותית בעקבות טעות של תלמיד

הוכן ע"י: סיגל יגרמן.

תקציר: המחברת מתארת שיעור בנושא סדרה חשבונית. השיעור התחיל כשיעור שגרתי בבדיקת שיעורי בית. התייחסות רצינית להערה בלתי צפויה של תלמיד, שהייתה יכולה להתפרש כטעות ולהיזנח, הובילה להתפתחות של שיעור דיון חוקר מעניין ומשמעותי במיוחד. הפעילות בשיעור, בנוסף לעיסוק מעמיק במושגים הרלוונטיים לסדרה חשבונית, הביאה את התלמידים לחוש את הצורך בהוכחה.

מילות מפתח: כתב העת על"ה, על"ה 35, שיעור, שיטות וגישות הוראה, השערה, הוכחה, דוגמא נגדית, אלגברה-סדרות, סדרה חשבונית.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 35, תשס"ו 2005, עמודים 38-40.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.



מנסיוננו

למידה משמעותית בעקבות טעות של תלמיד

סיגל יגרמן

sigalja@zahav.net.il

תיכון היובל- הרצליה

$$a_1 + d + a_1 + 2d = 10$$

$$a_1 + 2d + a_1 + 3d = 14$$

ואז נשמעה מאחד התלמידים ההערה הבאה:

אריאל: *אפשר לפתור את השאלה בצדק מהירה יותר, הרי: $a_2 + a_3 = a_5$*

המורה: האם אתה טוען שסכום של שני איברים בסדרה חשבונית הוא האיבר שמקומו הסידורי הוא סכום המקומות הסידוריים של המחברים?

אריאל: *באת השערה שלי באופן כללי.*

המורה: למה אתה חושב כך? (נציין כי בשלב זה קל וטבעי להתייחס אל הטענה הזו כטעות ולעמוד על ההבדל בין המקום הסידורי של מספר לבין ערכו בהסבר מילולי בעל אופי הרצאתי לפני הכיתה כולה. במקום לעשות זאת, ניסיתי לברר את המקור של הטענה. האם זו טעות בהבנת המושגים, או הכללה מוגזמת? לא יכולתי לדעת לאן תוביל שאלתי, אבל המשך השיעור הוכיח לי, מעל לכל ספק, כי ראוי לסמוך על התלמידים ולייחס לדבריהם רצינות ועומק מחשבה, על פני פסילה פשוטה ומהירה של טענות הנתפסות אצלנו, המורים, כטעויות בוטות.)

אריאל: *השאלה שהייתה בשיעור הייתה: 2.4.6.8.10 ... חשבונית היא:*

השאלה היא: $a_2 + a_3 = a_5$

השאלה היא: $4 + 6 = 10$

השאלה היא: $2 + 6 = 8$, $a_1 + a_3 = a_4$

השאלה היא: חשבונית חשבונית

5, 10, 15, 20,...

(הם כאן) כלל את התלמידים

המורה: (פונה לכל הכיתה כדי שכל התלמידים יהיו שותפים לדיון).

מחקרים רבים בחינוך המתמטי, שעוסקים בהוכחות לטענות מתמטיות, מצביעים על כך שקיימת בעיה עיקרית בהוראת הוכחות בקרב תלמידי התיכון – תלמידים לא תופסים את הצורך שבהוכחה. הם שואלים: למה אנחנו צריכים להוכיח את זה? ואינם מבינים את תפקיד ההוכחה.

(e. g. De-Villiers, 1991; Dreyfus & Hadas, 1996)

במאמר: תיאור שיעור בנושא סדרה חשבונית, בו בעקבות הערה בלתי צפויה של תלמיד, שיכולה להתפרש כטעות, נקרתה בפני ההזדמנות להביא את התלמידים לחוש את הצורך בהוכחה. בנוסף היה השיעור מעניין, מפתיע ומשמעותי. הבעיות אשר תכננתי לפתור עם התלמידים בכיתה ניתנו לתלמידים כעבודת בית ורוב התלמידים פתרו אותן ללא בעיות מיוחדות, כך שלא 'בוזבוז זמן'.

תיאור השיעור

השיעור התנהל בכיתה י ברמה של 4, 5 יח"ל. זה היה השיעור השלישי בנושא: 'סדרה חשבונית'. פתחתי את השיעור בבדיקת שיעורי בית. התלמידים היו אמורים לפתור את השאלה הבאה:

נתון שסכום האיברים השני והשלישי בסדרה חשבונית הוא 10, וסכום האיברים השלישי והרביעי באותה סדרה שווה ל-14.

מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה? הדס החלה לענות על השאלה בדרך שלימדתי בשיעור הקודם. היא כתבה את הנתונים ואת מה שצריך למצוא בכתב מתמטי:

נתון: $a_2 + a_3 = 10$

$a_3 + a_4 = 14$

צ"ל: $d = ?$, $a_1 = ?$

אני מבקשת מכל אחד מהתלמידים לכתוב במחברת סדרה חשבונית ולבדוק, אם הכלל שאריאל גילה באמת מתקיים בכל סדרה חשבונית, כלומר האם הכלל:

$$a_m + a_n = a_{m+n}$$

מתקיים בכל סדרה חשבונית

(עברתי בין התלמידים וראיתי שהתלמידים בדקו סדרות חשבוניות, בהן הפרש הסדרה הוא שבר, סדרות יורדות, סדרות עולות. כל תלמיד התנסה בינתיים בכתיבת סדרות חשבוניות).

עומר: מציאתי זוגות של סדרות חשבוניות שבהן הכלל אינו מתקיים. הנה הזוגות. נתונה סדרה חשבונית: $5, 3, 1, -1, -3, \dots$

$$5 + 1 \neq -1$$

המורה: מספיקה דוגמה נגדית אחת, כדי לקבוע שהכלל אינו מתקיים לכל סדרה חשבונית.

הדוגמה שגילית היא סדרה חשבונית יורדת.

אולי הכלל מתקיים רק בסדרות חשבוניות עולות?

יונתן: מציאתי זוגות של סדרות חשבוניות שבהן הכלל מתקיים.

דורית: מציאתי את יוצאת מתי הכלל כן מתקיים בסדרה חשבונית כאשר $a_1 = d$.

המורה: אני מבקשת מכל התלמידים לבדוק את ההשערה: הכלל: $a_m + a_n = a_{m+n}$

$$a_1 = d$$

מתקיים בסדרה חשבונית אשר בה: דורית: הנה כל הכיתות בקצה ואל אחת לא מציא זוגות של סדרות חשבוניות.

המורה: יש בכיתה 30 תלמידים. האם מספיקות 30 בדיקות כדי להחליט שההשערה היא כלל? אולי בבדיקה ה-100 נמצא דוגמה נגדית.

דורית: איך אפשר להוכיח באופן כללי שהכלל מתקיים?

המורה: נכתוב מהם הנתונים, מה צריך להוכיח ונסה להוכיח בעזרת הכלים שיש לנו.

דורית: נתון: $a_1 = d$. נניח: $a_m + a_n = a_{m+n}$. נניח: m, n מספרים טבעיים.

המורה: איך נתחיל את ההוכחה?

נטע: אפשר לבדוק כמה שווה $a_m + a_n$ ואפשר לבדוק כמה שווה a_{m+n} .

המורה: כיצד נבדוק זאת?

עומר: אפשר להציג את המוקד a_m את הנוסחה של איברי כללי הסדרה חשבונית וכך לסמן את המוקד a_n ואת המוקד a_{m+n} . ונקבל:

$$\begin{aligned} a_m + a_n &= \\ &= a_1 + (m-1)d + a_1 + (n-1)d = \\ &= d + md - d + d + nd - d = \\ &= md + nd \\ a_{m+n} &= \\ &= a_1 + (m+n-1)d = \\ &= d + md + nd - d = \\ &= md + nd \\ \Downarrow \\ a_m + a_n &= a_{m+n} \end{aligned}$$

מ.ש.ל.

המורה: לסיכום, ההשערה לפיה בכל סדרה חשבונית:

$$a_m + a_n = a_{m+n}$$

איננה נכונה. אבל גיליתם סדרות חשבוניות מיוחדות אשר בהן הכלל מתקיים. התנאי הוא:

$$a_1 = d$$

שיעור זה היה התנסות עבורכם בגילוי כלל חדש במתמטיקה והוכחה של הכלל.

מסקנות מהשיעור

טעות של תלמיד הובילה אותי לשיעור מעניין, אשר תרם לתלמידים הרבה יותר מאשר משיעור רגיל.

המשימות שניתנו לתלמידים במהלך השיעור צמחו מתוך צורך שהתעורר במהלך הדיון הכיתתי ולא רק כהוראה של המורה, או כבעיה כתובה בספר.

התלמידים התבקשו לבדוק, אם הכלל אשר אחד מהם ניסח הוא נכון. כחלק מתהליך זה הם התנסו בהרכבת סדרות חשבוניות שונות.

בשיעור התוודעו התלמידים אל המושג 'דוגמה נגדית' ואל העובדה שמספיקה דוגמה נגדית אחת כדי להפריך טענה.

אחד התלמידים שיער שהשערה שהתייחסה לכל הסדרות החשבוניות, בעוד, למעשה, הכלל שגילה מתקיים רק בקבוצה מצומצמת וחלקית להן.

התלמידים בדקו את ההשערה, ומצאו דוגמה נגדית. במהלך הבדיקה נוסחה השערה מדויקת יותר, בה הוגדרה הקבוצה החלקית של הסדרות החשבוניות, בהן מתקיים הכלל.

הרווחות לפיה $a_m + a_n = a_{m+n}$ מתקיים בכל סדרה חשבונית. (טעות רווחת היא שתלמידים מחליפים בין המקום הסידורי של האיבר בסדרה חשבונית לבין ערכו המספרי). הפעילות שנעשתה בשיעור עזרה להבנה.

ברצוני לציין שההעזה לשנות שיעור שלם בעקבות טענה בלתי צפויה של תלמיד, החקירה יחד עם התלמידים ללא ידיעה ברורה של המהלך הכולל, ללא ביטחון שהדברים לא יגיעו למבוי סתום, התפתחה אצלי תודות לעידוד ולהדרכה שקבלתי במסגרת קורס למורי מורים למתמטיקה ב"קשר חס" – המרכז הארצי למורים למתמטיקה בטכניון.

רשימת מקורות

De-Villiers, M. (1991), Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry, *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 1 (pp. 255-262). Assisi, Italy.

Dreyfus, T. & Hadas, N. (1996), *Proof as answer to the question why*. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 28 (1), 1-5.

עלתה שאלה לדיון: האם כל הדוגמאות שנבדקו מספיקות כדי לאשש את ההשערה. נקרתה הזדמנות, ליצור אצל התלמידים את הצורך להוכיח כלל שהם בעצמם גילו.

כמורה, אני בעצמי, למדתי משיעור זה לא מעט: חשוב להיות קשוב לתלמידים; אם תלמיד טועה, ראוי לנסות למצוא את מקור הטעות ולא לשלול את דברי התלמיד על הסף; כדאי גם להביא את התלמיד עצמו ואת כל הכיתה לבדוק את הטענה השגויה; חשוב שהשיח לא יישאר בין המורה לתלמיד, אלא רצוי לשתף את שאר התלמידים.

השיח והחשיבה יכולים להוביל למסקנות מעניינות כמו שתיארתי למעלה. בנוסף, התלמידים לומדים משיעור כזה, שיותר לטעות, מותר לשאול, המורה לא כועס או חושב שהתלמיד שטעה אינו נבון, אלא להפך יש התייחסות רצינית ומשמעותית לדבריו.

בהמשך הוראת הנושא ובמבחנים לא עלתה הטעות

