



הנושא: חיתוך הזהב

הוכן ע"י: דן עמיר.

תקציר: המאמר עוסק בחיתוך הזהב – נושא המופיע בהקשרים שונים של המתמטיקה ומתקשר גם לתחומי תוכן מחוץ למתמטיקה, כמו אמנות או אדריכלות. בנוסף להקשרים המוכרים, מובא במאמר שימוש במספר המתאר את יחס הזהב במשחק 'מחשבת' על לוח אינסופי – פתרון שהוצע על-ידי ג'ון קונוויי (John Conway).

מילות מפתח: גיאומטריה, גיאומטריית המישור, הנדסה, הנדסת המישור, חיתוך הזהב, יחס הזהב, משפט פיתגורס, מלבן זהב, בניית בעזרת סרגל ומחוגה, משולשים, משולש שווה-שוקים, דמיון משולשים, אלגברה, משוואה ריבועית, פאון, פאונים משוכללים, טטרהדר, קוביה, אוקטהדר, דודקהדר, איקוסהדר, כדור, סדרה, כלל נסיגה, שבר משולב, סדרת פיבונצ'י, מספר אי-רציונלי, מספר רציונלי, קיפולי נייר, קפלר, הוכחה באינדוקציה, משחק מחשבת אינסופי, ג'ון קונוויי.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 36, תשס"ו 2006, עמודים 63-70.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

חיתוך הזהב

דן עמיר¹

danamir@post.tau.ac.il

ביה"ס למדעי המתמטיקה, אוניברסיטת ת"א

היוונים העדיפו, כידוע, את ההצגה הגיאומטרית על האלגברית. בניסוח אלגברי, נסמן את אורך הקטע כולו כיחידת אורך אחת ואת היחס היקצוני וממוצע ב- x , נקבל כי אורך החלק הארוך של הקטע הוא $\frac{1}{x}$, והמשוואה המתארת את התכונה של 'חיתוך הזהב'

היא: $x = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ כלומר $x = \frac{1}{x-1}$, השקולה למשוואה

הריבועית $x^2 - x - 1 = 0$, שפתרונותיה הם $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. נסמן את הפתרון החיובי, $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ שהוא אותו יחס עליו מדבר אוקלידס, באות היוונית φ , ואת הערך המוחלט של הפתרון השני, השלילי, כלומר המספר $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, באות ψ . זוג המספרים φ, ψ מקיים, כמובן, את זוג המשוואות $\varphi\psi = 1$, $\varphi - \psi = 1$. במיוחד, הם שונים ביניהם רק בספרה שלפני הנקודה העשרונית: $\varphi = 1.61803...$ ו- $\psi = 0.61803...$.

אחת הדרכים לצייר 'מלבן זהב' היא הדרך הבאה: חוסמים ריבוע בחצי מעגל כך שאחת הצלעות שלו, AB , נמצאת על הקוטר FG (ראה ציור 1). מרחיבים את הריבוע מצידו האחד למלבן $FBCE$ שבסיסו מגיע עד קצה הקוטר וגבהו כצלע הריבוע. ממשפט פיתגורס ברור לנו שאם צלע הריבוע היא 1 ואורך מחוג המעגל הוא R , אז $R^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, כלומר $R = \sqrt{5}$, והיחס בין צלעות המלבן הוא, אכן,

$$R + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$

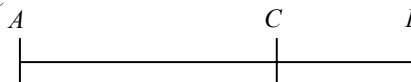
חיתוך הזהב מופיע בהקשרים שונים של המתמטיקה וזכה גם למוניטין מחוץ למתמטיקה. לכן הוא נראה לי מתאים במיוחד לנושא 'קישורים והקשרים במתמטיקה ובהוראתה'. אני מניח שרוב הקוראים מכירים את חיתוך הזהב. יש בוודאי גם רבים שקראו את הספר 'חיתוך הזהב' שכתב מריו ליביו, שהיה פרופסור לפיסיקה בטכניון ועכשיו הוא ראש החטיבה המדעית במכון למדעי טלסקופ החלל בארה"ב. התרגום של הספר לעברית יצא לאור לפני שנתיים. הספר עוסק בחיתוך הזהב מהיבטים רבים, אתייחס כאן להיבטים המתמטיים הבסיסיים שלו. הספר נכתב לקהל רחב ואשתדל להוסיף למה שמצוי בו כמה תובנות מתמטיות. אוסיף גם משהו שאינו נמצא בספר.

'חיתוך הזהב', או, יותר מדויק, 'יחס הזהב', הוא היחס האידיאלי, לכאורה, מבחינה אסתטית, בין הצלעות של מלבן. אסתטיקה, כמובן, היא עניין סובייקטיבי, ואינני משוכנע שתמיד אעדיף מלבן ב'פרופורציה זהב' על מלבנים בפרופורציות אחרות. אבל אסתטיקה גם נשענת על נורמות מקובלות, וחיתוך הזהב זכה להתקבל כנורמה כזו.

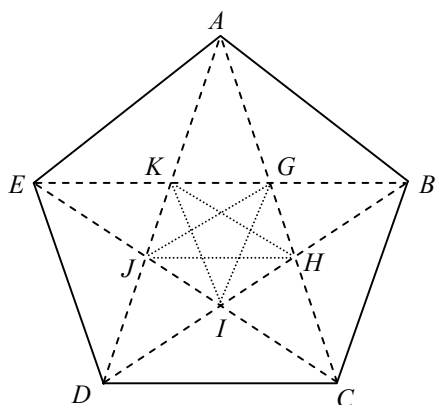
ההתייחסות המיוחדת ליחס זה נמצאת כבר אצל אוקלידס, שקרא לו 'יחס קיצוני וממוצע'. הגדרתו של אוקלידס היא: "קו ישר יתואר כחתוך ביחס קיצוני וממוצע אם (יחס) הקו כולו כלפי הקטע הגדול הוא כגדול כלפי הקטן".

כלומר, הנקודה C מחלקת את הקטע AB ביחס זה אם

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$$



¹ המאמר נכתב בעקבות סדנה בשם זה שהועברה על-ידי המחבר במסגרת ההשתלמות: בית ספר קיץ, תשס"ה: קישורים והקשרים במתמטיקה ובהוראתה, "קשר חם", המרכז הארצי לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי, הטכניון חיפה, אוגוסט 2005.



צור 3 – מעושר משוכלל ובו משולשי זהב

ראינו שכשאנחנו מחסרים ממלבן זהב שצלעותיו (a, b) את הריבוע הבנוי על הצלע הקצרה b , גם המלבן הנותר, שצלעותיו $(b, a-b)$ הוא מלבן זהב. אנחנו יכולים להמשיך ולחסר ריבוע גם ממלבן זה ולקבל מלבן זהב שלישי שצלעותיו $(a-b, 2b-a)$ וכן הלאה. נקבל כך סדרה אינסופית של מלבנים שצלעותיהם מהוות סדרה גיאומטרית יורדת. לו היו לנו שני מספרים שלמים a, b שהיחס ביניהם הוא יחס זהב, היינו מקבלים כך סדרה יורדת של מלבני זהב שצלעותיהם מספרים שלמים של יחידות – אבל זה לא יתכן, כי סדרה יורדת של מספרים טבעיים היא בהכרח סופית. מכאן נובע שיחס הזהב אינו מספר רציונאלי (יכולנו לעשות שיקול דומה גם לו הסתכלנו בסדרה יורדת של משולשי זהב או מחומשים משוכללים כמו בשרטוט) – עובדה זו מתיישבת עם העובדה הידועה ש- $\sqrt{5}$ אינו רציונאלי, אותה אנו יכולים לקבל גם באופן אלגברי (ההוכחה היא אנלוגית להוכחה המוכרת לגבי $\sqrt{2}$).

בציור 1 ראינו איך לבנות, בסרגל ומחוגה, יחס זהב. בקיפול נייר נוכל למצוא את חיתוך הזהב בקיצור באופן הבא:

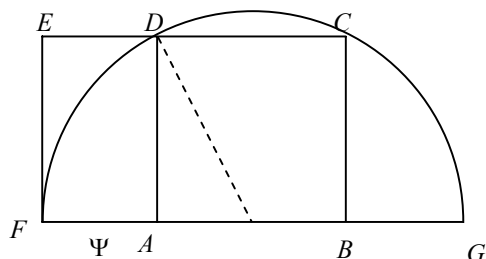
ניקח דף נייר ריבועי ולצורך נוחיות הדיון נסמן את קדקדיו: $ABCD$. תהי M אמצע הצלע AD של הריבוע $ABCD$ שאת צלעו אנחנו רוצים לחלק. נחצה את הזווית MBC על-ידי קיפול דרך הנקודה B המעביר את הישר MB לישר CB . נקודת הפגישה של חוצה הזווית עם הצלע E , מחלקת את CD בחיתוך הזהב:

$$\frac{CD}{EC} = \frac{CF}{2EC} = \frac{BF+BC}{2BC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

אורך הקטע שהוספנו לבסיס הריבוע הוא:

$$R - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \psi$$

ולכן גם המלבן הקטן, שהוא ההפרש בין המלבן הגדול לריבוע, הוא מלבן זהב.



צור 1 – יצירת מלבן זהב

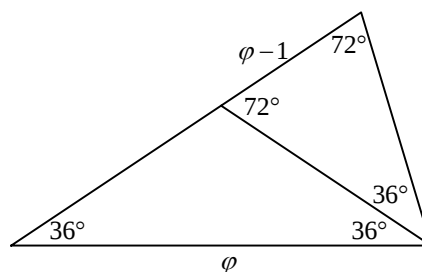
דרך אחרת לקבל יחס זהב היא לבנות משולש שווה שוקיים עם זווית ראש בת 36° וזוויות בסיס בנות 72° . אם הבסיס הוא באורך 1, השוקיים יהיו באורך φ . כדי לאמת, נחצה את אחת מזוויות הבסיס. חשבון זוויות מראה שזוויות המשולש הקטן שנוצר אף הן $72^\circ, 36^\circ$ ו- 72° .

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi-1}$$

מדמיון המשולשים נקבל

ומתקבלת שוב אותה משוואה ריבועית:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$



צור 2 – משולש זהב

כיוון שהמעושר המשוכלל בנוי מעשרה משולשים שווים שוקיים כאלה, יחס הזהב הוא גם היחס בין מחוג המעגל החוסם את המעושר לבין אורך הצלע שלו. נמצא את אותם 'משולשי זהב' גם במחומש המשוכלל שבו משורטטים האלכסונים. כך, בשרטוט שלנו, המשולשים $\triangle AKG$ ו- $\triangle AJH$, $\triangle DHC$, $\triangle ADC$ וכל הסימטריים להם הם משולשי זהב. כך, למשל:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{HC} = \frac{HC}{GH} = \varphi$$

כך, קדקודי שלושת מלבני הזהב הניצבים זה לזה:

$$\frac{1}{2}(\pm\varphi, \pm 1, 0), \frac{1}{2}(\pm 1, 0, \pm\varphi), \frac{1}{2}(0, \pm\varphi, \pm 1)$$

הם קדקודי איקוסהדר שצלעו 1. למשל, חמשת

הקדקודים השכנים לקדקוד $\left(\frac{1}{2}\varphi, 1, 0\right)$ הם

$$\frac{1}{2}(1, 0, \pm\varphi), \frac{1}{2}(0, \varphi, \pm 1), \frac{1}{2}(\varphi, -1, 0)$$

אורך המחוג של הכדור החוסם את האיקוסהדר הוא,

$$\frac{\sqrt{\varphi^2 + 1}}{2} = \frac{\sqrt{\varphi + 2}}{2}, \text{ לכן,}$$

נוכל גם לחשב את נפח האיקוסהדר – פי עשרים מנפח הטרהדר שיוצרת אחת הפאות המשולשות עם הראשית. נפח טרהדר כזה הוא $\frac{1}{6}$ מהדטרמיננטה של

קואורדינטות קדקודי הפאה, שהיא $\frac{1}{8}$ מהדטרמיננטה

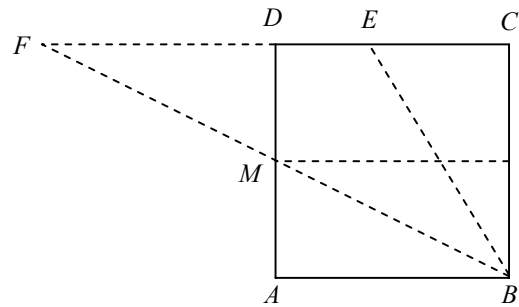
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varphi \\ \varphi & 1 & 0 \\ 0 & \varphi & 1 \end{vmatrix} = \varphi^3 + 1$$

ונפח האיקוסהדר בעל צלע באורך יחידה אחת יהיה,

$$\frac{20(\varphi^3 + 1)}{48} = \frac{5(\varphi^2 + \varphi + 1)}{12} = \frac{5\varphi^2}{6}, \text{ לכן,}$$

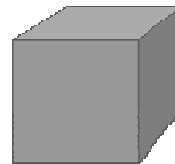
אבל מי שפאר את שמו של חיתוך הזהב ברבים היה המתמטיקאי האיטלקי לוקה פצ'ולי (Lucca Pacioli), שנולד בשנת 1445 באותה סן ספולקרו ואף למד לצייר אצל דלה פרנציסקה. ב-1509 פצ'ולי פרסם את הספר בן שלושה הכרכים שנשא את השם "הפרופורציה האלוהית". את השם הנלהב הזה הוא נימק בחמישה טעמים: ראשית, היחס הזה, כמו האל, הוא יחיד במינו. שנית, הוא מוגדר על-ידי שלושה קטעים, ובזאת אנלוגי לשילוש הקדוש. שלישית, הוא אי-רציונאלי, כמו שהאל נשגב מבינתנו. רביעית, הוא אינו משתנה ואינו תלוי בגודל הקטע המחולק או המחומש המשוכלל, וחמישית – הדודקהדר, שנבנה על-ידי יחס הזהב, מייצג את היסוד החמישי – הניצוץ האלוהי הנוסף לארבעת היסודות אדמה, מים, אוויר ואש המיוצגים על-ידי ארבעת הגופים הפלטוניים האחרים. ניצוץ אלוהי אחר, ומרשים יותר, שהיה בספרו של פצ'ולי היה המאייר – ליאונארדו דה וינצ'י בכבודו ובעצמו, שכנראה למד מתמטיקה מפצ'ולי בחצרו של לודוביקו ספורצה בוונציה.

מהצגות שונות של המשוואה $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ המגדירה את φ נוכל לקבל מספר תהליכים המייצרים סדרות

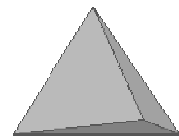


ציור 4 – יחס הזהב בקיפול נייר

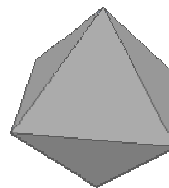
הצייר המהולל פיירו דלה פרנציסקה (Piero della Francesca), שנולד בשנת 1412 בעיירה סן-ספולקרו שבטוסקנה, התעניין במתמטיקה ובספרו 'על הפרספקטיבה' הניח את היסוד המתמטי לציור בפרספקטיבה. הוא גם כתב חיבור על חמשת הפאונים המשוכללים: הטרהדר, הקוביה, האוקטהדר, הדודקהדר והאיקוסהדר. בין הבעיות בהן עסק בהן בחיבור זה, אלה המעניינות במיוחד נגעו, כמובן, בשני הפאונים המשוכללים המסובכים יותר – הדודקהדר – גוף בן שתים-עשרה פאות, שכולן הן מחומשים משוכללים, והאיקוסהדר – הגוף ששנים-עשר קדקודיו הם מרכזי פאות הדודקהדר, ושעשרים פאותיו הן משולשים משוכללים. בבעיות אלה מופיע הערך של φ באופן טבעי.



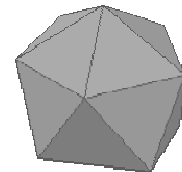
קוביה



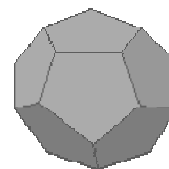
טֶטֶדֶהֶדֶר



אוקטֶהֶדֶר



איֶקוֹסֶהֶדֶר



דוֹדֶקֶהֶדֶר

ציור 5 – חמשת הפאונים המשוכללים

כאן כבר אין לנו סדרה עולה אלא סדרה עולה-יורדת לסירוגין:

1, 2, 1.5, 1.666..., 1.6, 1.625, 1.6153..., 1.61904..., 1.617464..., 1.61818...

סדרה מתחלפת כזו שבה המרחק בין האיברים שואף לאפס, חייבת להתכנס, ושוב לא קשה להראות שהגבול הוא φ .

נהוג לסמן את השבר המשולב:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

בסימון: $[a_0; a_1; a_2; a_3; \dots]$, כך שקיבלנו את ההצגה $\varphi = [1; 1, 1, 1, \dots]$. במובן זה יש, כמובן, ייחודיות למספר φ .

הערה: קל להראות ש- $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$. מעניינת הרבה יותר היא ההצגה של המספר e כשבר משולב שהתגלתה על-ידי ליאונרד אוילר:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 8, \dots]$$

טענה זו הוכחה מאוחר יותר כך על-ידי שארל הרמיט.

לעומת זאת, לפיתוח $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$ אין תבנית

פשוטה. הקירובים הראשונים שאנחנו מקבלים ממנו

הם: $\frac{333}{106} = 3/14150194, \dots, \frac{22}{7}$, כאשר הערך הנכון

הוא $3.14159265\dots$. באופן כללי, הקירוב של מספר על-ידי שבר משולב סופי הוא הקירוב הרציונאלי האופטימאלי בין כל אלה שהמכנה שלהם אינו עולה על זה של השבר המשולב. יתרון נוסף לקירוב בדרך זו הוא שאנחנו מקבלים, לסירוגין, הערכה מלרע והערכה מלעיל למספר המקורב.

דרך אחרת להסתכל על פיתוח φ לשבר משולב היא באמצעות השברים המהווים את הסדרה. אולי כבר זיהיתם את הסדרה המופיעה גם במונה וגם במכנה של איברי הסדרה. זוהי סדרת פיבונאצ'י הידועה:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

הנבנית על-ידי נוסחת הנסיגה:

$$F_1 = F_2 = 1; F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

ואכן, קל להצדיק זאת באינדוקציה מתמטית:

$$x_2 = \frac{1}{2} = \frac{F_1}{F_2} \quad \text{עבור } n=1 \text{ מתקיים:}$$

$$x_k = \frac{F_{k-1}}{F_k} \quad \text{מניחים כי עבור } n=k \text{ מתקיים:}$$

נוכיח כי מכך נובע שעבור $n=k+1$ מתקיים:

המתקבלות ל- φ . כך, מהמשוואה $\varphi^2 = 1 + \varphi$ נקבל בהוצאת שורש $\varphi = \sqrt{1 + \varphi}$, וכשנשתמש במשוואה זו להצבה בתוך עצמה, נקבל $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}$. כשנמשיך כך הלאה והלאה נקבל:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

מכאן, בתור סדרה מקרבת עבור φ נוכל לקחת את הסדרה המתקבלת מנוסחת הנסיגה:

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$$

שחמשת איבריה הראשונים הם:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}}$$

קל לראות שזו סדרה עולה (בכל צעד אנחנו מחליפים את $\sqrt{2}$ ב- $1 + \sqrt{2}$) שהיא חסומה, למשל, על-ידי 2, ולכן היא מתכנסת, ולא קשה להראות שגבולה הוא, אכן, φ .

דרך אחרת לקבלת סדרה מקרבת עבור φ מתקבלת מחלוקת המשוואה הריבועית ב- φ . נקבל את הקשר:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

ובהצבה חוזרת נקבל

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}$$

וכן הלאה. כך אנחנו מקבלים 'שבר משולב אינסופי'

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

בתור סדרה מקרבת אפשר לבנות את סדרת הפיתוחים הסופיים שלו המתקבלת מנוסחת הנסיגה:

$$x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

$$x_1 = 1 = \frac{1}{1}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$x_4 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}, \quad x_5 = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}, \quad x_6 = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8},$$

$$x_7 = 1 + \frac{8}{13} = \frac{21}{13}, \quad x_8 = 1 + \frac{13}{21} = \frac{34}{21}, \quad x_9 = 1 + \frac{21}{34} = \frac{55}{34},$$

$$x_{10} = 1 + \frac{34}{55} = \frac{89}{55} \dots$$

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\psi)^n}{\sqrt{5}}$$

מכאן שסדרת פיבונאצ'י נמצאת, לסירוגין, משני עברי

$$G_n - F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}, \text{ כשהפרש } G_n - F_n$$

הוא הסדרה הגיאומטרית $\frac{(-\psi)^n}{\sqrt{5}}$ השואפת לאפס.

במיוחד, אברי סדרת פיבונאצ'י הם המספרים השלמים הקרובים ביותר לאברי הסדרה הגיאומטרית G_n ,

$$\text{וסדרת המנות } \frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ שואפת ל-}\varphi.$$

לא קשה להראות שתכונה זו משותפת לכל הסדרות מטיפוס פיבונאצ'י, כלומר גם לכאלו המתחילות בשני איברים A_1, A_2 כלשהם. רמז: כדי להראות שכל סדרה כזו בנויה באופן דומה מחזקות של φ ושל $(-\psi)$ נמצא a, b כך שיתקיים:

$$a + b = A_1, a\varphi - b\psi = A_2$$

$$\text{ונוכיח באינדוקציה כי: } a\varphi^n + b(-\psi)^n = A_{n+1}$$

מי שגילה את העובדה שהיחס בין מספרי פיבונאצ'י עוקבים שואף ליחס הזהב היה האסטרונום הנודע יוהאנס קפלר. הוא ציין את זה במכתב שכתב בשנת 1608. גם הוא, כקודמיו מאפלטון ועד פצ'ולי, חשב שלחמשת הפאונים המשוכללים יש תפקיד קוסמולוגי חשוב. בספרו 'תעלומת היקום' שהופיע בשנת 1597 הוא הציע, שהיחסים בין אורכי המחוגים של המסלולים של ששת כוכבי הלכת, שהיו מוכרים בזמנו, מתקבלים כיחסים שבין אורכי המחוגים של הכדורים החוסמים והנחסמים בפאונים המשוכללים. כאשר הגוף הפנימי ביותר הוא אוקטהדר, המייצג את כוכב חמה, אחריו בא איקוסהדר, המייצג את נוגה וחסום בכדור המתאים למסלול כדור הארץ. זה חסום בדוקהדר המייצג את מאדים, מחוץ לו טטרהדר המייצג את צדק, ולבסוף קובייה המייצגת את שבתאי. המודל המיסטי הזה היה נראה די מוצלח, כי הוא גם תירץ מדוע יש רק ששה כוכבי לכת וגם נתן את המחוגים הידועים עד כדי שגיאה של 10% שקפלר ייחס לשגיאות מדידה...

על כל פנים, לא מפתיע שקפלר התעניין בדוקהדר ובאיקוסהדר, ולכן גם בחיתוך הזהב. כך, למשל, כתב:

"אני מאמין שהפרופורציה הגיאומטרית הזאת שימשה את הבורא כרעיון כאשר הביא לבריאת דומה מתוך דומה, שאף היא נמשכת לאינסוף".

$$x_{k+1} = \frac{F_k}{F_{k+1}}$$

ואמנם:

$$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k} = 1 + \frac{F_{k-1}}{F_k} = \frac{F_k + F_{k-1}}{F_k} = \frac{F_{k+1}}{F_k}$$

שלב המעבר הוכח ועל-כן לפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל n טבעי.

פיבונאצ'י, שחי במאות השנים-עשרה והשלוש-עשרה, הוא זה שהכניס לאירופה את שיטת הכתיבה העשרונית והראה את יתרונותיה הגדולים לעומת שיטת הכתיבה הרומית. אבל היום הוא זכה לפופולאריות דווקא בזכות סדרה זו המתקבלת כפתרון של בעיית הארנבים שלו. אם לא רוצים להסתבך בחי המין של הארנבים, אפשר לקבל את סדרת פיבונאצ'י על-ידי ספירת מספר האפשרויות של ילד לעלות $n-1$ מדרגות כאשר בכל צעד הוא יכול לעלות מדרגה אחת או לדלג שתי מדרגות.

נעסוק כעת בקצרה בסדרת פיבונאצ'י ובסדרות דומות לה המקיימות אותו תנאי נסיגה.

נקרא לסדרה (X_n) המקיימת את תנאי הנסיגה $X_{n+1} = X_n + X_{n-1}$ בשם 'סדרה מטיפוס פיבונאצ'י'.

ברור שכל סדרה כזו נקבעת על-ידי שני איבריה הראשונים. האם יש סדרה כזו שהיא גם סדרה גיאומטרית $1, X, X^2, X^3, \dots$? כלומר, האם קיים מספר

X המקיים $X^{n+1} = X^n + X^{n-1}$ לכל n ? המקרה $n=0$ נותן לנו $X^2 = X + 1$, כלומר את המשוואה המגדירה את יחס הזהב, והמקרה הכללי מתקבל על-ידי הכפלת משוואה זו ב- X^n . לכן שתי הסדרות $1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \dots$ ו- $1, -\psi, (-\psi)^2, (-\psi)^3, (-\psi)^4, \dots$ הן הסדרות הגיאומטריות היחידות שהן גם מטיפוס פיבונאצ'י.

ברור שמכפלה של סדרה מטיפוס פיבונאצ'י במספר קבוע אף היא סדרה מטיפוס פיבונאצ'י, ושסכום שתי סדרות מטיפוס פיבונאצ'י גם הוא סדרה מטיפוס זה.

במיוחד, הסדרה $\frac{\varphi^n + (-\psi)^n}{\sqrt{5}}$ היא מטיפוס

פיבונאצ'י. שני איבריה הראשונים הם:

$$X_1 = \frac{\varphi + \psi}{\sqrt{5}} = 1,$$

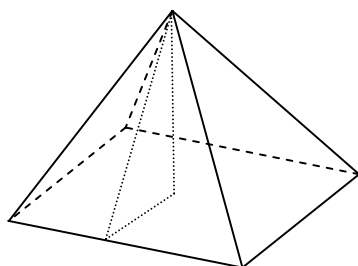
$$X_2 = \frac{\varphi^2 - \psi^2}{\sqrt{5}} = \frac{(1+\varphi) - (1-\psi)}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi + \psi}{\sqrt{5}} = 1$$

ולכן היא מתלכדת עם סדרת פיבונאצ'י, כלומר קיבלנו את הנוסחה המפורשת עבור סדרת פיבונאצ'י, הידועה כנוסחת בינה (Binet):

מצוטטת טענה המבוססת, כמו שהוא מראה, על עיוות בהבנת תיאור הפירמידה בספר ההיסטוריה המהולל של הרודוטוס. לפי טענה זו, שטח כל פאה צדדית של פירמידה זו שווה לריבוע גובה הפירמידה.

נניח, לשם פשטות, שצלע הבסיס הריבועי היא שתי יחידות אורך, וגובה הפאה הוא x יחידות אורך. לפי הנתון ומשפט פיתגורס $x = h^2 = x^2 - 1$ ולכן $x = \varphi$. במקרה זה נקבל שמנת הקף הבסיס בכפלים הגובה היא $\frac{8}{\sqrt{\varphi}}$, כך שאם שתי הטענות היו נכונות היינו מקבלים

שוויון מעניין מאוד עבור π , שלצערנו הרב ידוע כלא נכון (שהרי π אינו מספר אלגברי)...



ציור 7 ...

אשר לתכונות המתמטיות ה'מופלאות' של φ ושל סדרת פיבונאצ'י, הרי חלקן הוא טריוויאלי לגמרי, כמו העובדה ש- φ ו- $\frac{1}{\varphi}$ שונים רק בחלק השלם, ולכן יש בפיתוח העשרוני שלהן אותן ספרות אחרי הנקודה העשרונית. תוצאות אחרות אפשר לראות כתרגילים, שאינם מרשימים יותר מתרגילים הקשורים במספרים אחרים. הנה שני תרגילים כאלה בסדרות פיבונאצ'י המוצגים כתוצאות מפליאות בספרו של ליביו:

תרגיל 1: להוכיח שמתקיים השוויון:

$$0.01 + 0.001 + 0.0002 + 0.00003 + 0.000005 + \dots = \frac{1}{89}$$

ה'פלא' כאן הוא בכך ש-89 הוא מספר פיבונאצ'י (רמז לפתרון: להשתמש בנוסחה עבור F_n ולסכם את הטורים הגיאומטריים המתקבלים).

תרגיל 2: להראות שמתקיים הקשר:

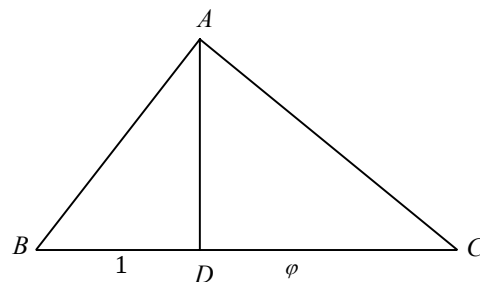
$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n}^2$$

ב-1597 קפלר שלח לאסטרונום מיכאל מַסְטֵלִין, שהיה המורה שלו באוניברסיטת טיבינגן, את המשפט הבא לגבי יחס הזהב ('משפט קפלר'): אם הגובה על היתר מחלק אותו ביחס זהב, אז הניצב הקצר שווה להיטל של השני. זו, כמובן, תוצאה פשוטה מדמיון משולשים: אם ניקח את BD כיחידת אורך, אז:

$$AB = \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} = \frac{\varphi + 1}{AB}$$

$$AB^2 = \varphi + 1 = \varphi^2$$

ולכן:



ציור 6 ...

השם "חיתוך הזהב" – Goldene Schnitt – בגרמנית, הופיע, כנראה, רק במאה ה-19. לפי מריו ליביו, הפעם הראשונה שהוא מופיע בספרות היא אצל המתמטיקאי הגרמני מרטין אוהם, אחיו של הפיסיקאי הידוע גיאורג סימון אוהם. לקראת סוף המאה ה-19 הוחלפה המיסטיקה הקוסמולוגית שעטפה אותו בפולחן אחר: אפשר לומר כי קמה אז (כמעט) כת של מתמטיקאים חובבים, שניסו למצוא חיתוך זהב בכל מקום ובכל תקופה – במבני הענק של מצרים הקדומה ושל יוון הקלאסית, בשירתו של וירגיליוס, ביצירות המופת של ציירי הרנסאנס והמוסיקאים הקלאסיים, וגם בתנועות השערים בבורסה. רובן המכריע של 'תגליות' אלה הוא, כמובן, שטות גמורה – אותן פרופורציות הקרובות ל- φ יכולות להוות, באותה מידת התאמה,

גם קירובים ל- $\frac{8}{5} = 1.6$, ל- $\sqrt{e}$ הקרוב ל-1.65.

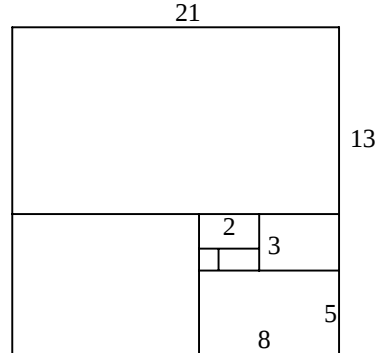
ולאינספור מספרים 'מיוחדים' אחרים. היבט זה מוסבר היטב בספרו של מריו ליביו.

הדגמה נוספת לסוג זה של 'תגליות' מצאתי זה עתה בתערוכת הבולים בנושאים מתמטיים שמוצגת בימים אלה במחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים בטכניון: בבול צרפתי מצוירת הפירמידה המפורסמת של קאופֶס, כשצלעות הבסיס הריבועי מסומנות באותיות a, b, c, d והגובה מסומן ב- h . ליד הפירמידה כתובה הנוסחה

$$\frac{a+b+c+d}{2h} = \pi$$

מאידך, בספר של מריו ליביו

רמז לפתרון: להשתמש בהדגמה גיאומטרית:



לאחר מסע שני (הכאה כפולה)

1	1	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0

לאחר מסע שלישי

ולפני המסע האחרון – 'הכאה משולשת'

1	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0

התשובה המפתיעה היא שלא נוכל לעבור את השורה הרביעית. כדי להראות זאת ללא מיון מתיש של אפשרויות, נבחר באחת הערוגות כנקודת מרכז, נאמר זו שבה נגיע לראשונה לעומק המרבי בשטח היריב. וניתן לה את הערך 1. לכל אחת מארבע הערוגות השכנות ניתן את הערך ψ . (בתרגיל 3 להלן מוסבר הרציונאל לבחירה זו). לשמונה הנקודות הבאות הסמוכות ניתן את הערך ψ^2 . לתריסר הערוגות הבאות ניתן את הערך ψ^3 וכן הלאה, כמו בשרטוט.

לכל מצב של פיזור חיילים על הלוח, נגדיר את הפוטנציאל שלו כסכום ערכי הערוגות התפוסות על-ידי חיילים. הפוטנציאל של השורה המרכזית המלאה

$$\text{באינסוף חיילים הוא } \varphi^3 = \frac{1+\psi}{1-\psi} \text{ הפוטנציאל של כל}$$

אחת משתי השורות הסמוכות לה, כשהיא מלאה, מתקבל ממנו על-ידי הכפלה ב- ψ . פוטנציאל השורות הבאות מתקבל על-ידי הכפלה ב- ψ^2 וכן הלאה. הפוטנציאל הכולל של מחצית הלוח המלאה בחיילים,

$$\text{מהשורה ה- } n \text{ ומעלה, יהיה, לכן, } \frac{\psi^n \varphi^3}{1-\psi} = \varphi^{5-n} \text{ מה}$$

קורה לפוטנציאל כאשר אנחנו עושים מסע דילוג מעל חייל והסרתו מהלוח? דילוג מעל שורת ההפקר, או מעל ערוגה בטור המרכזי (בו נמצאת ערוגת המוצא) מקטין, כמובן, את הפוטנציאל בערך הערוגה שעליה מדלגים. דילוג אחר מחליף סכום שתי חזקות סמוכות של ψ

$$\text{בחזקה הסמוכה להן. כלומר, את } \psi^n + \psi^{n+1} \text{ ב- } \psi^{n-1} \text{ או ב- } \psi^{n+2} \text{ אבל מהגדרת } \psi \text{ נובע}$$

$$\psi^{n+2} \leq \psi^{n-1} = \psi^n + \psi^{n+1} \text{ ולכן הפוטנציאל אינו יכול לגדול. כיוון שהפוטנציאל הוגדר כך שבמצב הסופי הוא לפחות 1, הרי גם הפוטנציאל הכולל ההתחלתי הוא חייב להיות לפחות 1.}$$

נסיים בשימוש חדש יחסית במספר הזהב. זהו פתרון של גיוהן קונוויי (John Conway) לבעיה במשחק המחשבת על לוח אינסופי:

נחלק את שורות הלוח על-ידי קו אופקי. לפני מדידות נאמר שרק אמרנו העליונה יש חיילים הפופולרים הסטה והתקצמות נעשית ע"י זילוף והסרה. הפונה שמספר החיילים הוא הלחי מולכל. מה העומק המכסימלי שניתן אפילו לפעם היריב?

חייל הנמצא בשורת החזית יכול להקריב את עצמו ולאפשר לחייל הנמצא מאחוריו לפלוש לשורה הראשונה שבמדינה השנייה. קל לראות שחוליה בת שלושה חיילים מתאבדים יכולה להסתדר כך שתאפשר לחייל רביעי להגיע לשורה השנייה במדינה היריבה. משמונה חיילים הנמצאים בשורת החזית ובשורה הסמוכה יכול להגיע חייל אחד לשורה השלישית במחנה האויב בדרך המודגמת בשרטוט.

המצב ההתחלתי

1	1	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	0	0	0

לאחר מסע ראשון

1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

לכן, אם $5 \leq n$, כלומר אם כל חיילינו נמצאים במרחק של 5 שורות לפחות מערוגת היעד, שום מספר סופי של חיילים לא יספיק כדי להגיע אליה.

תרגיל 3:

מדוע בחר קונוויי דווקא בגורם ψ ?

רמז: נסו לעשות זאת עם מספר אחר, x .

ראשית, הראו שכדי שיוגדר פוטנציאל סופי אפשר לקחת רק x בעל ערך חיובי קטן מ-1.

שנית, כדי שהפוטנציאל לא יוכל לגדול לאחר אף מסע, נחוץ שיתקיים: $x^2 + x \leq 1$. לכן x אינו יכול לקבל ערך הקטן מ- ψ .

לאחר מכן, הראו שההערכה מלעיל המתקבלת עבור x

$$\frac{\log \frac{1+x}{1-x}}{\log(-x)}$$

היא:

זו פונקציה עולה במשתנה x בתחום זה, ולכן מקבלת את ערכה המינימאלי, 5, בנקודת הקצה ψ .

ψ^{12}	ψ^{11}	ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}	ψ^{11}	ψ^{12}
ψ^{11}	ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}	ψ^{11}
ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}
ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9
ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ	ψ^2	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8
ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ	1	ψ	ψ^2	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7
ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ	ψ^2	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8
ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9
ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^3	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}
ψ^{11}	ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^4	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}	ψ^{11}
ψ^{12}	ψ^{11}	ψ^{10}	ψ^9	ψ^8	ψ^7	ψ^6	ψ^5	ψ^6	ψ^7	ψ^8	ψ^9	ψ^{10}	ψ^{11}	ψ^{12}