הנושא: על ארבעה סוגים של קשרים מתמטיים ופתרון בעיות בדרכים שונות

הוכן ע״י: רוזה לייקין.

תקציר: במאמר מוצגות ארבע בעיות מתמטיות, בצירוף פתרונות שלהן במספר דרכים, המדגימים מערכות קשרים בין מושגים במתמטיקה. הקישורים המוצגים במאמר הם משלושה סוגים: קישורים בין ייצוגים שונים, קישורים בין מושגים שונים וקישורים בין ענפי המתמטיקה השונים. הבעיות המקוריות לקוחות מנושאים שונים בתכנית הלימודים: בעיית תנועה, הגדרת מושג, משפט בגיאומטריה, בעיית ערך קיצון.

מילות מפתח: סטנדרטים, NCTM, קישוריות, הוכחה, הוכחות, חשיבה מתמטית, אלגברה, פתרון בעיות בדרכים שונות, בעיות מילוליות, בעיות תנועה, דרך, מהירות, זמן, אי שוויון ריבועי, פונקציות, פונקציה קווית, שיפוע, לוגיקה, הנדסה אנליטית, גיאומטריה אנליטית, מרחק נקודה מישר, משולש, גובה במשולש, מעגל, גיאומטריה, הנדסה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, משולש ישר זווית, תיכון, יתר, גובה, משולש שווה שוקיים, מרובע, מרובעים, מקבילית, מלבן, חפיפת משולשים, קטע אמצעים במשולש, סימטריה, אנליזה, בעיות ערך קיצון, שטח מרובע, נגזרת, טריגונומטריה, פונקציה טריגונומטרית.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 36, תשס״ו 2006, עמודים 8-14.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

על ארבעה סוגים של קשרים מתמטיים ופתרון בעיות בדרכים שונות

רוזה לייקין[1]
rozal@construct.haifa.ac.il
הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה

בניית הקשרים מתמטיים תורמת לפיתוח הבנה מתמטית עמוקה. למעשה, זהו אחד העקרונות הבסיסיים בחינוך המתמטי המודגש בסטנדרטים של ה- NCTM (2000). בהתאם, עיסוק בקשרים בין תחומים מתמטיים בונה בקרב התלמידים ראיה של מתמטיקה כמדע מקושר ולא כאוסף של נושאים בודדים (House & Coxford, 1995; NCTM, 2000). הסטנדרטים של ה-NCTM (2000) ממליצים, כי בכיתות ט-יב יפתחו התלמידים את יכולתם לקשר בין רעיונות מתמטיים שונים על ידי העמקה של ההבנה, כי גישות שונות לפתרון בעיה אחת יכולות להוביל לתוצאות שקולות. ברוב ספרי הלימוד בארץ, בעיות מתמטיות מאורגנות על פי נושאים מתמטיים שנלמדים בתכנית הלימודים. כך, תלמידים רבים 'יודעים בדיוק' לאיזה תחום מתמטי הבעיה שייכת, וחושבים שלכל בעיה ניתן למצוא פתרון 'אחד ויחיד' (Schoenfeld, 1988). מסמך הסטנדרטים של NCTM מדגיש את תפקידו המיוחד של המורה במציאת משימות מתמטיות מקשרות, אך מציין, כי חיפוש אחר בעיות כאלה דורש מהמורים זמן רב ויוזמה מיוחדת.

בסטנדרטים של ה-NCTM (2000) מציינים ארבעה סוגים של קשרים מתמטיים המאפשרים לפתור בעיות בדרכים שונות:

א. בין ייצוגים שונים של מושג מתמטי מסוים;
ב. בין מושגים שונים, בין משמעויות שונות של אותו מושג או בין פרוצדורות שונות בתחום מתמטי מסוים;
ג. בין ענפי המתמטיקה השונים;
ד. בין מתמטיקה לתחומי דעת אחרים.

במאמר זה אציג ארבע בעיות מתמטיות שמדגימות את הקשרים משלושת הסוגים הראשונים, הנבנים באמצעות פתרון בעיות בדרכים שונות. אציין כי במאמר לא ניתנים פתרונות מלאים, אלא רק תיאורים של דרכים שונות לפתרון.

קשרים בין ייצוגים שונים

בעיה 1: דני ורוני יצאו בו זמנית מהאוטובוס והלכו באותה דרך לבית הספר. דני הלך במחצית הראשונה של הזמן במהירות v_1 ובמחצית השנייה של הזמן במהירות v_2. רוני הלכה במחצית הראשונה של הדרך במהירות v_1 ובמחצית השנייה של הדרך במהירות v_2. מי הגיע לבית הספר ראשון: רוני או דני?

הערה: הבעיה נלקחה מספר אולימפיאדות (Babinskaya, 1975) בו הוצג עבורה פתרון אלגברי. גלעד (1998) הציגה שתי דרכים לפתרון הבעיה בפתיחה לדיון מורחב שעסק בגישה פונקציונאלית לפתרון בעיות מילוליות. במאמר זה אתאר ארבע דרכים המובילות לפתרון שקול של הבעיה.

לכל הפתרונות נניח ללא הגבלת הכלליות כי: $v_1 > v_2$

דרך א: *סימבולית* – נארגן את הנתונים בטבלת עזר. נסמן ב- s את כל הדרך, וב-T את זמן ההליכה של דני.

1 המאמר הוצג בסדנה שהועברה על-ידי המחברת במסגרת ההשתלמות: בית ספר קיץ, תשס"ה: קישורים והקשרים במתמטיקה ובהוראתה, קשר חם, המרכז הארצי לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי בטכניון, חיפה, אוגוסט 2005.

	דרך	מהירות	זמן
דני חצי ראשון של הזמן	$v_1\frac{T}{2}$	v_1	$\frac{T}{2}$
חצי שני של הזמן	$v_2\frac{T}{2}$	v_2	$\frac{T}{2}$
רוני חצי ראשון של הדרך	$\frac{s}{2}$	v_1	$\frac{s}{2v_1}$
חצי שני של הדרך	$\frac{s}{2}$	v_2	$\frac{s}{2v_2}$

נסמן ב-x את הזמן שארכה דרכה של רוני:

$$x=\frac{s\cdot(v_1+v_2)}{2v_1\cdot v_2} \Leftarrow x=\frac{s}{2v_1}+\frac{s}{2v_2}$$

T מייצג את הזמן שארכה דרכו של דני:

$$T=\frac{2s}{(v_1+v_2)} \Leftarrow s=v_1\cdot\frac{T}{2}+v_2\cdot\frac{T}{2}$$

נבחן את הקשר בין x ל- T, כלומר נחקור איזו תבנית מייצגת מספר גדול יותר:

$$\frac{s\cdot(v_1+v_2)}{2v_1\cdot v_2}$$

או:

$$\frac{2s}{(v_1+v_2)}$$

$$\frac{2s}{(v_1+v_2)} \le \frac{s\cdot(v_1+v_2)}{2v_1\cdot v_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4v_1\cdot v_2 \le (v_1+v_2)^2 \Leftrightarrow (v_1-v_2)^2 \ge 0$$

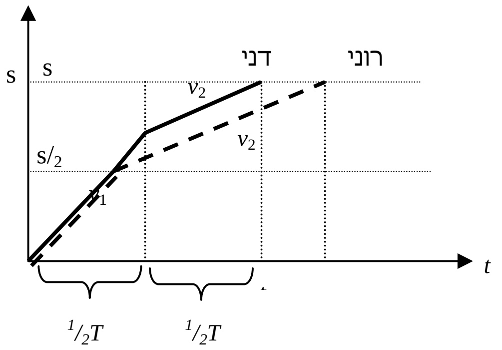
כלומר דני הגיע ראשון לבית הספר, אם v_1 שונה מ-v_2.

תשובה: דני יגיע לפני רוני.

זאת דרך סטנדרטית. בה רוב המורים וגם תלמידיהם ניגשים לפתרון הבעיה. הדרך כוללת בניית טבלה לארגון הנתונים ופתרון משוואה אלגברית. לביצוע נכון של הפתרון בדרך זו נדרש ידע בפתרון אי-שוויונים ריבועיים והכרת הזהות $a^2+b^2\ge 2ab$. לכן הבעיה ניתנת לפתרון בדרך זאת על-ידי תלמידים מצטיינים של כיתות ט ועל-ידי תלמידי כיתות י-יב.

דרך ב: גרפית – נבנה גרף שיתאר את הדרך כפונקציה של הזמן עבור התנועה של דני מן האוטובוס לבית הספר. הוא הלך בכל אחד משני **חצאי הזמן** במהירויות קבועות השונות זו מזו. לכן בחצי הזמן בו הלך במהירות קטנה יותר הוא עבר דרך קצרה יותר. הדרך הכוללת שעבר דני היא s, המסומנת על ידי קו האופקי.

נסמן על ידי קו אופקי $\frac{s}{2}$ את אמצע הדרך. רוני החליפה מהירותה במפגש של הקו בעל שיפוע v_1 עם הקו האופקי $\frac{s}{2}$. גרף התנועה המתאים **למחצית השנייה של הדרך** שרוני עברה הוא קו בעל שיפוע המקביל לקו המייצג את התנועה של דני במחצית השנייה של הזמן. קו זה חותך את הקו האופקי s **מימין** לנקודת החיתוך המסמנת את סיום דרכו של דני.



איור 1: פתרון גרפי, בעיה 1

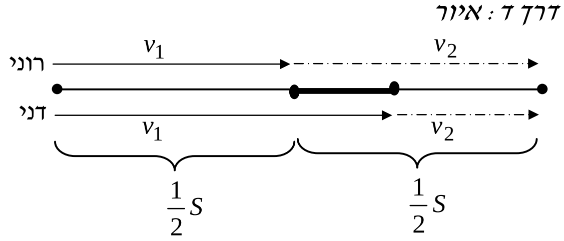
תשובה: דני יגיע לפני רוני.

דרך זאת ניתנת ליישום בשלב בו התלמידים לומדים את נושא הפונקציה הקווית, כלומר בכיתות ז או ח, תלוי בסדר הוראה בבית הספר. יישום הגישה הגראפית מקדים את יכולת התלמידים להתמודד עם הבעיה.

דרך ג: מילולית (לוגית) – אם דני הולך מחצית הזמן במהירות v_1 ומחצית הזמן במהירות v_2 וידוע ש-$v_1>v_2$, אזי במהלך המחצית הראשונה של הזמן הוא עובר דרך ארוכה יותר מאשר במהלך המחצית השנייה של הזמן. כלומר הוא הולך במהירות גבוהה יותר v_1 דרך ארוכה יותר מרוני.

תשובה: דני יגיע לפני רוני.

דרך ד: איור



איור 2: פתרון בעזרת איור, בעיה 1

בקטע המודגש המהירות של דני הייתה גבוהה מזאת של רוני. בכל החלקים האחרים של הדרך הם הלכו במהירויות זהות.

תשובה: דני יגיע לפני רוני.

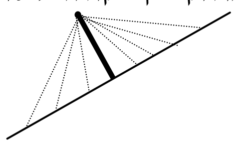
דרכים ג ו-ד הן, למעשה, דרכים זהות, המבוססות על שימוש בייצוגים שונים. הסברים אלה ניתנים ליישום עם תלמידי כיתות ו.

קשרים בין מושגים שונים בתחום מתמטי מסוים

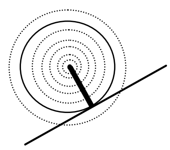
1. קשרים בין הגדרות שקולות של אותו מושג

בעיה 2: מצאו את המרחק בין הנקודה $A(1,6)$ לבין הישר שמשוואתו $y = x - 1$

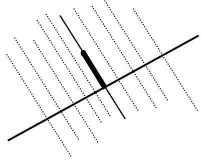
השיטות השונות לפתרון הבעיה מתבססות על שימוש בארבע הגדרות שקולות של מרחק בין נקודה לישר (Winicky-Landman & Leikin, 1996; לייקין, גורביץ ומדניקוב, 2002):



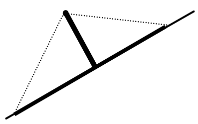
הגדרה א: המרחק בין נקודה לישר הוא אורך הקטע הקצר ביותר המחבר את הנקודה עם הישר



הגדרה ב: המרחק בין נקודה לישר הוא אורך מחוג המעגל שמרכזו בנקודה הנתונה המשיק לישר הנתון



הגדרה ג: המרחק בין נקודה לישר הוא אורך האנך לישר מהנקודה הנתונה



הגדרה ד: המרחק בין נקודה לישר הוא אורך הגובה במשולש שאחת מצלעותיו על הישר והקדקוד (הנותר) בנקודה הנתונה

איור 3, המופיע בעמוד 13 מציג את 'מפת הבעיה' המתארת דרכים/שיטות שונות בהן ניתן לפתור את הבעיה.

2. קשרים בין משפטים שונים (תכונות שונות) הקשורות לאותו מושג

בעיה 3: הוכח את המשפט: התיכון ליתר במשולש ישר זווית, שווה באורכו למחצית היתר.

בכל אחת מהדרכים שמוצגות להלן מבצעים בניית עזר שונה. בהתאם – ההוכחות של התכונה הן שונות. ההוכחות עושות שימוש במשפטים שונים. כך, התכונה מתחברת למושגים ולנושאים שונים בגיאומטריה ומקשרת ביניהם: מרובעים ואלכסונים במלבן, קטע אמצעים במשולש, משולשים שווי-שוקיים, מעגלים.

דרך א: מאריכים את התיכון כאורכו – מובילה לבניית מקבילית (אלכסונים במרובע חוצים זה את זה). המקבילית היא מלבן, כי אחת הזוויות במקבילית היא ישרה. האלכסונים במלבן חוצים זה את זה ושווים זה לזה. לכן התיכון שווה באורכו למחצית היתר.

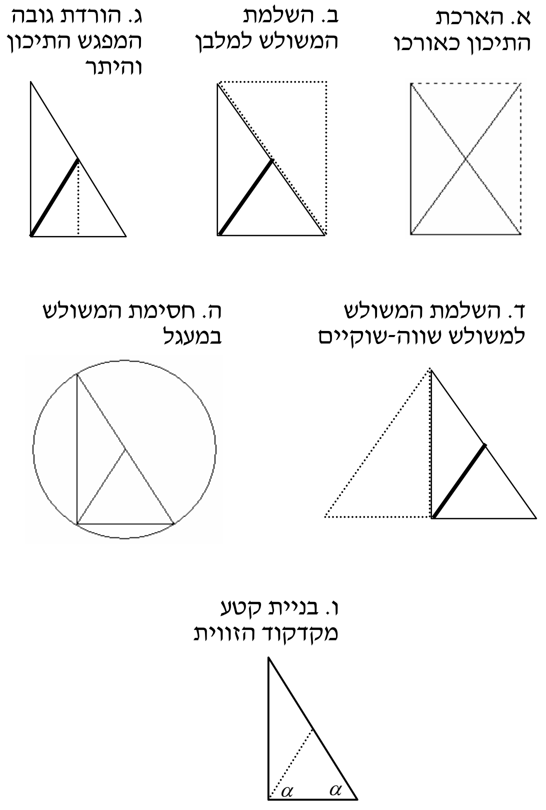
דרך ב: משלימים את המשולש למרובע, על-ידי משולש חופף לו, המתקבל מן המשולש המקורי על-ידי סיבוב ב-180 מעלות. מתקבל מלבן – מרובע בו כל הזוויות ישרות. (ההמשך זהה לדרך א).

דרך ג: אנך שמורידים ממפגש התיכון והיתר אל הניצב הוא קטע אמצעים במשולש: הוא יוצא מאמצע היתר ומקביל לניצב השני, כי שני אנכים לישר אחד מקבילים זה לזה. לכן האנך, שהוא גובה במשולש הקטן הוא גם תיכון בו, ולכן המשולש הקטן הוא שווה-שוקיים. כלומר התיכון של המשולש ישר הזווית שווה באורכו למחצית היתר.

דרך ד: משלימים את המשולש הנתון על ידי שיקוף למשולש שווה-שוקיים. במשולש שווה-השוקיים התיכון ליתר של המשולש המקורי הוא קטע אמצעים, כי הוא מחבר בין אמצעים של שתי צלעות במשולש (שוק ובסיס). לכן הוא שווה באורכו למחצית השוק. כלומר התיכון שווה באורכו למחצית היתר.

דרך ה: חוסמים את המשולש ישר הזווית במעגל. התיכון הוא מחוג במעגל והיתר הוא קוטר המעגל, לכן התיכון שווה באורכו למחצית היתר.

דרך ו: בונים במשולש הנתון קטע היוצא מהקדקוד של הזווית הישרה, היוצר משולש שווה-שוקיים (למשל, על ידי בניית זווית שווה לזווית החדה ליד הניצב). נוצרים כך שני משולשים שווי- שוקיים (ניתן להצדיק על-ידי חישוב הזוויות). לכן הקטע שנבנה הוא תיכון ליתר ושווה באורכו למחצית היתר.



איור 4 : בניות עזר לפתרונות שונים, בעיה 3

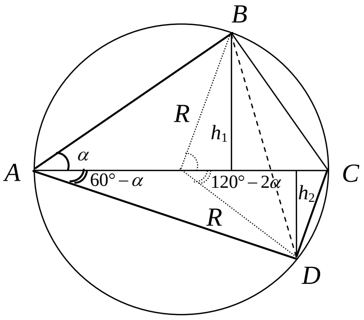
בעמוד 14 מופיעה מפת-מושגים, שמציגה את הקשרים המתמטיים שניתן לבנות תוך דיון בהוכחות השונות של תכונת התיכון ליתר במשולש ישר זווית.

דרכים נוספות :

ראוי לציין, כי קיימות גם דרכים נוספות להוכחת המשפט. דרכים אלה מגייסות כלים מתחומים מתמטיים שונים ומבוססות על חישובים כגון : שימוש במשפט פיתגורס, שימוש בדמיון, שימוש בהנדסה אנליטית (ממקמים את המשולש במערכת צירים) או שימוש בווקטורים. דרכים אלה יוצרות קישורים בין תחומי תוכן שונים במתמטיקה ובכך מתאימות להדגים את הסעיף הבא. אתן שם דוגמא אחרת.

קשרים בין ענפי המתמטיקה השונים

בעיה 4 : מרובע ABCD חסום במעגל. האלכסון AC הוא קוטר המעגל. זווית A היא בת 60 מעלות. נסמן ב-a את הזווית BAC. עבור אילו ערכים של a מתקבל מרובע ABCD ששטחו מקסימאלי?



איור 6 : בעיה 4

בעיה זאת מדגימה פתרונות מתחומים מתמטיים שונים לבעיה אחת. שני פתרונות (א ו-ג) הוצגו אצל לייקין (1997) פתרונות ב ו-ד הוצעו על ידי מורים בסדנאות בהן עסקו בפתרון בעיות בדרכים שונות.

הקדמה – משותפת לשתי הדרכים:

רדיוס המעגל מסומן ב- R.

$$S_{ABCD} = R\cdot(h_1+h_2) \Leftarrow \left| \begin{array}{l} S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} \\ S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot h_1 = R\cdot h_1; \\ S_{ADC} = \frac{1}{2}AC\cdot h_2 = R\cdot h_2 \end{array} \right.$$

R קבוע, לכן שטח המרובע (S_{ABCD}) מקסימאלי כאשר סכום הגבהים (h_1+h_2) מקבל ערך מקסימאלי.

פתרון 1 : נגזרת של הפונקציה h_1+h_2

דרך א: אנליזה, שימוש בנגזרת

$$h_1 = R\sin 2\alpha\,; h_2 = R\sin(120°-2\alpha)\,, 0° < \alpha < 60° \Rightarrow$$

$$h_1+h_2 = R\cdot(\sin 2\alpha + \sin(120^\circ - 2\alpha)) \Leftrightarrow h_1+h_2 =$$

$$= R\cdot 2\sin 60^\circ \cdot \cos(60^\circ - 2\alpha) \quad , \quad 0^\circ < \alpha < 60^\circ$$

$$h_1+h_2 = R\sqrt{3}\cdot\cos(\frac{\pi}{3}-2\alpha), \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{3}$$

כדי למצוא את הערך המקסימאלי של הפונקציה h_1+h_2 נמצא את נקודות הקיצון שלה:

$$\left(h_1+h_2\right)'=2\sqrt{3}R\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-2\alpha)$$

$$\left(h_1+h_2\right)'=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}$$

תשובה: עבור $\alpha=30°$ מתקבל מרובע בעל שטח **מקסימאלי**.

דרך ב: טריגונומטריה, תכונות של פונקציות טריגונומטריות

כמו בדרך א נקבל כי:

$$h_1+h_2=R\sqrt{3}\cdot\cos(\frac{\pi}{3}-2\alpha),\quad 0^\circ<\alpha<60^\circ$$

הערך המקסימאלי של הקוסינוס הוא "1":

$\cos(\frac{\pi}{3}-2\alpha)=1$ והוא מתקבל עבור $\alpha=30^\circ$.

תשובה: עבור $\alpha=30^\circ$ מתקבל מרובע בעל שטח **מקסימאלי**.

דרך ג: גיאומטריה, סימטריה

אחת ההיוריסטיקות המוכרות הקשורות לפתרון בעיות ערך-קיצון, מציעה התבוננות במצב סימטרי ובהשוואה בין מצב זה למצבים לא סימטריים.

על המיתר BD נשענת זווית בת $60°$ (ר' איור 6). לכן אורך האלכסון BD קבוע.

כאשר הנקודות B ו-D סימטריות זו לזו ביחס ל-AC, BD מאונך ל- AC ו- $h_1+h_2=BD$.

בכל המצבים האחרים BD משופע ביחס ל- AC ולכן .

לכן הסכום h_1+h_2 מקבל ערך מקסימאלי כאשר הנקודות B ו- D סימטריות זו לזו ביחס ל- AC, כלומר כאשר AC חוצה את הזווית $\angle BAD$ ולכן:

$$\alpha=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ$$

תשובה: עבור $\alpha=30^\circ$ מתקבל מרובע בעל שטח **מקסימאלי**.

דרך ד: גיאומטריה משולבת עם טריגונומטריה

$ABCD$ הוא מרובע בעל שני אלכסונים קבועים: AC הוא קוטר של המעגל נתון, BD – מיתר קבוע הנשען על זווית היקפית בת $60°$. נסמן ב- β את הזווית (החדה?) בין AC לבין BD.

אז: $S_{ABCD}=AC\cdot BD\cdot\cos\beta$

השטח מקסימאלי כאשר $\beta=90°$. כלומר כאשר AC חוצה את הזווית $\angle BAD$ ולכן $a=\frac{1}{2}\cdot 60°=30^\circ$.

תשובה: עבור מתקבל מרובע בעל שטח **מקסימאלי**.

איור 7, המופיע בעמוד 14 מציג את הקשרים הבין-תחומיים והבין-מושגיים הנבנים בעזרת פתרון בבעיה 4 בדרכים שהוצגו לעיל.

בדומה לבעיה 1 גם בבעיה 4 פתרונות שונים ניתנים ליישום בשלבים שונים של הוראת המתמטיקה בבית הספר. דרך א לפתרון הבעיה דורשת ידע של נגזרת, לכן תלמידים יכולים להתמודד עימה רק בחט"ע. יחד עם זאת דרך ג לפתרון אפשרית, כאשר התלמידים לומדים את נושא המעגל בבית הספר. שילוב של כל הדרכים בשלבים מתקדמים של למידה מאפשרת לתלמידים לא רק לבצע את הפתרון בהצלחה ולמצוא תשובה נכונה, אלא גם להבין מדוע תשובה מסוימת מתקבלת.

ולסיכום

על בסיס מחקר שנערך במהלך חמש השנים האחרונות אפשר לראות, כי יישום ושילוב של פתרון בעיות בדרכים שונות במהלך ההוראה אינו פשוט למורים (Leikin et al., 2006). תמיד קיימת התלבטות: "מה יותר יעיל: לפתור ארבע בעיות כל אחת בדרך אחת או לפתור בעיה אחת בארבע דרכים שונות". רק אחרי שמנסים רואים את התשובה. כדאי לנסות!

מקורות

גלעד (1998). בעיות מילוליות. מט"ח

לייקין, מדניקוב, וגורביץ (2003). אוגדן משימות מקשרות. משרד החינוך ואוניברסיטת חיפה.

Babinskaya, I. L. (1975). *Problems from Mathematics Olympiads.* Moscow, Russia: Science. (In Russian)

House, P.A. & Coxford, A. F. (1995). Connecting Mathematics across the Curriculum: 1995 Yearbook. Reston, Va.: NCTM.

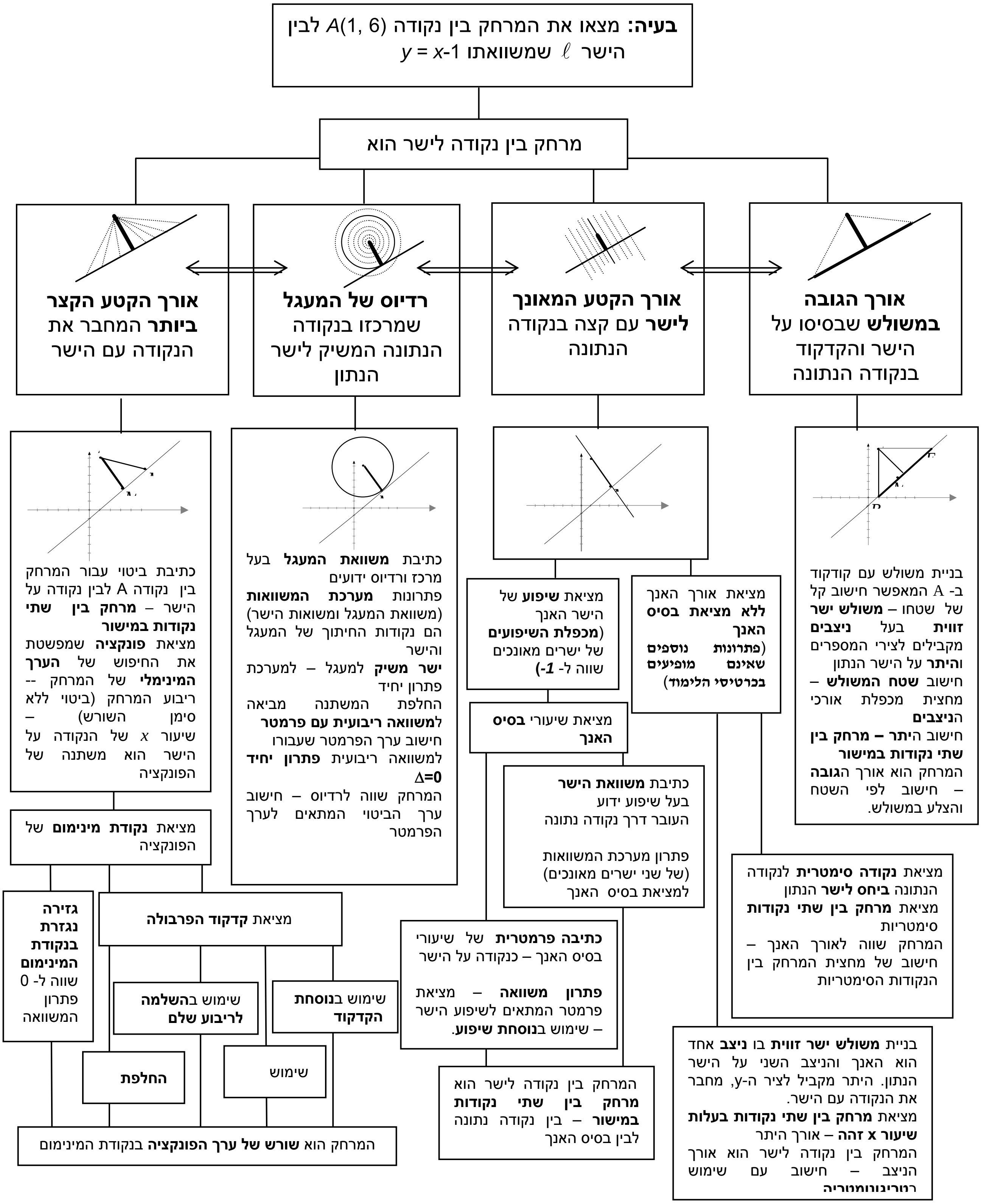
National Council of Teachers of mathematics. (NCTM) (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston VA: NCTM.

Leikin, R., Levav-Vineberg, A., Gurevich, I, & Mednikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance? *FOCUS on Learning Problems in Mathematics, 28*, 1-22.

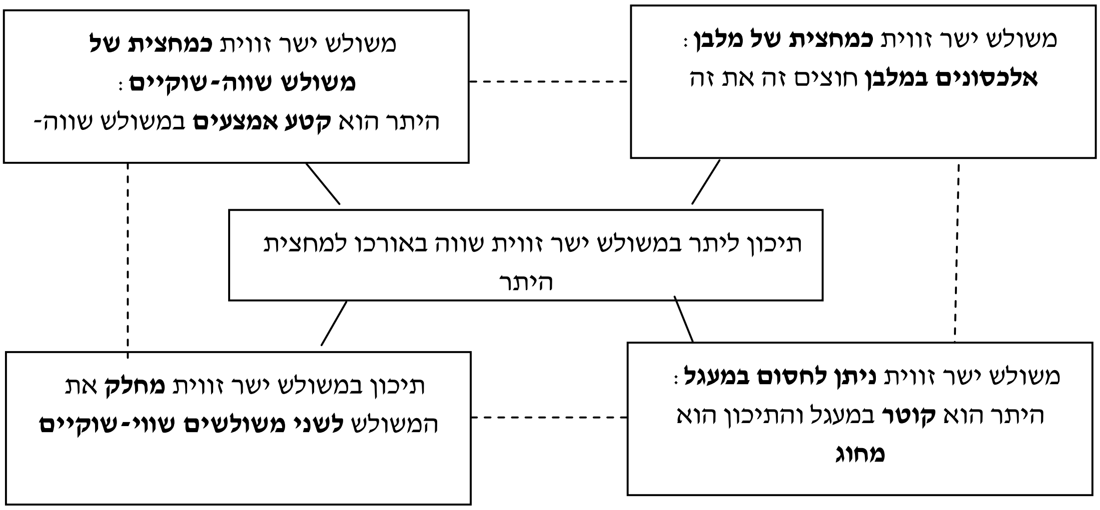
Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses". Educational Psychologist, 23(2), 145-166.

Winicky-Landman, G. & Leikin, R. (1996). About Concept Definitions: What if they are not Equivalent? The paper presented at The Eighth International Congress on Mathematics Education.

איור 3: מפת הבעיה, בעיה 2.
לקוח מ-לייקין גורביץ ומדניקוב (2002): תיאור היחידה 1, עמ' 5



איור 5: מפת הבעיה, בעיה 3



איור 7: מפת בעיה 4