



הנושא: משולשים, מעגלים, חוצי זוויות, זהויות טריגונומטריות, סדרה הנדסית ושאיפה לגבול – מה הקשר?

אבי סיגלר.

הוכן ע"י:

המאמר מציג תהליך גיאומטרי של יצירת סדרה אינסופית של משולשים חסומים במעגל, אשר שטחיהם, היקפיהם ואורכי המחוגים של המעגלים החסומים בהם שואפים באופן מונוטוני לגבול. ההוכחה עצמה מקשרת בין תחומי תוכן שונים במתמטיקה: נעשה בה שימוש בשיקולים גיאומטריים, הגדרת סדרות, חישובי גבולות, אי-שוויון הממוצעים ועוד.

תקציר:

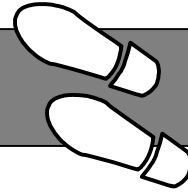
קישוריות, גיאומטרית המישור, גיאומטריה, הנדסת המישור, הנדסה, משולש, מעגל חסום במשולש, מעגל חוסם משולש, קיום מיוחדים במשולש, חוצה זווית, גובה, אנך אמצעי, דמיון משולשים, משולש שווה צלעות, טריגונומטריה, משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים, שטח משולש, היקף משולש, אי שוויון הממוצעים, סדרות, סדרה הנדסית, אנליזה, חשבון דיפרנציאלי, גבול.

מילות מפתח:

החומר פורסם במסגרת: על"ה 36, תשס"ו 2006, עמודים 33-37.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 5 עמודים.

חקירה מתמטית



משולשים, מעגלים, חוצי זוויות, זהויות טריגונומטריות, סדרה הנדסית ושאיפה לגבול – מה הקשר?

אבי סיגלר
ביה"ס הטכני של חיל-האוויר, חיפה

בפתרון השאלה הראשונה עסקתי לפני זמן רב. אז שאלתי את עצמי: אם נחסום מעגל במשולש $\Delta A_2 B_2 C_2$ ונקבל את המשולש $\Delta A_3 B_3 C_3$ וכך הלאה, האם יתכן ש: $\Delta A_n B_n C_n \sim \Delta A_k B_k C_k$ ל- $k \neq n$? (כלומר האם יש איזו שהיא מחזוריות במידות הזוויות של המשולשים החסומים?)

התשובה לשאלה זו התגלתה כשיליתי. לפני 20 שנה בגיליונות מתמטיקה, הוכחתי שבתהליך הדינאמי המתואר, אין דמיון בין המשולשים מן הצורה $\Delta A_k B_k C_k$ ובנוסף: $\angle A_n \rightarrow 60^\circ$ כ- $n \rightarrow \infty$

בשאלה השנייה נתקלתי לא מזמן, כשעברתי על שאלות שנתנו בעבר בבחינות בגרות. הקשר הזה בין הזוויות של המשולשים הביאני מייד למסקנה כי:

$$\Delta A_0 B_0 C_0 \sim \Delta A_2 B_2 C_2$$

והובילני לחקור את ההתנהגות של סדרות משולשים וזוויות המתקבלות מחזרה על בניית משולשים כאלה, כלומר מבצוע תהליך דינאמי.

תאור התהליך הדינאמי

במעגל בעל מחוג R חסום משולש $\Delta A_1 B_1 C_1$ (לא שווה צלעות). חוצי הזוויות $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$ חותכים את המעגל בנקודות A_2, B_2, C_2 ו- C_2 בהתאמה. חוצי הזוויות $\angle A_2, \angle B_2, \angle C_2$ חותכים את המעגל בנקודות A_3, B_3, C_3 בהתאמה, וכך הלאה, המשולש $\Delta A_n B_n C_n$ נוצר על-ידי נקודות החיתוך של חוצי הזוויות של המשולש $\Delta A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$ עם המעגל.

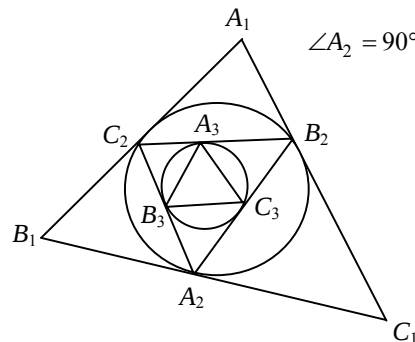
במאמר מוצגת הוכחה לתכונה גיאומטרית מעניינת, לדעתי, אותה הסקתי מקישור שעשיתי בין שתי שאלות נפרדות שנקרו בדרכי.

שאלה 1 – יש להוכיח כי:

אם A_2, B_2, C_2 נקודות ההשקה של המעגל החסום במשולש $\Delta A_1 B_1 C_1$ אז:

$$(1) \Delta A_2 B_2 C_2 \text{ הוא משולש חד זוויות};$$

$$(2) \angle A_2 = 90^\circ - \frac{\angle A_1}{2}$$



שאלה 2 – יש להוכיח כי:

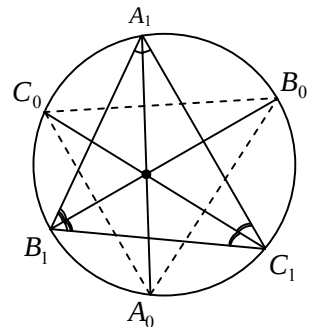
אם ממשולש $\Delta A_1 B_1 C_1$ בונים את המשולש $\Delta A_0 B_0 C_0$, שקדודיו הם נקודות החיתוך של ההמשכים של חוצי הזוויות עם המעגל החוסם את המשולש $\Delta A_1 B_1 C_1$, אזי מתקיימים הקשרים:

$$\angle A_0 = 90^\circ - \frac{\angle A_1}{2} = \angle A_2$$

$$\angle B_0 = 90^\circ - \frac{\angle B_1}{2} = \angle B_2$$

$$\angle C_0 = 90^\circ - \frac{\angle C_1}{2} = \angle C_2$$

כאשר A_2, B_2, C_2 הן נקודות ההשקה כבשאלה 1.



ב. $C_2 B_2 \perp A_1 A_2$ כי הזווית הנוצרת בין שני מיתרים

אלה שווה ל: $\frac{\widehat{A_1 C_2} + \widehat{A_2 B_2}}{2}$ ומתקיים:

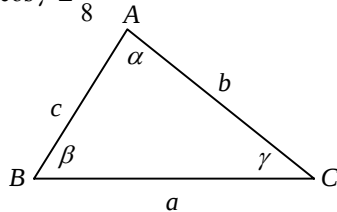
$$\frac{\widehat{A_1 C_2} + \widehat{A_2 B_2}}{2} = \angle C_2 + \frac{\angle C_1}{2} = 90^\circ - \frac{\angle C_1}{2} + \frac{\angle C_1}{2} = 90^\circ$$

לכן M , נקודת הפגישה של חוצי הזוויות של $\Delta A_1 B_1 C_1$ היא גם נקודת הפגישה של הגבהים של $\Delta A_2 B_2 C_2$. לכן נקודת הפגישה של חוצי הזוויות של $\Delta A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$ מתלכדת עם נקודת הפגישה של גבהי $\Delta A_n B_n C_n$.

זהויות טריגונומטריות – להוכחת (1), (2), ו-(3)

טענה 2: אם α, β, γ זוויות משולש, קיים:

$$(5) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8}$$



הוכחה: לפי משפט הקוסינוסים קיים:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

לכן עלינו להוכיח כי:

$$(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2) \leq 8a^2 b^2 c^2$$

ברור שאם ΔABC קהה או ישר זווית האי-שוויון מתקיים (כי במקרים אלה האגף השמאלי אי-חיובי). לכן נשאר להוכיח את הטענה רק במקרה שהמשולש ΔABC חד-זווית.

נסמן:

$$b^2 + c^2 - a^2 \equiv z, \quad a^2 + c^2 - b^2 \equiv y, \quad a^2 + b^2 - c^2 \equiv x$$

(x, y, z חיוביים)

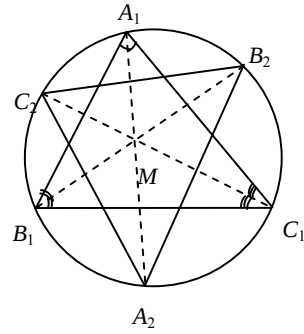
$$c^2 = \frac{y+z}{2}, \quad b^2 = \frac{x+z}{2}, \quad a^2 = \frac{x+y}{2} \quad \text{ואז:}$$

$$xyz \leq \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+z}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \quad \text{כלומר נשאר להוכיח ש:}$$

אבל לפי אי-שוויון הממוצעים:

$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}, \quad \frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz}, \quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+z}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2 z^2} = xyz \quad \text{לכן:}$$



נסמן:

S_n - שטח המשולש $\Delta A_n B_n C_n$

P_n - היקף המשולש $\Delta A_n B_n C_n$

r_n - רדיוס המעגל החסום במשולש $\Delta A_n B_n C_n$

במאמר זה נוכיח:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{ו-} \quad S_1 < S_2 < S_3 \dots < S_n \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 3R\sqrt{3} \quad \text{ו-} \quad P_1 < P_2 < P_3 \dots < P_n \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{R}{2} \quad \text{ו-} \quad r_1 < r_2 < r_3 \dots < r_n \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \angle A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle C_n = 60^\circ \quad (4)$$

משמעות ארבע הטענות הללו היא, שהתהליך הדינאמי יוצר סדרות מונוטוניות עולות של שטחים, היקפים ומחוגים של מעגלים חסומים, השואפות כולן לגבול שמשמעותו שאיפת המשולש $\Delta A_n B_n C_n$ למשולש שווה צלעות.

הקשר בין $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$ לבין $\angle A_2, \angle B_2, \angle C_2$

$$\text{טענה 1:} \quad \angle A_1 = 180^\circ - 2\angle A_2 \quad \text{או} \quad \angle A_2 = 90^\circ - \frac{\angle A_1}{2}$$

$$\angle B_1 = 180^\circ - 2\angle B_2 \quad \text{או} \quad \angle B_2 = 90^\circ - \frac{\angle B_1}{2}$$

$$\angle C_1 = 180^\circ - 2\angle C_2 \quad \text{או} \quad \angle C_2 = 90^\circ - \frac{\angle C_1}{2}$$

הוכחה: $\angle A_2$ נשענת על הקשת $C_2 A_1 B_2$ המורכבת מן

הקשתות $C_2 A_1$ ו- $A_1 B_2$

$$\angle A_2 = \frac{\angle B_1}{2} + \frac{\angle C_1}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A_1}{2} \quad \text{לכן:}$$

מסקנות מטענה 1

א. המשולש $\Delta A_2 B_2 C_2$ חד-זווית, לכן עבור כל:

$\Delta A_n B_n C_n$ חד-זווית, $n \geq 2$

$$\frac{a+b+c}{2R} \geq \frac{2S}{R^2}$$

$$(a+b+c)R \geq 4S \quad \text{או:}$$

$$(a+b+c)R \geq 4 \cdot \frac{(a+b+c)}{2} \cdot r \quad \text{או:}$$

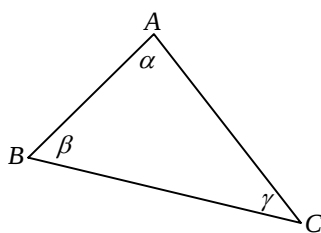
$$R \geq 2r \quad \text{או:}$$

וזה כבר הוכח.

טענה 5: אם γ, β, α זווית משולש, קיים:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \geq \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$$

הערה: ברור שהאי-שוויון קיים במשולש קהה זווית או ישר זווית, כי במקרה זה האגף הימני אי-חיובי, לכן נשאר להוכיח את האי-שוויון במשולש חד-זווית. ההוכחה מסובכת, אך מעניינת בעיקר תודות לשילוב בין שיקולים טריגונומטריים ואלגבריים.



הוכחה:

$$\beta \equiv \theta + x$$

$$\gamma \equiv \theta - x \quad \text{נסמן:}$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\theta \quad \text{ואז:}$$

בסימון זה כדי להוכיח את (10):

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \geq \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$$

עלינו להוכיח כי:

$$(10^*) \sin \frac{\theta+x}{2} \sin \frac{\theta-x}{2} \sin(90^\circ - \theta) \geq \cos(\theta-x) \cos(180^\circ - 2\theta) \cos(\theta+x)$$

עם האילוצים הבאים: $90^\circ > \theta > 45^\circ$ כי: α זווית חדה

$45^\circ \geq x \geq 0^\circ$ כי: β זווית חדה

$\theta > x$ כי: $\gamma > 0$

אפשר לכתוב את (10*) גם כך:

$$(10^{**}) \sin \frac{\theta+x}{2} \sin \frac{\theta-x}{2} \cos \theta + \cos(\theta+x) \cos(\theta-x) \cos 2\theta \geq 0$$

אם נשתמש בנוסחאות הפיכת מכפלה לסכום באגף השמאלי של (10*).

נקבל שעלינו להוכיח כי:

$$(\cos x - \cos \theta) \cos \theta + (\cos 2x + \cos 2\theta) \cos 2\theta \geq 0$$

או אם נשתמש בנוסחה: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

(השוויון מתקיים כאשר: $x = y = z$ כלומר כאשר $\triangle ABC$ שווה-צלעות).

טענה 3:

בנתוני טענה 2 קיים:

$$(6) \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

הוכחה:

$$\gamma_1 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}, \beta_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \alpha_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \quad \text{נסמן:}$$

$$180^\circ = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \quad \text{ברור ש:}$$

$$\frac{1}{8} \geq \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_1 \quad \text{לפי טענה 2 קיים:}$$

$$\frac{1}{8} \geq \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{לכן:}$$

מסקנה חשובה מטענה 3:

$$r \leq \frac{1}{2} R \quad \text{בכל משולש קיים:}$$

$$r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{הוכחה: ידועה הזהות:}$$

(זהות שהופיעה כמה פעמים בבחינות בגרות).

$$\frac{1}{8} \geq \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{לפי טענה 3:}$$

$$(7) r \leq \frac{1}{2} R \quad \text{לכן:}$$

מסקנה נוספת מטענה 3:

$$(8) \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \geq \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \\ &= 8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

(לפי טענה 3) ≤ 1

טענה 4: אם γ, β, α זווית משולש, אזי קיים:

$$(9) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \geq \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$$

הוכחה: לפי משפט הסינוסים קיים:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{a+b+c}{2R}$$

ידועה מאוד הזהות:

$$R^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 2S$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \frac{2S}{R^2} \quad \text{לכן:}$$

לכן כדי להוכיח את (9) צריך להוכיח שבמשולש קיים:

נקבל שעלינו להוכיח:

$$(10^{***}) \quad 2\cos^2 x \cos 2\theta + \cos x \cos \theta - \cos^2 \theta - \cos 2\theta + \cos^2 2\theta \geq 0$$

אם נסמן: $\cos x \equiv z$, נקבל פונקציה:

$$(11) \quad y(z) = 2z^2 \cos 2\theta + z \cos \theta - \cos^2 \theta - \cos 2\theta + \cos^2 2\theta$$

אולם: $\theta > 45^\circ$ לכן: $\cos 2\theta < 0$, ומכאן: $y(z)$ היא פרבולה בעלת מקסימום. אם נוכיח שבתחום הנתון המינימום המוחלט של הפונקציה (11) אי-שלילי, סיימנו. לצורך זה נבדוק את הערכים של $y(z)$ בקצות תחום ההגדרה, כלומר עבור:

$$1 = z = \cos 0^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = z = \cos 45^\circ$$

ועבור:

(א) בדיקת $y(1)$:

$$\begin{aligned} y(1) &= 2\cos 2\theta + \cos \theta - \cos^2 \theta - \cos 2\theta + \cos^2 2\theta \\ &= \cos 2\theta + \cos \theta - \cos^2 \theta + \cos^2 2\theta \\ &= 2\cos^2 \theta - 1 + \cos \theta - \cos^2 \theta + (2\cos^2 \theta - 1)^2 \\ &= 4\cos^4 \theta - 3\cos^2 \theta + \cos \theta = \cos \theta (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta + 1) \\ &= \cos \theta (\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

הערה: הפירוק לגורמים של $4\cos^3 \theta - 3\cos \theta + 1$ התבסס על העובדה ש: $\cos \theta = -1$ מאפס את הביטוי.

$$b. \text{ בדיקה עבור } y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right):$$

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \theta - \cos^2 \theta - \cos 2\theta + \cos^2 2\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta - \cos^2 \theta + \cos^2 2\theta = \cos \theta \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \theta\right) + \cos^2 2\theta \end{aligned}$$

$$\text{אבל נתון ש: } 90^\circ > \theta > 45^\circ \text{ לכן: } \cos \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ולכן: } y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geq 0$$

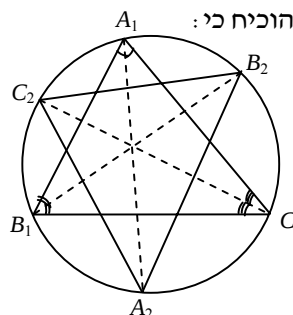
הוכחת המשפטים 1-4

עתה יש ברשותנו הכלים להוכיח כי:

$$1. \quad S_1 < S_2 < \dots < S_m \dots$$

$$2. \quad P_1 < P_2 < \dots < P_m$$

$$3. \quad r_1 < r_2 < \dots < r_m$$



הוכחת 1

נוכיח ש: $S_1 < S_2$ וזה מספיק כדי להוכיח את 1.

לפי טענה 1:

$$\angle C_2 = 90^\circ - \frac{\angle C_1}{2}, \angle B_2 = 90^\circ - \frac{\angle B_1}{2}, \angle A_2 = 90^\circ - \frac{\angle A_1}{2}$$

נרשום את שטחי המשולשים:

$$S_1 = 2R^2 \sin \angle A_1 \cdot \sin \angle B_1 \cdot \sin \angle C_1$$

$$S_2 = 2R^2 \sin \angle A_2 \cdot \sin \angle B_2 \cdot \sin \angle C_2$$

$$= 2R^2 \cos \frac{\angle A_1}{2} \cos \frac{\angle B_1}{2} \cos \frac{\angle C_1}{2}$$

אבל לפי (8) מסקנה מטענה 3 – קיים:

$$\cos \frac{\angle A_1}{2} \cos \frac{\angle B_1}{2} \cos \frac{\angle C_1}{2} \geq \sin \angle A_1 \sin \angle B_1 \sin \angle C_1$$

$$\text{לכן: } S_1 < S_2$$

(ושוויון קיים רק אם $\Delta A_1 B_1 C_1$ שווה-צלעות).

הוכחת 2: מספיק להוכיח ש: $P_1 < P_2$

$$\text{קיים: } P_2 = 2R(\sin \angle A_2 + \sin \angle B_2 + \sin \angle C_2)$$

$$P_1 = 2R(\sin \angle A_1 + \sin \angle B_1 + \sin \angle C_1)$$

$$= 2R[\sin(180^\circ - 2\angle A_2) + \sin(180^\circ - 2\angle B_2) + \sin(180^\circ - 2\angle C_2)]$$

$$= 2R(\sin 2\angle A_2 + \sin 2\angle B_2 + \sin 2\angle C_2)$$

אבל הוכח בטענה 4:

$$\sin \angle A_2 + \sin \angle B_2 + \sin \angle C_2 \geq$$

$$\geq \sin 2\angle A_2 + \sin 2\angle B_2 + \sin 2\angle C_2$$

$$\text{לכן: } P_2 > P_1$$

הוכחת 3: מספיק להוכיח ש: $r_2 > r_1$

קיים:

$$r_1 = 4R \sin \frac{\angle A_1}{2} \sin \frac{\angle B_1}{2} \sin \frac{\angle C_1}{2}$$

$$r_2 = 4R \sin \frac{\angle A_2}{2} \sin \frac{\angle B_2}{2} \sin \frac{\angle C_2}{2}$$

$$\angle A_1 = 180^\circ - 2\angle A_2$$

$$\angle B_1 = 180^\circ - 2\angle B_2$$

$$\angle C_1 = 180^\circ - 2\angle C_2$$

אבל:

לכן:

$$r_1 = 4R \cos \angle A_2 \cos \angle B_2 \cos \angle C_2$$

לפי טענה 5 (נוסחה 10) קיים:

$$\sin \frac{\angle A_2}{2} \sin \frac{\angle B_2}{2} \sin \frac{\angle C_2}{2} \geq \cos \angle A_2 \cos \angle B_2 \cos \angle C_2$$

$$\text{לכן: } r_2 > r_1$$

והשוויון קיים רק כאשר $\Delta A_1 B_1 C_1$ שווה צלעות.

הגבול של סדרת המשולשים: $\Delta A_n B_n C_n$

הוכחנו בטענה 1 ש: $\angle A_2 = 90^\circ - \frac{\angle A_1}{2}$

למעשה הוכחנו ש: $\angle A_n = 90^\circ - \frac{\angle A_{n-1}}{2}$ לכל n טבעי.

לכן אפשר להציג את $\angle A_n$ כאיבר בסדרת נסיגה, אך קשה למצוא את $\lim_{n \rightarrow \infty} \angle A_n$ אם האיבר $\angle A_n$ לא מוצג כאיבר בסדרה לפי המקום.

נסתכל על $\angle A_2, \angle A_3, \angle A_4$ ו- $\angle A_5$ ונבין איך יראה האיבר $\angle A_n$ כפונקציה של n :

$$\angle A_2 = 90^\circ - \frac{\angle A_1}{2}$$

$$\angle A_3 = 90^\circ - \frac{90^\circ - \frac{\angle A_1}{2}}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^1} + \frac{\angle A_1}{2^2}$$

$$\angle A_4 = 90^\circ - \frac{90^\circ - \frac{90^\circ}{2} + \frac{\angle A_1}{2^2}}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^1} + \frac{90^\circ}{2^2} - \frac{\angle A_1}{2^3}$$

$$\angle A_5 = 90^\circ - \frac{90^\circ - \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2^2} - \frac{\angle A_1}{2^3}}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2^1} + \frac{90^\circ}{2^2} - \frac{90^\circ}{2^3} + \frac{\angle A_1}{2^4}$$

לכן נוסחת $\angle A_n$ תהיה מורכבת כך:

$$\angle A_n = \left(\text{סכום של סדרה הנדסית} \right) \pm \frac{\angle A_1}{2^{n-1}}$$

כאשר בסדרה ההנדסית האיבר הראשון הוא 90° והמנה הקבועה $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

אם n ישאף לאינסוף, ישאף לאפס, וסכום הסדרה

ההנדסית יתכנס לערך: $60^\circ = \frac{90^\circ}{1 + \frac{1}{2}}$, כלומר

$$\angle A_n \rightarrow 60^\circ$$

לכן: $60^\circ = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \angle A_n$

הגבול של המשולש $\Delta A_n B_n C_n$ הוא משולש שווה צלעות.

לכן ברור גם: $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 3R\sqrt{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{R}{2}$

סיכום

המאמר מציג תהליך גיאומטרי של יצירת סדרה אינסופית של משולשים חסומים במעגל, אשר שטחיהם, היקפיהם ואורכי המחוגים של המעגלים החסומים בהם שואפים באופן מונוטוני לגבול.

הוכחות ארבעת המשפטים המרכזיים שהוצגו כאן נשענו על שילוב בין תחומי תוכן שונים של המתמטיקה: טריגונומטריה, אלגברה וגיאומטריה.

(א) בטריונומטריה: נעשה שימוש באי-שוויונים זהותיים במשולש, קשר בין r - מחוג המעגל החסום במשולש לבין R - מחוג המעגל החוסם משולש ובקשר שבין אלה לבין זוויות משולש.

(ב) באלגברה: נעשה שימוש באי-שוויון הממוצעים, חקירת פונקציה ריבועית, מינימום מוחלט של פונקציה ריבועית בתחום נתון, סדרה הנדסית, הגדרת סדרה לפי מקום, סכום של סדרה אינסופית מתכנסת.

(ג) בעזרת שיקולים גיאומטריים: הוכחנו שהחל מ- $\Delta A_2 B_2 C_2$ כל המשולשים חדי-זווית, ומתקבלת התלכדות בין מרכז המעגל החסום ב- $\Delta A_n B_n C_n$ עם נקודת הפגישה של הגבהים במשולש $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$.

תוצאת התהליך הדינאמי הוא השאיפה של המשולש $\Delta A_n B_n C_n$ למשולש שווה צלעות - המשולש בעל השטח, ההיקף ומחוג המעגל החסום, המקסימאליים החסומים במעגל נתון.

מה בכיתה?

הידע הדרוש לפתרון הבעיה המוצגת במאמר זה שייך כולו לתכנית הלימודים ברמת 5 יח"ל. בזכות עושר ההזדמנויות לקישור בין תחומי תוכן שונים מתכנית הלימודים, יש לבעיה פוטנציאל גדול להוות בעיית חקר לפרוייקט עבור תלמידים מצטיינים. פרוייקט כזה מאפשר ביצוע הערכה חלופית. ניתן להתחיל את הפרוייקט בחקירה בעזרת לומדה של גיאומטריה דינאמית, שתוביל להעלאת השערות, ורק לאחר מכן לעבור להוכחתן. בהצלחה!