



הנושא: **ירושת השייח'** **וריאציה לשאלה מוכרת – פתרון משוואות וכלל נסיגה**

הוכן ע"י: יחיאל שליטין.

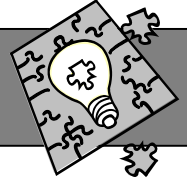
תקציר: במאמר מופיע פתרון לבעיה שהיא וריאציה על הכללה של שאלה מוכרת. הפתרון מהווה הזדמנות לקישוריות בין הנושאים: איבר כללי של סדרה, כלל נסיגה, סדרות סכומים, אינדוקציה מתמטית וכד'.

מילות מפתח: קישוריות, סדרות, סדרה, איבר כללי, סכום, כלל נסיגה, סדרת סכומים, אינדוקציה מתמטית.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 36, תשס"ו 2006, עמודים 47-49.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

בעיה לעניין



ירושת השייח'

וריאציה לשאלה מוכרת – פתרון משוואות וכלל נסיגה

יחיאל שליטין

הפקולטה לביולוגיה, הטכניון, חיפה

shalitin@tx.technion.ac.il

פתרון

הבעיה הבאה היא וריאציה על הכללה של שאלה מוכרת:

נסמן ב- S את מספר הכבשים, ב- n את מספר הבנים וב- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ את מספר הכבשים שקיבל כל בן, מהבכור ועד לצעיר ביותר. סימון זה נוח לפיתרון. ידוע גם כי: $a_2 = a_1$.

מתוך הנתונים נקבל:

$$a_1 = 1 + \frac{S-1}{k}$$

$$a_2 = 2 + \frac{S-a_1-2}{k}$$

$$a_3 = 3 + \frac{S-a_1-a_2-3}{k}$$

$$a_4 = 4 + \frac{S-a_1-a_2-a_3-4}{k}$$

...

$$a_n = n + \frac{S-S_{n-1}-n}{k}$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \quad \text{כאשר:}$$

נשתמש בשתי המשוואות הראשונות ובעובדה כי שני הבנים הבוגרים קיבלו מספר שווה של כבשים, ונקבל:

$$a_1 = a_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{S-1}{k} = 2 + \frac{S - \left(1 + \frac{S-1}{k}\right) - 2}{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k + S - 1 = 2k + S - 3 - \frac{S-1}{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = k - 2 - \frac{S-1}{k} \Leftrightarrow$$

$$0 = k^2 - 2k - S + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = (k-1)^2$$

השייח' אבו-גאנם נפטר במאה שעברה. הוא היה מפורסם מאד במספר בניו הרב ובעדר כבשיו הגדול. לאחר מותו חילקו בניו את עדרו ביניהם לפי צוואתו באופן הבא:

הבן הבכור קיבל כבש אחד ועוד חלק מהעדר השווה ל- $\frac{1}{k}$ מהשאר (הערך של המספר הטבעי k

צוין בצוואה). לאחר שלקח את חלקו קיבל השני שני כבשים ועוד חלק מהעדר השווה ל- $\frac{1}{k}$

מהשאר. לאחר שזה לקח את חלקו, קיבל השלישי שלושה כבשים ועוד חלק השווה ל- $\frac{1}{k}$ מהשאר,

וכך הלאה.

אחרי שחילקו את כל הכבשים החלו לבדוק האם החלוקה הוגנת. מייד בתחילת הבדיקה הסתבר לבנים, כי שני האחים הבוגרים קיבלו מספר זהה של כבשים כל אחד.

ידוע כי מספר הכבשים בעדר כולו היה כמספר השנה של פטירתו.

כמה בנים היו לשייח', כמה כבשים מנה עדרו, והאם החלוקה בין הבנים הייתה הוגנת?

הקוראים מוזמנים לנסות את כוחם בפתרון הבעיה, לפני עיון בפתרון המוצע כאן.

קל לראות שניתן בצורה זו לעבור בין הבנים ולמצוא כך, כי כל אחד מהם קיבל בדיוק 44 כבשים. והלא אנו כבר יודעים כי התהליך סופי ויסתיים כאשר נגיע אל הבן, אשר מספרו בתור שווה למספר הכבשים שקיבל. הוא יהיה, אם כך, הבן הארבעים וארבעה.

ניתן כמובן להראות את החישוב באופן המזכיר הוכחה באינדוקציה מתמטית: נניח כי קבוצת בנים בוגרים קיבלה כל אחד 44 כבשים, נוכל לחשב את מספר הכבשים שקיבל הבן הבא:

$$\begin{aligned} a_i &= i + \frac{44 \cdot 44 - S_{i-1} - i}{45} = \\ &= i + \frac{44 \cdot 44 - (i-1) \cdot 44 - i}{45} = \\ &= \frac{45i + 44 \cdot 44 - 44i + 44 - i}{45} = \\ &= \frac{45i - 45i + 45 \cdot 44}{45} = 44 \end{aligned}$$

התהליך אינו מהווה הוכחה באינדוקציה מתמטית, אלא רק דומה לו, שכן תהליך הוכחה של אינדוקציה מתמטית נשען על אכסיומות פיאנו ומתייחס לקבוצה אינסופית של איברים, אשר מוגדר ביניהם יחס סדר ולכל אחד מהם יש איבר עוקב בקבוצה. בסיפורנו קבוצת הבנים היא סופית, לכן אין שימוש באכסיומות פיאנו.

הראינו, אם כן כי החלוקה הייתה הוגנת. לשייח' היו ארבעים וארבעה בנים, בעדרו היו אלף תשע מאות שלושים וששה כבשים, וכל בן קיבל בדיוק ארבעים וארבעה כבשים.

מה נוכל להמשיך לשאול?

האם המבנה המספרי המעניין הזה יתקיים עבור כל בחירה של ריבוע שלם למספר הכבשים בעדר. נדמה, שאכן כך הדבר, שהרי לא הנחנו הנחות מיוחדות על מספר הכבשים.

ננסה:

נניח כי: $S = (k-1)^2$, $a_2 = a_1$, $a_n = n$ – מסקנות שקיבלנו מנתוני השאלה ללא הסקה של נתונים מספריים.

במצב זה נמצא תבנית שתייצג את מספר הכבשים שקיבל כל אחד מהבנים הבוגרים:

קיבלנו כי מספר הכבשים הכולל בעדר הוא ריבוע שלם, שערכו מתאים לייצג שנה במאה שעברה. מתקיים:

$$43^2 = 1849 < 1900$$

$$44^2 = 1936$$

$$45^2 = 2025 > 2000$$

כלומר: המספר היחיד המתאים לענייננו הוא: 1936. מסקנה: בעדר השייח' היו 1936 כבשים. נותר לנו למצוא כמה בנים היו לשייח' וכמה כבשים קיבל כל אחד. כדי לחשב את מספר הכבשים שקיבל כל אחד מהאחים הבוגרים ניתן להציב בתבניות המתאימות. מתקבל: $a_1 = a_2 = 44$. האם נוכל לגלות כמה קיבל כל אחד מהבנים האחרים?

נסתכל בתבנית המתאימה למספר הכבשים שקיבל הבן

$$a_n = n + \frac{S - S_{n-1} - n}{k} \quad \text{הצעיר:}$$

$$S - S_{n-1} = S_n - S_{n-1} = a_n \quad \text{מתקיים:}$$

לכן:

$$a_n = n + \frac{a_n - n}{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow nk + a_n - n = ka_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(k-1) = a_n(k-1), k \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = n$$

כלומר: מספר הכבשים שקיבל הבן הצעיר שווה למספר הבנים.

כעת נוכל להתקדם: נציב את הערכים המספריים שיש לנו עבור מספר הכבשים שקיבל כל אחד מהבנים משני הבוגרים בנוסחה ל- a_3 ונקבל:

$$a_3 = 3 + \frac{S - a_1 - a_2 - 3}{k} = 3 + \frac{1936 - 44 - 44 - 3}{45} = 44$$

נביט קצת יותר לעומק באופן החישוב:

$$3 + \frac{1936 - 44 - 44 - 3}{k} =$$

$$= \frac{3 \cdot 45 + 44 \cdot 44 - 44 \cdot 2 - 3}{45} =$$

$$= \frac{3 \cdot 45 + 44 \cdot 44 - 44 \cdot (3-1) - 3}{45} =$$

$$= \frac{3 \cdot 45 + 44 \cdot 44 - 44 \cdot 3 + 44 - 3}{45} =$$

$$= \frac{3 \cdot 45 - 3 \cdot 44 - 3 + 44 \cdot 44 + 44}{45} =$$

$$= \frac{3 \cdot 45 - 3 \cdot (44+1) + 44(44+1)}{45} = \frac{44 \cdot 45}{45} = 44$$

ברור מכאן, כעת, כי ניתן לבנות שאלות דומות עם נתונים מספריים פשוטים יותר לתלמידים בכיתות נמוכות. השאלות המוכרות מכילות בדרך כלל נתונים כאלה יחד עם הנתון כי כל אחד מהבנים קיבל חלק שווה מהירושה.

לדיון שהוצג כאן יכולה להיות תרומה לא מעטה לתהליך למידה של תלמיד בחטיבת הביניים או בחטיבה העליונה. חשיבותו בשני מוקדים:

א. מקשר בין פתרון בעיות (מילוליות), פתרון משוואות אלגבריות עם פרמטרים או בלעדיהם, עיסוק בטכניקה אלגברית לבין סדרות כלליות וסכומים שלהן;

ב. מאפשר דיון מעמיק בהבדל שבין ההוכחה המוצעת כאן עבור הטענה כי כל אחד מהבנים קיבל מספר שווה של כבשים לבין תהליך הוכחה באינדוקציה מתמטית.

$$a_2 = a_1 = 1 + \frac{S-1}{k} = \frac{k + (k-1)^2 - 1}{k} = \frac{k + k^2 - 2k}{k} = \frac{k(k-1)}{k} = k-1$$

שוב, כדי למצוא מספר הכבשים שקיבל כל בן אחר, נחשב את a_3 ונראה כי ניתן להכליל, או לעשות תהליך דומה לזה הנעשה בהוכחה באינדוקציה מתמטית:

$$\begin{aligned} a_3 &= 3 + \frac{(k-1)^2 - 2(k-1) - 3}{k} = \\ &= \frac{3 \cdot k - 3 + (k-1)^2 - 2(k-1)}{k} = \\ &= \frac{(k-1)(3+k-1-2)}{k} = (k-1) \\ a_i &= i + \frac{(k-1)^2 - (i-1)(k-1) - i}{k} = \\ &= \frac{i \cdot k - i + (k-1)^2 - (i-1)(k-1)}{k} = \\ &= \frac{(k-1)(i+k-1-(i-1))}{k} = (k-1) \end{aligned}$$

