

הנושא: שימוש בשגיאות של תלמידים כמנוף לשיפור הלמידה ולהעמקת הידע המתמטי

הוכן ע"י: חמוטל דוד.

תקציר: המאמר דן במושגים: הבנה, ידע וחשיבה מתמטיים, בהגדרותיהם ובקשרים ביניהם, דרך סקירה של תיאוריות הנזכרות בספרות המחקרית. לאור התיאוריות מוצגת במאמר גישה לניתוח שגיאות של תלמידים כשלבים בבניית הבנה. התייחסות כזו מאפשרת להשתמש בשגיאה כמנוף ללמידה. במאמר מובאות דוגמאות לניתוח שגיאות של תלמידים. הדוגמאות נלקחות מנושאים בתכנית הלימודים של חטיבת הביניים ושל החטיבה העליונה.

מילות מפתח: הבנה מתמטית, ידע מתמטי, חשיבה מתמטית, למידה, הוראה, התיאוריה הקונסטרוקטיביסטית של הלמידה, הבנה רלציונית, הבנה אינסטרומנטאלית, דימוי מושג, הגדרת מושג, סכמה, אינטואיציה, שגיאות, הכללה, משוואה, אי-שיוויון, חקירה של פונקציה ריבועית.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 37, תשס"ז, 2007, עמודים 81-93.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 13 עמודים.

שימוש בשגיאות של תלמידים כמנוף לשיפור הלמידה ולהעמקת הידע המתמטי

חמוטל דוד¹

hamutal@techunix.technion.ac.il
"קשר-חס", מוסד הטכניון למחקר ופיתוח
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
בית-הספר הריאלי העברי, חיפה

חלק I – דיון תיאורטי

ידע מתמטי – מה יש בו?

הידע המתמטי, אותו אנו מעוניינים להנחיל לתלמידים, מבוסס על מושגים והגדרותיהם, ועל אכסיומות ומשפטים. הלומד מתוודע אל המושגים דרך דוגמאות או הגדרות. הוא בונה לעצמו דימוי-מושג², הנשען בדרך כלל על אוסף דוגמאות טיפוסיות³, משתמש בייצוגים שונים ומקשר בין המושג לבין מושגים אחרים. המבנה המנטאלי הכולל את דימוי המושג, הדוגמאות שלו, הייצוגים שלו והמושגים הקשורים אליו נקרא: סכמה. האכסיומות והמשפטים הם ביטויים של קשרים ויחסים בין מושגים מסוימים לאחרים. בנוסף להכרה של המושגים, ההגדרות, האכסיומות והמשפטים כיחידות ידע, שאותן הלומד מסוגל לבטא כהיגדים, על הלומד לרכוש גם מיומנויות של ביצוע תהליכים מתמטיים כגון: הוכחת טענות מתמטיות, ניסוח השערות ופתרון בעיות. לצורך הביצוע של התהליכים, נדרש הלומד לרכוש גם מיומנויות של ביצוע חישובים אלגבריים, שימוש באלגוריתמים שונים, מעבר מייצוג אחד למשנהו וזיהוי קשרים בין מושג מסוים למושגים אחרים.

² בהמשך יורחב הדיבור על ההבחנה לפי וינר (Vinner, 1991). בין "דימוי המושג" (concept image) לבין "הגדרת המושג" (concept definition).

³ דוגמאות טיפוסיות מכונות בספרות המקצועית: "פרוטוטיפיות" (הרשקוביץ, 1991, 1992). למשל: דוגמא פרוטוטיפית למושג מרובע היא: ריבוע. דוגמא פרוטוטיפית למושג גובה במשולש היא: גובה לבסיס במשולש שווה שוקיים. (ר' גם אצל דוד, 1996).

הקדמה

מטרת ההוראה היא להרחיב את מאגר הידע שהולך ומצטבר אצל התלמידים, כלומר להפגיש אותם עם הנושא הנלמד ולבנות בינו לבין הידע הקודם שלהם מערכת קשרים תקפה, יציבה וענפה ככל האפשר. בקיצור מקובל לומר שהמטרה היא לבנות הבנה. לצורך הדיון באופן בו ניתן לעשות זאת, נחוצה בחינה של המושג 'הבנה'. בחלקו הראשון של המאמר מובאת סקירה של תיאוריות שונות שהתייחסו למושג 'הבנה מתמטית' ונזכרו במחקרים בחינוך המתמטי במהלך השנים. לאחר ההגדרה של המושג 'הבנה מתמטית' או 'חשיבה מתמטית', וניסוח מטרת ההוראה לאורה, מובאים, בחלק השני של המאמר, רעיונות והצעות לשימוש בניסיון העשיר שיש לנו כמורים, כדי להעמיק ולשפר את תהליך הלמידה לקראת שיפור ההבנה. שגיאות רבות של תלמידים חוזרות על עצמן. למעשה כמעט כל שגיאה, פרט לפליטות קולמוס, מייצגת שלב בהבנה. זיהוי המקור של השגיאה ושיוכו לשלב מסוים ברכישת ההבנה של מושג מסוים, הם מיומנויות חיוניות לכל מורה. זיהוי המקור ושיוכו כנזכר, יכולים לאפשר למורה להציע משימת המשך, שתטפל בדיוק בהשלמת אותו שלב של הבנה. חלקו השני של המאמר מכיל, אם כך, אוסף דוגמאות של שגיאות אופייניות, בצד ניתוח וזיהוי של המקור שלהן והצעות להמשך הלמידה במטרה להשלים את ההבנה ולשרש את הטעויות.

¹ המאמר נכתב בעקבות הרצאת מליאה שניתנה בכנס הארצי ה-15 של מרכזי המקצוע מתמטיקה וצוותיהם, שהתקיים מטעם "קשר חס" במחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון, חיפה, 6.4.2006.

רכישת הידע המתמטי

בדרך כלל, תהליך הלמידה מכיל התנסויות בהן פותרים תרגילים, עונים על שאלות, מבררים מושגים, בודקים דרכים; לא תמיד מצליחים, לפעמים טועים; יש שלבים בהם פשוט תוהים... למעשה במהלך ההתנסויות הללו מתרחשת רכישה של מיומנויות מתמטיות. הלמידה מתבצעת אצל כל לומד באופן עצמאי, בקצב עצמי ורק אם הוא מוכן ונכון לכך. עלינו כמורים מוטלת החובה ליצור לו הזדמנויות למידה שיגבירו נכונות ומוכנות זו.

לפי התיאוריה הקונסטרוקטיביסטית של הלמידה: "...מושגים ויחסים מושגיים הם מבנים מנטאליים שאינם יכולים לעבור מתודעה אחת לאחרת. על מושגים להיבנות באופן אישי על-ידי כל לומד.

עם זאת למורים שמור התפקיד לכוון את התהליך הקונסטרוקטיבי של התלמידים. בוודאי, קל יותר לכוון את התלמיד לתחום מסוים של מבנה מושגי מסוים כאשר יש מושג על המבנים המושגיים הנוכחיים שלו. במילים אחרות, כדי לעצב את חשיבת התלמיד המורה זקוק למודל של האופן שבו התלמיד חושב... ככל שהמורה צובר ניסיון רב יותר עם לומדים, כך טובים סיכוייו לנחש באופן נכון מה עשויה להיות חשיבתו של תלמיד מסוים..." (לפי Glaserfeld, 1995, אצל הרפז 2005).

לפיכך, אימוץ הגישה הקונסטרוקטיביסטית מחייב אותנו המורים לנסות ולהתחקות באורח מתמשך אחר הנעשה במוחו של הלומד. עלינו לנסות ולהבין בכל שלב של הלמידה את הקשרים שכבר נוצרו במוחו של הלומד ביחס למושג מסוים ולהציע לו התנסות למידה עוקבת שתשפר ותעשיר אותם. במילים אחרות – עלינו לעצב לו הזדמנויות להמשך הלמידה.

מטרת ההוראה

כדי להצליח במשימתנו – עיצוב הזדמנויות למידה – עלינו להסכים קודם כל על מטרת ההוראה. בהיותנו חלק ממערכת החינוך במדינת ישראל, יש להניח שרובנו נראה בהצלחת תלמידינו בבחינות הבגרות את אחת ממטרות ההוראה אם לא את המטרה בהא הידיעה. יש שיטענו, שלצורך זה מספיקה ידיעת הנושאים ברמה שטחית בלבד. אלא שלא נסתפק בכך. כמחנכים וכמחנכים מתמטיים בודאי נשאף גם לפיתוח ולטיפוח

של חשיבה מתמטית, כמו גם לפיתוח ולטיפוח הבנה מתמטית⁴. לא נסתפק בכך שתלמיד ידע לחזור על אלגוריתם בסיטואציה מוכרת וידועה מראש. נרצה שיוכל לעשות זאת מתוך הבנה של דרך הפעולה של האלגוריתם, ונרצה אולי שיוכל גם לשנות ולו במעט את מהלך ההפעלה של האלגוריתם בסיטואציה שונה מהמוכרת. כך, למשל, נרצה שבעת חקירת פונקציה תתבצע פעולת הגזירה ומציאת הסימן של הנגזרת, מצד אחד באופן כמעט אוטומאטי, מצד שני מתוך הבנה של הקשר בין סימנה של הנגזרת לבין שיפוע המשיק לגרף.

לשני המושגים שהוזכרו: חשיבה והבנה יחסי גומלין מורכבים, שהרי לקיום תהליך חשיבה נחוצה הבנה ואילו הבנה (או העמקת ההבנה) מושגת תוך קיום תהליך חשיבה. לקיום תהליך חשיבה נחוצות מיומנויות, אותן אנו, כמובן, מעוניינים לפתח במהלך תהליך הלמידה. באופן בסיסי עוד יותר, לקיום תהליך חשיבה נחוצה הנעה (מוטיבציה). בספרו: "חכה פיתיון ודגים, גישות לחינוך החשיבה" סוקר יורם הרפז את התיאוריות השונות העוסקות במושג החשיבה ומרחיב את הדיון במורכבות הקשר בינו לבין ההבנה (הרפז, 2005).

התיאוריה הקונסטרוקטיביסטית של הלמידה, שהוזכרה לעיל, תואמת את המורכבות הזאת. רק הלומד בעצמו מסוגל לפתח הבנה בעזרת חשיבה שהיא חלק מההבנה עצמה. יחד עם זאת, מורה בעל ניסיון יכול לזהות את מצב ההבנה של התלמיד ומוטל עליו להציע לתלמיד משימה, אשר מחד תואמת בדיוק את מצב ההבנה בו הוא נמצא, ומאידך מטרתה להצעיד אותו אל העמקתה.

חשיבה מתמטית

תהליכי החשיבה המתמטית מאופיינים בקפדנות (rigor), אנליטיות ופורמאליות ושונים בכך מתהליכי חשיבה בתחומים אחרים. כל תהליך הנמקה צריך להתנהל באופן מוקפד ביותר: עליו להיות מבוסס על טיעונים ומושגים מוכרים, עקבי – ללא סתירות פנימיות, ורצוי ללא חזרות מיותרות. תהליכי הנמקה מתקדמים נשענים בדרך כלל על קשרים ענפים בין מושגים, הנלקחים, לעיתים, אף מתחומי תוכן שונים במתמטיקה. החשיבה המתמטית נשענת על כללי ההיסק הלוגיים ומשתמשת בשפה הטבעית בצד מערכת

⁴ הדיון במושגים הבנה וחשיבה ייערך בהמשך.

אינם ערים לתפקידי ההוכחה (de Villiers, 1990), למשל, הם אינם רואים בהוכחה כלי שכנוע, אלא רק כלי בידי המורה להצדקת דבריו. הם אינם משתכנעים מן ההוכחה עצמה, אלא מאמינים למורה. גם לאחר קריאה או כתיבה של הוכחה פורמאלית הם זקוקים לאימות נוסף של הטענה על-ידי דוגמאות (Fischbein, 1982; Fischbein and Kedem, 1982). למעשה, אין זה מפליא, כי הוכחות מתמטיות מעוררות קשיים כדוגמת אלה, שכן תהליך ההוכחה הלוגי, אינו משקף בהכרח את המהלך הטבעי של החשיבה האנושית (Henkin & Blackwell, 1988). קורה פעמים רבות שתלמידים לא תמיד חשים אפילו את הצורך להוכיח.

הבנה מתמטית

מושג ההבנה המתמטית, בהיותו מושג מעורפל (אביטל ושתלורס, 1968), אשר אופן המדידה שלו אינו ברור, זכה גם הוא להתייחסות רחבה במחקר של החינוך המתמטי. נביא כאן סקירה של גישות אחדות.

אביטל (שם) מייין את רמות ההבנה במתמטיקה לאור תורתו של ב.ס. בלום, וקבע את ההבחנה בין חשיבה אלגוריתמית לבין מחקר פתוח, כאשר ההבדל הבסיסי ביניהן הוא מידת החידוש הנדרש מהלומד לצורך פתרון הבעיה שלפניו. חשיבה אלגוריתמית נחלקת לפי אביטל לשלוש רמות: ידע, הבנה ויישום. מחקר פתוח נחלק לשתיים – אנאליזה וסינתזה.

סקמפ (Skemp, 1976, 1978, 1991) הבחין בין שני סוגים של הבנה מתמטית: הבנה אינסטרומנטלית (מכשירית) לעומת הבנה רלציונית (מקשרת). בהבנה אינסטרומנטלית הלומד יודע **איך** מבלי לדעת **מדוע**, בעוד שבהבנה רלציונית הלומד יודע **איך** וגם יודע **מדוע**. גישה זו יוצרת הירארכיה בין שני שלבים של הבנה, שהרי ברור הוא שעדיפה ההבנה הרלציונית, השלמה יותר. אלא שהדברים אינם כה פשוטים.

נשר (Nesher, 1986) מבדילה בין 'ביצוע אלגוריתמי' לבין 'הבנה', למרות שלדעתה ייתכן שההפרדה ביניהם היא בלתי אפשרית בכל אחד משלבי הלמידה: ביצוע אלגוריתמי עשוי לשפר את ההבנה וההבנה עשויה לשפר את הביצוע האלגוריתמי. לטענתה, אלגוריתם מאופיין בכך שהוא סופי ומבוצע צעד אחר צעד בסדר המתואר; ואילו להשגת הבנה יש לפנות למערכת של רעיונות

סמלים קשיחה. ההבדלים בין הנורמות של השימוש בשפה הטבעית לבין הנורמות הנהוגות בשפה המתמטית מעוררים קשיים בהבנה. בנוסף לדיוק ולתמציתיות לעיתים מילים מהשפה הטבעית משמשות כשמות למושגים מתמטיים, אך המשמעות הלשונית שלהן אינה זהה לפרושה המתמטי. כך למשל המילה 'מנה' במתמטיקה מבטאת את התוצאה של פעולת החילוק, בעוד שבשפה הטבעית משמעויותיה שונות. הכתיבה המתמטית, המשלבת בין מילים בשפה הטבעית לבין סמלים מתמטיים היא מסורבלת, בעיקר בעברית. כיווני הקריאה לעיתים אינם אחידים – כך למשל בקריאת סימן האינטגרל המסוים. בטקסט המשלב סמלים מתמטיים בתוך טקסט מילולי תלמידים נוטים למקד את תשומת הלב בביטויים הסימבוליים וכך לעיתים מייחסים משמעות שגויה לכתוב. בעבודת מחקר, שבחנה את יכולת ההבנה של הוכחות כתובות על-ידי סטודנטים בקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי מתקדם, בטכניון, ניכרת היצמדות לביטויים האלגבריים השלובים בתוך המלל (דוד, 1996).

קשיים אלה מכבידים גם על יכולת ההבנה של הוכחות מתמטיות. בהיותן נדבך מכריע בהרחבת שדה הידע המתמטי, הן תופסות מרכיב חשוב בעשייה המתמטית, בהוראה ובלמידה. מחקרים רבים עסקו באפיון תהליכי ההוכחה המתמטית ובאפיון הקשיים שהם מעוררים אצל התלמידים.

אחד הקשיים המרכזיים, שמעוררות הוכחות מתמטיות, טמון בצורך להתחקות אחר תהליך החשיבה המוצג בהוכחה. לעיתים קרובות מהלך החשיבה, שמוביל אל מציאת הוכחה, אינו תואם את מהלך ההוכחה, אך כל הוכחה מייצגת תהליך של חשיבה מתמטית. הקורא הוכחה מתמטית מוזמן לבצע תהליך חשיבה זה. הכותב הוכחה מתמטית, גם אם לא עבר את התהליך שיכתוב במדויק באופן זה, חושב לפיו במהלך הכתיבה ויוצר את מסלול החשיבה עבור הקורא. תהליך החשיבה מוצג בהוכחה באופן מדויק, חסכני, אנליטי ופורמאלי. אופן הצגה זה מגביר את הקושי בהבנה.

עדויות מחקריות רבות מצביעות על קשיים בהבנת עצם המהות של הוכחות מתמטיות, מצד אחד וביצירתן מאידך. תופעה מוכרת היא, שכדי להצדיק טענה, תלמידים מסתפקים בהבאת ראיות על ידי מקרים פרטיים בלבד (Jaworsky, 1990). זאת ועוד, תלמידים

קודמים ידועים ומערכת זו אינה סופית ומושלמת, אלא פתוחה.

להבנה במשמעות של בניית הקשרים מתייחסים גם הייברט וקרפנטר (Hiebert and Carpenter, 1992). לטענתם, ניתן לראות הבנה כיצירה או ביסוס של קשרים בתוך תחום ידע קיים או בין ידע קיים לבין ידע חדש.

וינר (1987, 1988), בנתחו פתרונות שסטודנטים הציעו לבעיות בקורס ראשון בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טבע שני מושגים הקשורים להבנה: *התנהגות אנליטית* או *אנליטית לכאורה* ו-*התנהגות מושגית* או *מושגית לכאורה*. 'התנהגות אנליטית' היא שלב בהבנה בו התלמיד עורך התאמה מעמיקה בין המתכון לפתרון לפי לבין מצב הבעיה. 'התנהגות אנליטית לכאורה' היא שלב קודם, בו התאמת המתכון לפתרון מתבצעת על סמך סממנים חיצוניים בלבד. 'התנהגות מושגית' היא שלב בהבנה בו נעשה שימוש במושג תוך התאמה מעמיקה בין הגדרתו לבין תכונותיו וייצוגיו. לעומתה 'התנהגות מושגית לכאורה' היא שלב בהבנה בו השימוש במושג מתבצע על-פי מאפיינים חיצוניים (ויזואליים או מילוליים).

בהמשך מחקריו התייחס וינר (1991) להבדל שבין דימוי מושג לבין הגדרת מושג. בעוד הגדרת המושג (concept definition) היא הייצוג הפורמאלי של המושג כפי שהוא מופיע בהגדרה, דימוי המושג (concept image) – הוא הייצוג שיש ללומד במוחו עבור המושג, כגון דוגמה פרוטוטיפית, ייצוג ויזואלי, אוסף תכונות, קשרים עם מושגים אחרים, אסוציאציות. בשלבים הראשוניים של למידת מושג הפער בין דימוי המושג הקיים במוחו של הלומד לבין הדימוי הנובע מהבנה מעמיקה של הגדרת המושג הוא גדול. דימוי מושג מפותח, המכיל קשרים ענפים בין המושג לבין מושגים אחרים רלוונטיים, נרכש תוך התנסויות בפתרון בעיות וכד'. אבחון דימוי המושג הקיים במוחו של הלומד, יכול להעיד על רמת ההבנה שלו.

דימוי המושג המתפתח במוחו של הלומד יוצר סכמה. על-פי פיאז'ה (Piaget J., 1977), סכמה היא יחידת ידע תפעולית או צורנית. יחידה המתהווה כתוצאה מהתנסויות העבר ומספקת מסגרת להבנת התנסויות העתיד. למעשה פגישה עם התנסות חדשה יכולה לעדן, לשפר, או לתקן סכמה קיימת, אם נוצרת חוסר התאמה

בינה לבי סכמה אחרת. כך נוצרים במוחו של הלומד גם קשרים בין הסכמות השונות.

גם דיוויס (Davis, 1992) מציין שהבנה – רגע ה'אחה' – מתרחשת בעת שניתן להתאים רעיון חדש למערכת רעיונות קיימת ומוטמעת במוחו של הלומד.

כאשר מדברים על הבנה מתמטית הכרחי לדון גם במושג: אינטואיציה. פישביין (Fischbein, 1989) עסק רבות בנושא זה. הוא הגדיר את האינטואיציה כתפיסה מיידית – תפיסה בהירה, בה מידע מעורפל או בלתי שלם מוסתר בעזרת מנגנונים היוצרים הרגשה של מיידיות, ביטחון ולכידות (קוהרנטיות); צורת קוגניציה הנראית לאדם כמובנת מאלה. ההסקה האינטואיטיבית מתבצעת על-פי מודל מנטאלי סמוי – מבנה מנטאלי שהשימוש בו הוא תת-הכרתי.

חוקרים רבים, (למשל, דובינסקי ולוין, 1986, ספרד, 1991, דרייפוס, 1991, גריי וטול 1991, טול 1992) מבחינים בין רמות שונות בהבנה של תפיסת מושג. דובינסקי ולוין הרמה הבסיסית ביותר בתפיסת מושג היא תפיסתו כפעולה – Action. הרמה הבאה היא רמת התהליך – Process, לאחר מכן מגיעה רמת התפיסה כעצם – Object ולבסוף רמת התפיסה כמבנה – Scema/Structure. למשל: תפיסת המושג 'נגזרת' כפעולה מאפשרת לחשב את ערך הנגזרת בנקודה. תפיסתו כתהליך מאפשרת להתייחס אל פונקציית הנגזרת כאל פונקציה של שיפועי משיקים. תפיסתו כעצם מאפשרת לבצע פעולות על פונקציית הנגזרת ולבחון תכונות שלה. אפשר אז להציע שרטוט לגרף של פונקציה על-סמך גרף נתון של הנגזרת שלה. בשלב המבנה, השלב המתקדם ביותר, מעבר לאפשרות של ביצוע פעולות על פונקציית הנגזרת, ניתן להתייחס למבנה הכולל אליו היא שייכת ואפשר למשל, לנסח הכללות לקשרים בין גרף של נגזרת לבין גרף של פונקציה. לפי תיאוריה זו, הנקראת בספרות המחקרית: APOS⁵, הבנת מושגים היא הירארכית. תפיסת מושג כפעולה היא תנאי מקדים לתפיסתו כתהליך וכן הלאה. התנאים ליכולת המעבר בין השלבים השונים לא נדונו במחקרים שנזכרו. גריי וטול השתמשו במושגים אלה והגדירו מושגים מקבילים, המתארים את העצמים (האובייקטים) אשר, לדעתם, בונה הלומד במוחו בכל אחד מהשלבים הנ"ל. בשלב הפעולה הלומד מפעיל 'פרוצדורה' (procedure) – אלגוריתם לפעולה, ברמת

⁵ השלב האחרון לא מופיע תמיד.

התהליך יש במוחו 'תהליך' (process) – השאלה מדוע האלגוריתם פועל כבר מקבלת תשובה, ואילו ברמת העצם והסכמה נמצא במוחו של הלומד בן כלאים: 'procept' – דימוי המושג כאובייקט יחד עם הפרוצדורה הקשורה אליו.

דייויד טול ב-2005 (Tall, 2005, Pegg and Tall,) הציג סקירה מפורטת ומשווה בין התיאוריות הנ"ל ואחרות הדנות בשלבי רכישת הבנה של מושג מתמטי ובה דן בהקבלה בין המונחים הנזכרים בכל תיאוריה. לפי דבריו ברכישת הבנה של מושג מתמטי מתרחש תהליך הטמעה המתחיל בפיתוח דימוי מנטאלי למושג, עובר דרך עיצוב והפנמה של הסימול (סימבוליזם) המתאים למושג ומסתיים בקישור המושג לביצוע תהליכי הוכחה פורמאליים.

איך נעזור לתלמיד לבנות ידע מתמטי?

לאור האמור לעיל תפקידנו כמורים הוא ליצור לתלמיד הזדמנויות למידה – מצבים בהם תהיה לו הנעה גבוהה ללמידה, בהם יוכל להפעיל מיומנויות קיימות ולפתח מיומנויות חדשות, כאלה שיאפשרו לו לחשוב מתוך הבנה ובמגמה להבין עוד יותר. כיוון שרכישת הבנה עבור מושג, קרי בניית מודל מנטאלי – דימוי מושג – סכמה, היא תהליך, רק טבעי שלאורכו מתבצעות שגיאות. שגיאות, שאינן פליטות קולמוס, הן חלק טבעי של תהליך הלמידה, הן אפילו יכולות להיות מייצגות של שלבים בלמידה. במהלך ההיסטוריה של המתמטיקה ניתן למצוא לעיתים הקבלה לשגיאות שתלמידים נוטים לעשות בתהליך ההתפתחות של מושגים מתמטיים. ניסיונו כמורים יכול לעזור לנו לגלות שגיאות חוזרות ולזהות בין לבין השלב בלמידה. התיאוריות שהובאו לעיל יכולות לעזור לנו הן בהבנת המקור לשגיאה, כלומר בשיוך השגיאה לשלב מסוים ברכישת המושג – בהבנת המושג. כתוצאה מניתוח שלב ההבנה נוכל לעצב משימת המשך, שמטרתה לקדם את ההבנה, כלומר לשרש את השגיאה.

הפקת מידע משגיאות נזכרת במחקרן של מובשוביץ-הדר, זסלבסקי וענבר (Movshovitz-Hadar, Zaslavsky & Inbar, 1987). הן ניתחו שגיאות של תלמידים בפתרונות של בחינות בגרות. כדי לאתר את מקור השגיאה הן הניחו, שאין טעויות 'מקריות' ולכל שגיאה יש 'הגיון' שמדריך אותה. כדי לתהות על ההגיון שמאחורי השגיאות ניסו לבנות שאלה, שהתשובה

השגויה לשאלה הנתונה, היא תשובה נכונה עבורה. מהשוואה בין שתי השאלות – המקורית והחדשה – ניסו לאתר את מקור השגיאה.

בהמשך המאמר מובאות דוגמאות לשגיאות רווחות של תלמידים בצד ניתוח המקור שלהן בעזרת התיאוריות ובצד הצעות לפעילויות מקדמות.

חלק II – שגיאות כמנוף ללמידה – אוסף דוגמאות

נתחיל עם דוגמאות אחדות שהן פשוטות ומוכרות:

$$\text{דוגמא 1 - } a(bc) = (ab)(ac)$$

הפיתוח האלגברי הבא (או דומה לו) נפוץ מאד:

$$\frac{2(x+2)(3x+5)}{x^2} = \frac{(2x+4)(6x+5)}{x^2} = \frac{12x^2 + 34x + 24}{x^2}$$

מה עומד מאחוריו? מדוע הטעות כל-כך שכיחה? ואיך נעזור לתלמידים לשרש אותה?

לפי חוק הפילוג: $a(b+c) = ab+ac$

הכללה של חוק זה והחלה שלו על כל שלשה של גורמים עם פעולות ביניהם מובילה לטעות שלעיל.

תלמידים, שטועים טעות זו, מפרשים את ההופעה החוזרת של הגורם a ליד כל אחד משני הגורמים האחרים לאחר ביצוע "פתיחת הסוגריים" כפעולה של הגורם a על הגורמים האחרים ולא כתוצאה של פעולה כפל. הם לא נותנים דעתם להבדל בין שתי הפעולות, או למשמעות הפעולות ולהבדלים ביניהן. הם מפתחים לעצמם אלגוריתם לעבודה, לפי מספר ההופעות של כל גורם, ללא בדיקת פעולות החשבון ומופתעים בכל פעם מחדש לגלות עד כמה פשוט לפעול נכונה. מניסיון טעות זו נפוצה ביותר בין תלמידים לקויי למידה, אפילו אצל כאלה הלומדים ברמת לימוד של 5 יח"ל.

דוגמאות מספריות בדרך כלל תורמות לשיפור ההבנה, למשל: $(30) = 2 \cdot (3 \cdot 5) \neq (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) (= 60)$

דוגמאות נוספות לשגיאות אופייניות בהן נראית הכללת-יתר של חוק הפילוג:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x + \cos y$$

$$\tan(x+y) = \tan x + \tan y$$

$$\cos(x+y) = \cot x + \cot y$$

$$\log(x+y) = \log x + \log y$$

לפתור את המשוואה – כלומר התלמיד יודע לספק פתרון (אולי לא את כל הפתרונות) למשוואות מהצורה:

$$b \cdot c \cdot d = e \cdot b \cdot d$$

$$\cancel{b} \cdot c \cdot \cancel{d} = e \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{d} \Leftrightarrow c = e$$

✓ לפי התיאוריה של APOS אפשר אולי לשייך אופן פתרון כזה לשלב הבנה בו פונקציה הסינוס נתפסת כפעולה בלבד, או למעשה קשורה למשולש ישר זווית – השימוש בסינוס משרת בשלב זה רק תהליכים של חישובי צלעות וזוויות. בשלב זה פונקציה הסינוס היא עדיין אינה פונקציה או פעולה על מספרים ולכן לא ניתן לשלבה במשוואה עם המשמעות המיוחדת שלה, אלא רק עם המשמעות המוכרות עבור גורמים וסמלים המופיעים במשוואות – מספרים, משתנים ופרמטרים – בהם ניתן לכפול או לחלק, מותר לחבר או לחסר וכד'. גישה זו מכוננת את התלמיד לפרש את שורת הסימנים כאוסף של פעולות כפל.

איזו משימה יכולה להוות הזדמנות למידה לתיקון הטעות?

- דוגמאות מספריות כמו:
עבור זוויות חדות – במשולש ישר זווית:
 $1 = \sin 90^\circ = \sin 2 \cdot 45^\circ \neq 2 \sin 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
לזוויות אחרות:
 $0 = \sin 180^\circ = \sin 2 \cdot 90^\circ \neq 2 \sin 90^\circ = 2$
כדאי לציין כי יש מקרים בהם השוויון:
 $\sin 2x = 2 \sin x$ בכל זאת נכון:
 $0 = \sin 360^\circ = \sin 2 \cdot 180^\circ \neq 2 \sin 180^\circ = 2 \cdot 0 = 0$
- שרטוט הגרפים של הפונקציות:
 $y = \sin 2x$ לעומת:
 $y = 2 \sin x$

דוגמא 3 – איבוד פתרונות בפתרון משוואות

כאשר נדרשים התלמידים למצוא את קבוצת הפתרונות של המשוואה: $4x - x^3 = 0$, פתרון שגור הוא:
נחלק ב- x ונקבל: $4 - x^2 = 0$
לכן: $4 = x^2$
נוציא שורש: $x = 2$

מה מכון רבים מתלמידינו לפעול בדרך זו? או: מה הם כן יודעים/מבינים?

✓ במשוואות פשוטות יותר כמו: $2x - 4 = 0$ הם מזהים בקלות את הגורם המשותף 2 ומחלקים בו;

דוגמא 2 – $\sin 2x = 2 \sin x$

טעות זו שכיחה מאוד ומקורה דומה למקורה של הטעות הקודמת. כאשר נדרשים תלמידים לפתור את התרגיל הבא:

נתון כי: $\sin x = \frac{3}{5}$, נא לחשב ללא עזרת מחשבון את

הערך של: $\sin 2x$

לרוב, הם משתמשים נכונה בזהות:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

אבל במהלך פתרון בעיה, שאינה ממוקדת בשימוש בזהויות, בה השימוש בזהות צריך לשרת מטרה אחרת, פתאום נמצא לא מעט המרה של הביטוי $\sin 2x$ בביטוי $2 \sin x$, כלומר שימוש בזהות: $\sin 2x = 2 \sin x$.

למשל: בתרגיל דוגמא:

נא לפתור (עבור המשתנה a , x פרמטר) את המשוואה

$$\sin 2x = a \sin x$$

מסיקים תלמידים כי: $a = 2$

לעומת זאת, הפתרון הנכון הוא, כמובן:

$$2 \sin x \cos x = a \sin x \Leftrightarrow$$

$$\sin x (2 \cos x - a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin x = 0 \quad \text{או} \quad a = 2 \cos x \Leftrightarrow$$

$$\cos x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{או} \quad \begin{cases} x = \pm \arccos\left(\frac{a}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, & |a| \leq 2 \\ \Phi, & |a| \geq 2 \end{cases}$$

מה מביא תלמיד לפעול לפי הכלל השגוי? מה הוא כן יודע?

✓ לתשובה שמספק התלמיד יש מבנה של פתרון משוואה. לפיכך בולטת העובדה שהתלמיד מזהה את המבנה של התרגיל כמשוואה. התייחסות למבנה הצורני של הביטויים המופיעים בתרגיל או ביחידת המידע המתמטית, תוך התעלמות מהמלל המקיף אותם, או מהמשמעות עצמאית של כל מרכיב בביטוי זוהתה כנטייה של לומדים במחקר שבדק הבנה של הוכחות כתובות על ידי סטודנטים בקורס חשבון דיפרנציאלי מתקדם (דוד 1996);

✓ התלמיד מבצע פעולת 'צמצום' בשני האגפים. הוא מבטל סמלים זהים בשני האגפים. זאת משום, שכפי הנראה, האותיות והמספרים הרשומים בשורות ללא סימני פעולה ביניהם מתפרשים על ידו כאילו יש סימן כפל ביניהם – ובמצב זה קל

$$\frac{2x+10}{x-5} > 7 \quad / \cdot (x-5)$$

$$2x+10 > 7(x-5)$$

$$2x+10 > 7x-35 \quad / -2x+35$$

$$45 > 5x \quad / :5$$

$$9 > x$$

פתרון אחר... של תלמיד מתקדם יותר...

$$\frac{2x+10}{x-5} > 7 \quad / -7$$

$$\frac{2x+10}{x-5} - 7 > 0$$

$$\frac{2x+10-7(x-5)}{x-5} > 0$$

$$\frac{-5x+45}{x-5} > 0 \quad / \cdot (x-5)$$

$$-5x+45 > 0 \quad / -45$$

$$-5x > -45 \quad / :(-5)$$

$$x < 9$$

(אם זה לא היה עצוב זה היה מצחיק...)

מה קורה כאן?

- ✓ בפתרון הראשון יש חיקוי ברור של פתרון משוואה – כופלים במכנה, גם אם יש בו משתנה. אם היה בו משתנה, דואגים לתנאי הגבלה לפתרון;
- ✓ הפתרון השני מתחיל בהתייחסות מעט שונה – לכאורה יש זיהוי של הבדל בין משוואה לאי-שוויון – אך לבסוף יש כפל במכנה, כלומר טיפול זהה לפתרון משוואה.

אז מה לעשות?

- אפשר להציב ערכים מספריים ולעורר קונפליקט ביחס לפתרון;
- אפשר לפתור הרבה תרגילים... (זה כנראה לא ממש עוזר).
- אולי ללמד איך לפתור משוואות ואי-שוויונים לפי אותה שיטה???

ייתכן כי אם נצייד את התלמידים בשיטה אחידה לפתרון משוואה ואי-שוויון, לא ניתקל בבעייתיות, שהודגמה לעיל. להלן הצעה לשיטה אחידה זו:

אפשר להציג כל משוואה או אי-שוויון באופן:

$$f(x) \geq \leq 0$$

ולאחר הצגה זו לבחון את הפתרונות.

במשוואה יש לפעול לפי הכלל:

"מנה שווה אפס כאשר המונה שווה אפס והמכנה שונה מאפס",

✓ הם נוטים לחלק בגורם x במיוחד אם עברו להצגה:

$$x(4-x^2)=0$$

$$2(4-x^2)=0$$

לחלק ב-2. שוב עולה כאן התופעה של התייחסות למבנה צורני תוך התעלמות מהבדלי המשמעות הדקים – תופעה שהתגלתה אצל דוד (1996). במהלך הפתרון מופיעה התייחסות לביצוע 'הפעולה' של 'הוצאת שורש למעשה נפתרת משוואה ריבועית חסרה';

✓ המשוואה: $4=x^2$ היא משוואה ריבועית פשוטה,

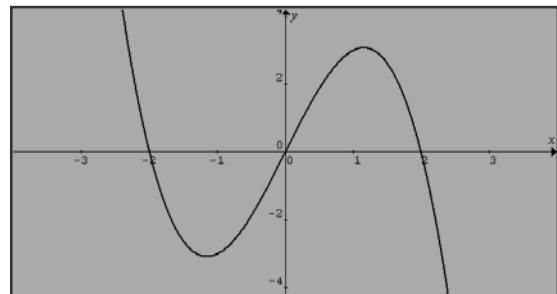
עד כדי כך, שהיא מזכירה משוואה ליניארית פשוטה מהסוג: $4x=16$. למשוואות כאלה יש, בדרך כלל, פתרון אחד בלבד. הנטייה לחפש פתרון אחד בלבד לכל משוואה יכולה להיות מוסברת בדרך זו;

✓ פתרון של משוואות מחייב ביצוע פעולות (שקילות)

עליהן. בדרך כלל לפעולות מתמטיות יש תוצאה אחת בלבד (פעולת כפל, חיבור, חיסור...). בפתרון של התלמיד מסתמנת היצמדות לאמונה זו.

איך נעזור להם?

- נבקש לפתור את המשוואה: $0 \cdot (4-x^2)=0$ לעומת: $2 \cdot (4-x^2)=0$
- נבקש להציב במשוואה את הפתרון החסר ונגרום לקונפליקט...;
- נציע ייצוג גרפי למשוואה המקורית ונעמת אותו עם הפתרון שנמצא:



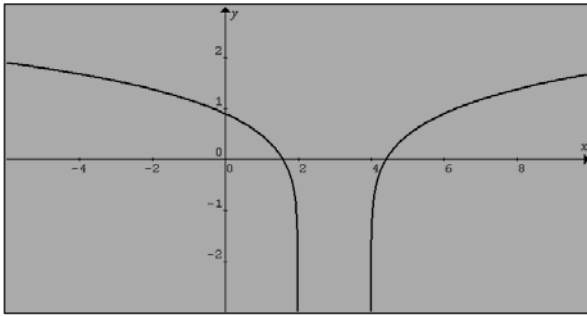
דוגמא 4 – פתרון אי-שוויון לעומת פתרון משוואה

המשימה: מציאת קבוצת האמת של הפסוק:

$$\frac{2x+1}{x-5} > 7$$

פתרון שגור של תלמיד:

נראה כך :



מה קרה כאן? התלמיד השתמש בחוק הלוגריתמים: "לוגריתם של מכפלה שווה לסכום הלוגריתמים". הפעלת החוק על הפונקציה, צמצמה את תחום ההגדרה שלה.

מה יודע תלמיד הפועל בדרך שתוארה לעיל?
 ✓ התלמיד יודע את החלק הנוסחתי של חוק הלוגריתמים העוסק בלוגריתם של מכפלה;

או:

- ✓ מצטט נכונה את הכלל עבור שני מספרים חיוביים.
- ✓ התלמיד יודע לגזור פונקציה לוגריתמית פשוטה...

- איך נעזור לתלמיד להגיע לשימוש נכון בכלל?
- עימות עם הגרף הנכון בתרגיל שלעיל ודיון בהבדלים;
- נציג את הפרדוקס הבא ונדון בו – לפי: נצה מובשוביץ-הדר וגיון ווב, אחד שווה אפס ועוד הפתעות מתמטיות (בעברית: 2002, עמ' 27):

עידו פתר את המשוואה הבאה :

$$\log(x+3)(x-8) + \log \frac{x+3}{x-8} = 2$$

$$\begin{aligned} \log(x+3)(x-8) + \log \frac{x+3}{x-8} &= 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log(x+3) + \log(x-8) + \log(x+3) - \log(x-8) &= 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\log(x+3) &= 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log(x+3) &= 1 \Leftrightarrow 10 = x+3 \Leftrightarrow x = 7 \end{aligned}$$

הצבה של המספר 7 במשוואה המקורית נותנת פסוק שקר, ולכן לדעתו של עידו אין למשוואה פתרון.

אלעד מצא את הפתרון $x = -13$ כיצד???

ובאי-שוויון :

יש להשתמש בנקודות האפס של המונה והמכנה כדי ליצור תחומים על ציר ה- x , בכל אחד מהם יש לבדוק את הקיום של האי-שוויון – פתרון בשיטת הקטעים.

הערה: שיטה רווחת לפתרון אי-שוויונים, בהם הנעלם מופיע במכנה, מציעה לכפול את שני האגפים בריבוע של המכנה. גם שיטה זו גורמת לבעייתיות דומה. לעיתים היא אף מסרבלת את הפתרון :

$$\frac{x+2}{x-3} > x \quad / \cdot (x-3)^2$$

$$(x+2)(x-3) > x(x-3)^2$$

ברור כי מכאן, אם מעבירים אגף ומוציאים גורמים משותפים אל מחוץ לסוגריים, מגיעים לפתרון יעיל, אך תלמידינו בדרך כלל פותחים סוגריים... הרי בכך אנו מתרגלים אותם מתחילת לימודי האלגברה... ואז מגיעים לאי שוויון ממעלה שלישית...

דוגמא 5 $\log(xy) = \log x + \log y$ – האומנם?

אלמוני התבקש לשרטט סקיצה לגרף של הפונקציה :

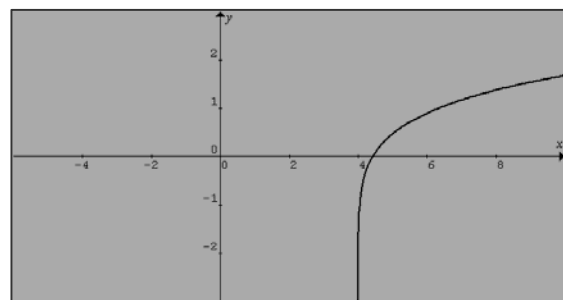
$$f(x) = \log((x-2)(x-4))$$

כדי לא להסתבך עם גזירה של מכפלה – לצורך נוחיות הפתרון – השתמש בחוקי לוגריתמים וקיבל :

$$f(x) = \log((x-2)(x-4)) = \log(x-2) + \log(x-4)$$

תחום ההגדרה שמצא : $x-2 > 0$ וגם : $x-4 > 0$

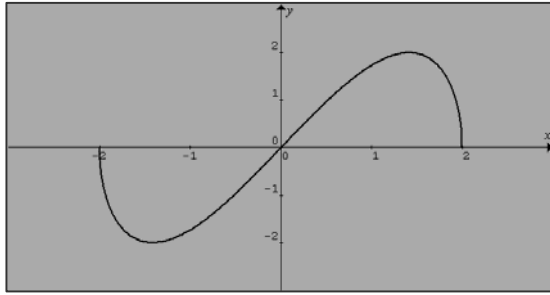
מכאן הדרך אל הגרף הבא הייתה קלה :



בדיקה במחשבון גרפי / מחולל גרפים העלתה כי הגרף אינו שלם.

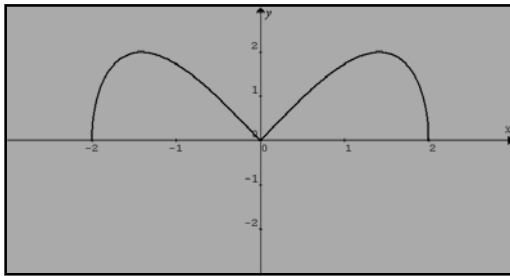
הגרף של הפונקציה המקורית :

$$f(x) = \log((x-2)(x-4))$$



אולם הוא לא צדק.

מחולל גרפים מציג עבור הפונקציה המקורית את הגרף הבא:



מה התלמיד יודע?

- ✓ שולט במיומנויות של חקירת פונקציה עם שורש;
- ✓ מכיר את הכלל: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;
- ✓ מתייחס אל הוצאת שורש כפעולה הפוכה להעלאה בריבוע או בסמלים: $\sqrt{x^2} = x$.

ובכל זאת:

היכן הטעות? מהו מקורה?

יש לשים לב כי השוויון: $x\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4x^2-x^4}$ אינו נכון לכל x .

הכלל נכון אך ורק לכל a, b חיוביים. וכך גם השוויון: $\sqrt{x^2} = x$ נכון רק למספרים חיוביים. התלמיד מתעלם ממגבלות אלו. הוא מתייחס רק לחלק הנוסחתי של הכלל ומזניח את המלל, תופעה שנצפתה וכבר נזכרה לעיל.

מכאן, עבור הפונקציה שלנו: השוויון בין התבניות:

$$x\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4x^2-x^4}$$

נכון רק עבור החלק החיובי של תחום ההגדרה, כלומר עבור: $0 \leq x \leq 2$ בלבד. ואכן בתחום זה שני הגרפים מתלכדים.

- נכתוב את הכלל באופן מדויק ללא מגבלות של תחומי הגדרה: $\log|xy| = \log|x| + \log|y|$

דוגמא 6 – ההבדל בין: $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

לבין: $g(x) = \sqrt{4x^2-x^4}$

לפניכם שאלה שגרתית בנושא חקירת פונקציות:

נתונה הפונקציה: $g(x) = \sqrt{4x^2-x^4}$. נא לחקור אותה מבחינת:

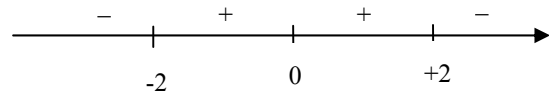
תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, נקודות פיתול וסקיצה.

פתרון שהוצע על-ידי תלמיד למציאת תחום ההגדרה:

$$4x^2 - x^4 \geq 0$$

$$x^2(4-x^2) \geq 0 \quad \text{או – אי-שוויון שקול:}$$

$$x^2(4-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2(2-x)(2+x) \geq 0$$



תחום ההגדרה הוא: $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

ונקודות החיתוך עם הצירים הן:

$$(-2,0), (0,0), (2,0)$$

כדי להמשיך את החקירה, הציג התלמיד את הפונקציה

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

באופן הבא:

וגזר:

$$(x\sqrt{4-x^2})' = 1 \cdot \sqrt{4-x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

מכאן קיבל כי לפונקציה שתי נקודות קיצון:

$$\min(-\sqrt{2}, -2), \max(\sqrt{2}, 2)$$

בלי סיבוכים רבים הגיע גם לנגזרת השנייה:

$$f''(x) = \frac{-4x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

הסיק כי לפונקציה נקודת פיתול בראשית הצירים, ובסיום החקירה הציג את הסקיצה הבאה:

כדי לבצע מעבר נכון, יש לשים לב לתחום ההגדרה, כלומר למגבלות של הפעלת הכלל, או לרשום במדויק: $\sqrt{x^2} = |x|$. אבל אז מלאכת הגזירה מתפצלת לשני מקרים...

לכן: לא תמיד כדאי לקצר את הדרך!

הגזירה הישירה נותנת:

$$\left(\sqrt{4x^2 - x^4}\right)' = \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = \frac{2x(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$$

וממנה נובעות מסקנות המובילות לגרף הנכון.

דוגמא 7 – בעיות בחקירה של משוואה ריבועית, או "מי את דלתא Δ"?

הקדמה:

תלמיד נתבקש לענות על השאלה השגרתית הבאה:

נתונה משפחת המשוואות הבאה:

$$0 = (m-1)x^2 - (2m-2)x + 9 - m$$

עבור אילו ערכים של הפרמטר m יש למשוואה שני פתרונות? פתרון אחד? אפס פתרונות?

פתר:

המקרה הליניארי: $a = m-1 = 0$, כלומר $m = 1$;

המקרה הריבועי: $m \neq 1$

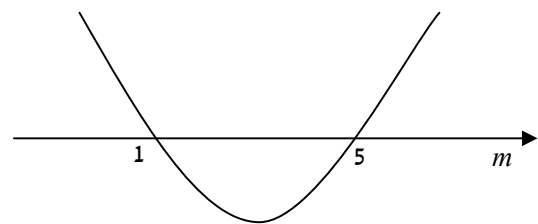
במקרה הליניארי: $0 = 9 - 1 = 8$

אין פתרון.

במקרה הריבועי: נרשום את הדיסקרימיננטה:

$$\begin{aligned}\Delta &= [2(m-1)]^2 - 4(m-1)(9-m) = \\ &= 4(m-1)[(m-1) - (9-m)] = \\ &= 4(m-1)(2m-10) = 8(m-1)(m-5)\end{aligned}$$

התקבלה פונקציה ריבועית ב- m שנראית כך:



[לפי הניתוח השגרתי:]

עבור $\Delta > 0$ יתקבלו שני פתרונות למשוואה הריבועית.

עבור $\Delta = 0$ יתקבל פתרון אחד למשוואה הריבועית.

עבור $\Delta < 0$ לא יתקבלו פתרונות למשוואה הריבועית.

ובמקרה שלנו:

שני פתרונות: $m < 1$ או $m > 5$

פתרון אחד: $m = 5$ או $m = 1$

אפס פתרונות: $1 < m < 5$

בעיה ראשונה:

מה קורה כאשר מתקבלת דיסקרימיננטה "קצת אחרת"?

נביט במשפחת הפונקציות:

$$f(x) = (m-1)x^2 + (3m-2)x + m$$

תלמיד התבקש לענות על השאלה:

עבור אילו ערכים של m יש לגרף של הפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ?

תשובתו:

התנאי הנדרש: $\Delta > 0$

חקר ומצא: $\Delta > 0 \Leftrightarrow (3m-2)^2 - 4m(m-1) > 0$

קיבל: $5m^2 - 8m + 4 > 0$

ניסה לפתור את המשוואה הריבועית:

$$5m^2 - 8m + 4 = 0$$

מצא כי: "מה שמתחת לשורש שלילי".

הסיק: "אין פתרון, לכן אין ערך של m עבורו יש לגרף של הפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ".

מה קרה כאן? מה התלמיד יודע? מהו ההבדל בין שתי השאלות? מדוע השאלה השנייה קשה יותר לתלמידים?

נשים לב כי התלמיד יודע לא מעט:

- ✓ מגייס את הדיסקרימיננטה לעזרתו;
- ✓ מבצע חישובים אלגבריים;
- ✓ מפעיל את נוסחת השורשים;
- ✓ מזהה קשר בין דיסקרימיננטה שלילית לבין מצב של חוסר פתרון למשוואה ריבועית.

היכן הכשל? מהו ההבדל בין שתי השאלות? את האחת קל לפתור באופן אלגוריתמי ואת השנייה לא. להלן ניתוח מפורט יותר:

- בשתי השאלות משמשת הדיסקרימיננטה כלי אבחון למצב של הפונקציה/משוואה. גם הדיסקרימיננטה היא פונקציה ריבועית. כלומר חוקרים פונקציה ריבועית (במשתנה x) בעזרת פונקציה ריבועית (במשתנה m). לא פשוט! הצלחה בביצוע משימה כזו מחייבת הבנה מתקדמת של המושגים – לפי התיאוריה APOS יש לתפוס את המושג פונקציה ריבועית כעצם, כדי שאפשר יהיה לבצע עליה פעולות. היכולת להשתמש בפונקציה ריבועית אחת כדי להסיק מסקנות על פונקציה ריבועית אחרת אולי אף מורכבת יותר ומחייבת הבנה ברמת המבנה – הרמה הגבוהה ביותר.

• השאלה הראשונה עוסקת במשוואה ואילו השאלה השנייה עוסקת בפונקציה. בשאלה הראשונה הפונקציה היא כלי בעזרתו מנתחים את המצב של המשוואה. בשאלה השנייה מנתחים מצב של פונקציה בעזרת פונקציה דומה.

• בשאלה הראשונה מופיעים כל המרכיבים של האלגוריתם לפתרון, היא מתאימה למצב הסטנדרטי – הדוגמה הפרוטטיפית: מקבלים דיסקרימיננטה שהיא פונקציה ריבועית בעלת מינימום החותכת את הציר האופקי בשתי נקודות. כך אפשר לעבוד לפי אלגוריתם מוכן: "מחוץ לשתי נקודות החיתוך יש שני פתרונות, בנקודות החיתוך יש רק פתרון אחד ובין שתי הנקודות אין פתרון כלל." כלומר לצורך פתרון השאלה הראשונה מספיק להבין הבנה אינסטרומנטלית ואילו לפתרון השאלה השנייה דרושה הבנה רלציונית.

• בשאלה השנייה הדיסקרימיננטה עצמה היא בעלת דיסקרימיננטה שלילית. ההסקה הנכונה: כיוון שהדיסקרימיננטה של הדיסקרימיננטה שלילית, הרי שהדיסקרימיננטה עצמה חיובית לכל ערך של הפרמטר m (כי המקדם המוביל בה היא חיובי). כלומר אין לפרבולה המייצגת את הדיסקרימיננטה נקודת חיתוך עם ציר ה- m . מכאן יש להסיק כי לפרבולה המקורית יש שתי נקודות חיתוך לכל ערך של m . ניתוח מבלבל לכל הדעות.

בעיה שנייה:

המצב מסתבך והולך כאשר נשאלת שאלה כגון:

מהם הערכים של הפרמטר m עבורם הגרף של הפונקציה: $f(x) = (m-1)x^2 + (3m-2)x + m$ נמצא כולו מתחת לישר $y=1$ פתרון אופייני שגוי מתחיל כך: $a < 0 \Leftrightarrow m < 1$ וגם: $\Delta < 1$

מה התלמיד יודע?

- ✓ מזהה צורך בשני תנאים: האחד על a והשני על Δ ;
- ✓ מקשר בין המילה "מתחת" המופיעה בשאלה לבין הדרישה על הפרמטר a – דורש פרבולה בעלת מקסימום ("בוכה") ;
- ✓ התלמיד כנראה יודע שכאשר שואלים שאלה דומה עבור ציר ה- x , אשר משוואתו: $y=0$, הוא מתחיל כך: $a < 0, \Delta < 0$ פתרון כזה מעלה כמובן את השאלות: מהי המשמעות של השוואת ה- Δ לאפס בשאלות הפשוטות?

מהו התפקיד של האפס הזה?

באילו מקרים האפס מייצג את ציר ה- x ובאילו מקרים הוא "סתם מספר"?

כיצד נקדם הבנה?

- נבחין בין האפס של ציר ה- x לבין האפס של הדיסקרימיננטה;
- נכוון את התלמידים לתת פירוש פונקציונאלי לכל משוואה או אי-שוויון;
- נפתור גם שאלות בהן נבדק הקשר בין משפחת פונקציות ריבועיות לבין ישרים שאינם מקבילים לציר x או אפילו לבין פונקציות ריבועיות או משפחות כאלה. מהלך כזה ימנע את קיבוע התפיסה שמשוואים את הפונקציה הריבועית למספר – אותו מספר אליו משווים את Δ .

בעיה שלישית:

תלמידים נתבקשו לענות על השאלה הבאה:

נתונה הפונקציה:

$$y = 2(m-2)x^2 + 2(2m-1)x - 6m + 5$$

- א. עבור אילו ערכים של הפרמטר m נמצא כולו מתחת לישר $y=2$?
- ב. לאילו ערכים של הפרמטר m גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות שונות הנמצאות בצד החיובי של ציר ה- x ונמצא כולו מתחת לישר $y=2$?

לאחר שעברו הכנה טובה (כנראה) לקראת השאלה שבסעיף א ענו רובם נכונה על סעיף זה.

בדקו את המקרה הליניארי ועבור המקרה הריבועי הציבו את האי-שוויון:

$$2(m-2)x^2 + 2(2m-1)x - 6m + 5 < 2$$

$$2(m-2)x^2 + 2(2m-1)x - 6m + 3 < 0 \quad \text{כלומר:}$$

ועבור דרשו: $a < 0$ וגם: $\Delta < 0$.

$$\frac{1}{2} < m < \frac{13}{8} \quad \text{עמלו, חישבו וקיבלו:}$$

$$\frac{1}{2} < m < \frac{13}{8} \quad \text{בסעיף השני רשמו: התנאי של סעיף א:}$$

יחד עם:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

וכאשר פרטו כתבו:

$$\begin{cases} \Delta > 0 & \Leftrightarrow (2(2m-1))^2 - 4(3-6m)(2(m-2)) \\ -\frac{b}{a} > 0 & \Leftrightarrow -\frac{2(2m-1)}{2(m-2)} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 & \Leftrightarrow \frac{3-6m}{2(m-2)} > 0 \end{cases}$$

מבט מדוקדק מגלה, כי כדי לפרש את התנאים:
 $\frac{c}{a} > 0$ ו- $-\frac{b}{a} > 0$ התלמידים התייחסו לאי-שוויון
 שיצרו בסעיף א, המתייחס לקשר בין הפונקציה הנתונה
 לישור $y = 2$.
 התשובה הסופית שקיבלו הייתה כמובן: הקבוצה
 הריקה...
 מה הם יודעים?

✓ בפתרון זה ניכרת עבודה אלגוריתמית נכונה;
 ✓ ניכרת התייחסות למרכיבי השאלה – קישור בין
 הסעיפים;
 מה לא יודעים?

✓ לא ניכרת הבנה של משמעות התנאים והדרישות;
 ✓ למרות שהתשובה הסופית יכולה להיות ברורה
 מראש, מתבצעת עבודה טכנית לא מעטה כדי
 להגיע אליה.
 איך נעזור?

- בעזרת מחולל גרפים אפשר להציג בפני התלמידים פרבולות המקיימות את הדרישה ולעמת אותם עם תשובתם;
- אפשר כמובן לכוון אותם לחזות את התשובה למערכת האי-שוויונים שכתבו עוד לפני פתרונה.

סיכום – "חנוך לנער על-פי דרכו"

שבע דוגמאות לשגיאות אופייניות וניתוח של מקורן האפשרי, לפי בחינת הידע הקיים במוחו של הלומד הפועל בדרך השגויה הובאו לעיל. דוגמאות רבות נעדרות מרשימה זו. אולם ניתן להחיל ניתוח דומה על כל שגיאה, שאינה פליטת קולמוס, ולהפכה לכדי מנוף ללמידה. כפי נאמר לעיל, בחלקו התיאורטי של המאמר, הלמידה, לפי הגישה הקונסטרוקטיביסטית, מתרחשת במוחו של הלומד. תפקידו של המורה, לכאורה, מצומצם מאוד, ואולי אף שולי לחלוטין. למעשה הדבר אינו כך. מורה מיומן, אדם חושב,

המצויד בכלים המאפשרים לו לנתח את תהליכי החשיבה של הלומד, יכול לעצב עבור התלמיד הזדמנויות למידה – שאלות חקר או מצבים המעוררים קונפליקטים – כאלה המכוונים בדיוק כדי להעמיק ולשפר את ההבנה. השגיאות יכולות לספק לנו, המורים, את המידע הסמוי על המתרחש במוחו של הלומד. השגיאות הן הביטוי הנראה לעין למחשבות ולשלבי ההבנה. לפי המודגם לעיל, ניתן לחפש את המקור לשגיאה, בדרך כלל, בהכללות יתר של חוקים או בשימוש באלגוריתמים במצבים שאינם מתאימים להם. כלומר: על המורה מוטלת המשימה הכבדה לחקור ולאתר את הקשרים החסרים בתפיסת המושג ולהתאים את הזדמנויות הלמידה לפי הצרכים של התלמידים השונים – "חנוך לנער על-פי דרכו". (משלי, פרק כ"ב פס' 6).

מקורות וחומר לעיון נוסף

- אביטל ש., שטלוורס ש. (1968): יעדים ללימוד מתמטיקה, רעיונות אחדים למורים, בולטין מס. 3, המכון של אוניברסיטת חיפה. המהדורה העברית בהוצאת "קשר חס" 2006.
- דוד ח. (1996) הבנת הוכחות מתמטיות מקריאתן, חיבור לשם קבלת תואר דוקטור למדעים, הטכניון, חיפה.
- הרפז י., 2005, חכה פיתיון ודגים, גישות לחינוך החשיבה, מכון ברנר וייס לטיפוח החשיבה.
- הרשקוביץ רינה, (1991), אספקטים קוגניטיביים בהוראה ובלמידה של גיאומטריה, חלק א, עלי"ה 9, עמ' 28-34.
- הרשקוביץ רינה, (1992), אספקטים קוגניטיביים בהוראה ובלמידה של גיאומטריה, חלק ב, עלי"ה 10, עמ' 20-27.
- וינר שלמה, (1987), התנהגות אלגוריתמית אמיתית ואלגוריתמית לכאורה בלמידת מתמטיקה, עלי"ה 2, עמ' 10-15.
- וינר שלמה, (1987), התנהגות אלגוריתמית בלמידת מתמטיקה (חלק שני), עלי"ה 3, עמ' 16-24.
- וינר שלמה, (1988), התנהגות אלגוריתמית בלמידת מתמטיקה (חלק שלישי), עלי"ה 4, עמ' 20-23.
- וינר שלמה, (1993), הוראת מתמטיקה – מחשבות ותופעות – מיומנו של מורה חוקר – פרק ב, עלי"ה 12, עמ' 23-27.
- וינר שלמה, (2000), סיפוקו של הצורך בודאות – אינטואיציה, עלי"ה 26, עמ' 17-22.
- ספרד אנה, (1991), ראיון עם פרופסור ריצ'רד סקמפ, עלי"ה 8, עמ' 18-22.
- סקמפ, ר. (1991), הבנה רלציונית והבנה אינסטרומנטלית. חלק א' - עלי"ה 8, עמ' 24-29, חלק ב' - עלי"ה 9, עמ' 24-27. המחלקה להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית, ירושלים.
- Davis R.B., (1992), "Understanding", *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 11, pp. 225-241.
- Dreyfus T. et al., (1990), *Advanced Mathematical Thinking*, in: Nesher P. & Kilpatrick J. (eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for Psychology of Mathematics Education*. ICME Studies Series, Cambridge University Press. P. 113-134.
- Dubinsky E. Lewin P. (1986), *Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of*

- Piaget J., (1977), *The Development of Thought: Equilibration of Cognitive Structures*, Viking Press, New York (Form French, 1975).
- Pegg, J., & Tall, D., (2005), T fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education*, vol. 37, no. 6, pp. 468-475.
- Sfard A., (1991), On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections of Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 1-36.
- Skemp R., (1976), Relational Understanding and Instrumental Understanding, *Mathematics Teaching*, Vol. 77, p. 20-26.
- Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*. 26(3), pp 9-15
- Tall D., (1992), The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Function, Limits, Infinity and Proof. In: Dopuglas A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NCTM, Ch. 20.
- Tall D., (2005), A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof, *International Colloquium on Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood*, organized by the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgium, 5-7 July, 2005.
- deVilliers M., (1990), Proof in The Mathematical Curriculum, *Paper Presented at The National Subject Didactics Symposium*, September 26-28 1990, Univ. of Stellenbosch.
- deVilliers M., (1995) Why Proof in Dynamic Geometry? In: *Justifying and Proving in School Mathematics, Mathematical Sciences*, Institute of Education, University of London.
- Vinner S., (1991) The role of Definitions in The Teaching and Learning of Mathematics. In: Tall D. (ed.): *Advanced Mathematical thinking*, Kluwer Academic Press.
- Induction and Compactness. *The Journal of Mathematical Behavior* 5, p. 55-92
- Fischbien. E. (1982), Intuition and proof, *For The Learning of Mathematics* Vol. 3 No. 2. p. 9-18, 24.
- Fischbien E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics*, Dordrecht, Reidel.
- Fischbien. E. (1989), Tacit Models and Mathematical Reasoning, *For The Learning of Mathematics* Vol. 9 No. 2, p. 9-14
- Fischbien E. & Kedem I. (1982), Proof and Certitude in the development of Mathematical Thinking in: Vermandel B. (ed.) *Proceedings of the Sixth International Conference of the Psychology of Mathematics Education*, Universitaire Instelling Antwerpen, Antwerp, Belgium, pp. 128-131
- Glaserfeld, von, Ernst, (1995), *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*, The Palmer Press, London.
- Gray E. & Tall D., (1991) Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. in: Furinghetti F. (ed.), *Proceedings of The 15th International Conference on The Psychology of Mathematics Education*, Assisi Italy p. 72-79.
- Henkin L. & Blackwell D., (1988), *Project 2061 – Mathematics Panel*, Personal Communication.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. pp. 65-97. New York: MacMillan.
- Jaworsky B., (1991), Scaffolding, in: Booker G. & de Mendicuni T.N. (eds.), *Proceedings of the 14th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, p. 91-98.
- N. Movshovitz-Hadar, O. Zaslavsky, S. Inbar (1987): An Empirical Classification-Model of Errors in High School Mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, Vol. 18, No. 1, pp. 3-14.
- Nesher, P. (1986) Are Mathematical understanding and algorithmic performance related? *For the Learning of Mathematics*, 6(3), pp.2-8.