



הנושא: בעיות בשני מעגלים בגיאומטריה אנליטית

הוכן ע"י:

נעמי בוחניק.

תקציר:

המחברת מתארת חווית הוראה ולמידה שהיתה לה עם תלמידיה, בעת הוראת הנושא 'משיק למעגל' בגיאומטריה אנליטית ברמת 5 יח"ל. בעת פתרון בעיה שגרתית העוסקת בחיפוש אחר משוואה של מיתר משותף של שני מעגלים נחתכים התגלתה המשוואה המבוקשת עוד לפני תום התהליך. חקירה מתמטית גילתה שהדבר אינו מקרי. בהערה למאמר מובאת עוד דוגמא למצב דומה.

מילות מפתח:

הוראה, למידה, פתרון בעיה, הנדסה אנליטית, גיאומטריה אנליטית, מעגל, מצבים הדדים בין מעגלים, מיתר, משיק, משוואה, ישר, צירוף לינארי, השערה, הוכחה, חקירה מתמטית.

החומר פורסם במסגרת:

על"ה 38, תשס"ז 2007, עמודים 49-52.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.



בעיות בשני מעגלים בגיאומטריה אנליטית

נעמי בוחניק

ranbuchn@netvision.net.il

ביה"ס כל ישראל חברים, חיפה

לאחר חיסור המשוואות וסידורן נקבל:

$$(*) \quad x - 2y + 5 = 0$$

נבטא את אחד המשתנים באמצעות האחר: $x = 2y - 5$

ונציב במשוואת אחד המעגלים ונקבל:

$$(2y - 5 - 3)^2 + (y - 9)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y^2 - 50y + 120 = 0 \Rightarrow y_1 = 6, y_2 = 4$$

$$y_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 7, y_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 3 \quad A(7, 6), B(3, 4)$$

משוואת המיתר המשותף היא, אם כן:

$$m_{AB} = \frac{1}{2}, y - 4 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$$

קיבלנו שמשוואת המיתר המשותף היא המשוואה (*).
כלומר כל הדרך מיותרת.

האם זה מקרי? מסתבר שלא. מה הסיבה? המשוואה
(*) מייצגת ישר. ברור שכל נקודה, אשר הצבתה בכל
אחת ממשוואות המעגלים נותנת פסוק אמת, תיתן
פסוק אמת גם בהצבתה בישר. ישנן רק שתי נקודות
כאלה והן קובעות ישר יחיד – המיתר המשותף!

II בעיה

נתונים שני מעגלים:

$$(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 5, x^2 + y^2 = 80$$

א. נא להוכיח כי המעגלים משיקים זה לזה.

ב. נא למצוא את משוואת המשיק המשותף.

פתרון

א. נחשב את אורך קטע המרכזים:

$$d = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

נחשב את הפרש אורכי הרדיוסים:

$$R_1 - R_2 = \sqrt{80} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

ברצוני לשתף אתכם בחוויה שחוויתי בשיעור
מתמטיקה בכתה י"ב 5 יח"ל. כשלימדתי את הנושא
"מצב הדדי של שני מעגלים" בגיאומטריה אנליטית,
פתרתי בעיה על הלוח ובמהלך הפתרון אחד התלמידים
הסב את תשומת ליבי לתופעה מעניינת, שבה, כבר
בתחילת הפתרון, מתקבלת המשוואה המבוקשת. כיוון
שלא היה סביר שדבר זה מקרי התחלתי להתעמק
בשאלה ומצאתי תשובה. אני מזמינה את הקוראים
להתלוות אלי לחוויה שחוויתי באותו שיעור.

I בעיה

נתונים שני מעגלים:

$$(x - 3)^2 + (y - 9)^2 = 25, (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 10$$

א. נא להוכיח כי המעגלים נחתכים.

ב. נא למצוא את משוואת המיתר המשותף.

פתרון

א. נחשב את אורך קטע המרכזים:

$$d = \sqrt{(6 - 3)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$5 - \sqrt{10} < 3\sqrt{5} < 5 + \sqrt{10}$$

אורך קטע המרכזים קטן מסכום האורכים של מחווי
המעגלים וגדול מהפרש אורכי הרדיוסים ולכן המעגלים
נחתכים.

ב. כדי למצוא את משוואת המיתר המשותף נמצא את
נקודות החיתוך של המעגלים. נפתור את מערכת
המשוואות:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 9)^2 = 25 \\ (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 + y^2 - 18y + 81 = 25 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 10 \end{cases}$$

כלומר אורך קטע המרכזים שווה להפרש בין אורכי המחוגים ולכן המעגלים משיקים מבפנים.

ב. נמצא את נקודת ההשקה ע"י פתרון מערכת המשוואות

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-3)^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 5 \\ x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$$

לאחר חיסור המשוואות וסידורן נקבל:

$$(**) \quad 2x + y = 20$$

נבטא את y באמצעות x : $y = 20 - 2x$

ונציב במשוואת המעגל הקנוני. נקבל:

$$x^2 + (20 - 2x)^2 = 80 \Rightarrow 5x^2 - 80x + 320 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 16x + 64 = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 4$$

כלומר נקודת ההשקה היא: $A(8, 4)$. נציב נקודה זו

במשוואת המשיק למעגל הקנוני דרך נקודה עליו:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 80 \Rightarrow x \cdot 8 + y \cdot 4 = 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + y = 20 \quad \text{משוואת המשיק המשותף היא:}$$

וזו המשוואה (**). כלומר שוב כל הדרך הייתה מיותרת!

האם זה מקרי? גם כאן אין הדבר מקרי. הרי ברור שכל נקודה שהצבתה בכל אחת ממשוואות המעגלים נותנת פסוק אמת תיתן פסוק אמת גם בהצבתה במשוואה (**). כך ברור שהמשוואה (**) מייצגת ישר העובר דרך הנקודה היחידה המשותפת לשני המעגלים. הנקודה היא נקודת ההשקה. אך האם ברור שהישר שקיבלנו הוא אכן המשיק? הרי אינסוף ישרים עוברים דרך הנקודה היחידה המשותפת לשני המעגלים. אולם אם הישר שהתקבל לא היה המשיק המבוקש, אך היה עובר בנקודה המשותפת שלנו המעגלים, הרי שהיה חותך את שני המעגלים, ואז היו עליו עוד שתי נקודות המקיימות כל אחת רק משוואה של מעגל אחד. בכל אחת מנקודות אלה מתקיימת רק משוואה של מעגל אחד, לכן המשוואה של הישר, המתקבלת מחיסור המשוואות של שני המעגלים, אינה מתקיימת. מסקנה: זהו המשיק.

אפשר להוכיח את תכונת ההשקה גם על-ידי התייחסות לשיפוע של הישר המתקבל.

ניעזר במשפט: "כאשר שני מעגלים משיקים זה לזה קטע המרכזים עובר דרך נקודת ההשקה", כלומר קטע המרכזים מאונך למשיק המשותף.

שיפוע הישר שקיבלנו הוא $m_1 = -2$ ואילו שיפוע קטע

המרכזים הוא $m_2 = \frac{3-0}{6-0} = \frac{1}{2}$, כלומר מכפלת

השיפועים היא (-1) . לכן קיבלנו ישר העובר דרך

הנקודה המשותפת לשני המעגלים ומאונך לקטע

המרכזים, לפיכך זהו המשיק המשותף.

הערה: ניתן לראות את מצב ההשקה בין המעגלים גם

כמצב גבולי של חיתוך שלהם. כאשר 'החיתוך שואף

להשקה', המיתרים המשותפים שואפים למשיק

המשותף, ומכאן ההתנהגות הזוהה בשתי הבעיות ברורה

– ההפרש בין משוואות המעגלים נותן את המיתר /

המשיק המשותף.

אנו פוגשים מצבי גבול של ישרים מספר פעמים לאורך

תכנית הלימודים בבית-הספר העל-יסודי, למשל: ניתן

לראות קטע אמצעים במשולש כמצב גבולי של קטע

אמצעים בטרפז; משיק וחיתוך למעגל, היוצאים שניהם

מנקודה משותפת מחוץ למעגל, יכולים להיתפס כמצב

גבולי של שני חותכים למעגל היוצאים מאותה נקודה;

או, בתחילת ההוראה של מושג הנגזרת מקובל להסתכל

על משיק כעל גבול של מיתרים אשר אחת מנקודות

הקצה שלהם קבועה והשנייה נעה על הגרף של

הפונקציה ומתקרבת-שואפת אליה.

היופי בתוצאות שקיבלנו ביחס לפשטות התהליך של

מציאת המשיק או המיתר המשותף נובע מכך שניתן

להסביר אותן תוך שימוש בשיקולים פשוטים וללא

הפעלת כלים כבדים של טכניקה אלגברית.

יחד עם זאת ניתן לתמוך את התוצאות גם בהוכחה

אלגברית פורמלית. הוכחה זו מובאת בסוף המאמר.

הצעה לפעילות בכתה

ראשית אפשר לפתור תרגיל של מציאת מיתר משותף

או משיק משותף ולהגיע לתוצאה המפתיעה (כפי שכבר

כתבתי, אצלי בכתה זו הייתה הפתעה כפולה כי גם אני

הופתעתי). בהמשך ניתן לשאול את התלמידים מה

בעצם קורה כאשר מבצעים צירוף ליניארי של שתי

משוואות.

נתחיל בדוגמא של מערכת משוואות מהמעלה

הראשונה, למשל:

$$\begin{cases} 3x - y = 16 \\ 2x + 3y = 29 \end{cases}$$

מחיבור המשוואות מתקבלת המשוואה $5x + 2y = 45$.

מה מתארת משוואה זו?

זוהי משוואה מהמעלה הראשונה ולכן היא מתארת ישר.

מה הקשר בין הישר הזה לישרים הנתונים? אם קיים זוג מספרים (x, y) , אשר הצבתו בשתי המשוואות נותנת פסוק אמת, הרי שהצבתו במשוואה החדשה נותנת גם היא פסוק אמת. על-כן הישר שהתקבל עובר דרך נקודת החיתוך של הישרים (במקרה שקיימת) ולכן המשוואה מתארת ישר העובר דרך נקודת חיתוך הישרים. קל לבדוק שנקודת חיתוך הישרים היא $(7, 5)$ והישר שהתקבל עובר דרך נקודה זו.

נרחיב תוצאה זו לצירוף ליניארי כלשהו של שתי משוואות מהמעלה הראשונה.

נניח :

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

נתבונן בצירוף הליניארי :

$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$
מאותם שיקולים בדיוק נובע, שלכל α, β מתקבלת משוואת ישר העובר בנקודת החיתוך של הישרים, ולכן קיבלנו את אלומת הישרים אותה מגדירים שני הישרים הנתונים.

הוכחה אלגברית

באופן כללי ניתן להכליל את התוצאה שקיבלנו גם למעגלים נוספים ואף לטעון טענה רחבה יותר :

יהיו נתונים המעגלים הנחתכים :

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = R_1^2$$

$$(x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = R_2^2$$

אזי, המשוואה הנוצרת מצירוף ליניארי של שתי המשוואות :

$$\alpha[(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - R_1^2] + \beta[(x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - R_2^2] = 0$$

מתארת ישר או מעגל העוברים דרך נקודות החיתוך של המעגלים (אם קיימות כאלה).

ההוכחה של טענה זו היא מיידית. ראשית, גם כאן אפשר להשתמש בשיקולים מהסוג בו השתמשנו קודם, אך ננקוט כאן בגישה אלגברית ישירה. נסדר את המשוואה המצורפת ונקבל :

$$(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + \beta)y^2 - 2(\alpha m_1 + \beta m_2)x - 2(\alpha n_1 + \beta n_2)y + F = 0$$

כאשר :

$$F = \alpha(m_1^2 + n_1^2 - R_1^2) + \beta(m_2^2 + n_2^2 - R_2^2)$$

אם $\alpha + \beta \neq 0$ נקבל משוואה שניונית שבה מקדמי x^2 ו- y^2 שווים זה לזה והיא אינה מכילה מכפלות משותפות $x \cdot y$. זהו תנאי הכרחי, אך לא מספיק, למשוואת מעגל. כך שאם קיימות נקודות המקיימות את שתי המשוואות ביחד, הלא הן נמצאות על מעגל או ישר משותף העובר דרךן.

בדיון שלנו טיפלנו בחיתוך או השקה של מעגלים, וביצענו חיסור משוואות, כלומר עסקנו במקרה בו $\alpha + \beta = 0$. במקרה זה מתקבל ביטוי מהמעלה הראשונה. נבדוק את הביטוי האלגברי לתופעות שגילינו קודם :

נניח כי $\alpha = (-\beta) \neq 0$ (הנחה ברורה, אחרת מתקבלת משוואה השווה באופן זהותי לאפס וזה מקרה מנוון ולא מעניין).

נחלק את כל המשוואה ב- α . נקבל את המשוואה :
 $(-2m_1 + 2m_2)x + (-2n_1 + 2n_2)y + m_1^2 - m_2^2 + n_1^2 - n_2^2 - R_1^2 + R_2^2 = 0$

יתכנו ארבעה מצבים עבור מרכזי המעגלים :
א. $n_1 = n_2 \wedge m_1 = m_2$ - למעגלים מרכז משותף.

ב. $n_1 \neq n_2 \wedge m_1 \neq m_2$ - קטע המרכזים אינו מקביל לאף אחד מהצירים.

ג. $n_1 \neq n_2 \wedge m_1 = m_2$ - קטע המרכזים מקביל לציר x.

ד. $n_1 = n_2 \wedge m_1 \neq m_2$ - קטע המרכזים מקביל לציר y.

מצב א : $n_1 = n_2 \wedge m_1 = m_2$

במצב זה מדובר בשני מעגלים בעלי מרכז משותף ואז הם לא נחתכים ולא משיקים, כלומר מצב זה לא רלוונטי לדיון. לכן נוכל להניח שהמקדמים של x ו-y לא מתאפסים ביחד. וקיבלנו משוואת ישר, בכל אחד מהמצבים ב, ג או ד.

במצב ב שיפוע הישר שקיבלנו הוא $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{n_2 - n_1}$.

שיפוע קטע המרכזים הוא $a_2 = \frac{n_2 - n_1}{m_2 - m_1}$.

סיכום

כשגיליתי בשיעור את התופעה הייתי מופתעת, אך מיד חשבתי על ההסבר לתופעה. וכך יצא, שלגבי עצמי גיליתי משהו חדש במתמטיקה. לאחר שהראיתי את מה ש"גיליתי" לאחד המורים העובדים איתי הוא הראה לי את המשפט המתאים במתמטיקה (בדבר הצירוף הליניארי של שני המעגלים) כך שלצערי לא גיליתי כל דבר חדש במתמטיקה, אך עדיין חוויתי את חדות הגילוי!

ולבסוף: אם בבחינת בגרות תישאל שאלה מסוג זה, האם תתקבל תשובה המסתמכת על הדרך המקוצרת? אני מניחה שתשובה כזו תתקבל בתנאי שהתלמיד יצדיק את הקיצור בעזרת נימוק מתאים.

מתקיים: $a_1 \cdot a_2 = -1$, כלומר הישר שקיבלנו מאונך לקטע המרכזים. אם לשני המעגלים נקודה משותפת אחת בלבד, אזי הישר הוא המשיק המשותף – לפי המשפט: "כאשר שני מעגלים משיקים קטע המרכזים עובר דרך נקודת ההשקה", קיבלנו משוואת ישר, העובר דרך הנקודה המשותפת של שני המעגלים ומאונך לקטע המרכזים, כלומר מאונך לכל אחד מהמחוגים (רדיוסים) הנוגעים בנקודת ההשקה, ולכן זוהי משוואת המשיק המשותף. אם למעגלים שתי נקודות משותפות, אזי המשוואה שקיבלנו מתאימה למיתר המשותף, ולמדנו שמיתר זה מאונך לקטע המרכזים! ניתן להוכיח בקלות תכונה זו, כמובן, גם משיקולים גיאומטריים.

במצבים ג או ד מתקבל קטע מרכזים מקביל לציר x והישר מקביל לציר y , או להיפך, ולכן גם כאן הישר המתקבל מאונך לקטע המרכזים והוא המשיק או המיתר המבוקש.

הערת המערכת: תופעה נוספת של קיצור דרך

במבחן, התבקשו תלמידים למצוא:

$$4x + 3y - 7 = 0 \quad \text{משוואת ישר המקביל לישר } 4x + 3y - 7 = 0 \quad \text{הנמצא במרחק } 4 \text{ מנקודת מפגש הישרים.}$$

שניים מהם הציעו את הפתרון הבא, ללא הסברים מילוליים תומכים:

$$\begin{aligned} \frac{|4x + 3y - 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4 &\Rightarrow |4x + 3y - 7| = 20 \\ 4x + 3y - 7 = 20 &\quad \text{או} \quad 4x + 3y - 7 = -20 \\ 4x + 3y - 27 = 0 &\quad \text{או} \quad 4x + 3y + 13 = 0 \end{aligned}$$

כלומר: הם קיבלו את התשובות הנכונות! אך האם צורת הכתיבה של הפתרון שלמה? האין צורך לנמק? מהי הסיבה לנכונות של קיצור הדרך? נסביר: המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור הנמצאות במרחק נתון מישר נתון הוא שני ישרים המקבילים לישר זה ונמצאים משני צידיו במרחק הנתון ממנו. ולכן כתיבת התנאי אותו מקיימת נקודה אקראית (x, y) על המקום הגיאומטרי המבוקש נותנת את התשובה הנכונה. אלא שעל הפותר

להסביר שהתייחס לנקודה אקראית על הישר המקביל המבוקש ודרש שמרחקה מהישר הנתון יהיה שווה ל-4. התלמידים השתמשו בנוסחת המרחק של נקודה מישר, המופיעה בנוסחאון ולא בנוסחת המרחק בין מקבילים שאינה מופיעה בו. פתרון שלם לשאלה יהיה, כמובן, האמור לעיל עם נימוק מתאים, או פתרון בעזרת נוסחת

מרחק בין ישרים מקבילים: $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ כדלקמן: משוואת הישר המבוקש היא מהצורה $4x + 3y + C = 0$.

במקרה שלנו מתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{|C - (-7)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4 &\Leftrightarrow |C + 7| = 20 \\ C + 7 = 20 &\Leftrightarrow \quad \text{או} \quad C + 7 = -20 \\ C_1 = 13 &\quad \quad \quad C_2 = -27 \\ 4x + 3y + 13 = 0 &\quad \text{או} \quad 4x + 3y - 27 = 0 \end{aligned}$$

כלומר: