



הנושא: פתרון מתמטי ללא נוסחאות או מתמטיקה ללא מילים

הוכן ע"י: מארק אפלבוים.

תקציר: המחבר מציג פתרון מקורי שהציע תלמיד לשאלה מבחינת בגרות בנושא 'וקטורים אלגבריים'. התלמיד התבסס בתשובתו על שיקולים גיאומטריים במרחב ולא השתמש בחישובים אלגבריים. במאמר דן המחבר ביתרונות ובחסרונות של הגישה האלגברית השגרתית לעומת הפתרון המקורי של התלמיד.

מילות מפתח: אלגברה, וקטורים, וקטורים אלגבריים, בחינת בגרות, פתרון, ישר, מישור, חיתוך, הקבלה, התלכדות, הצטלבות, מצבים הדדיים בין ישרים, מצבים הדדיים בין מישורים.

החומר פורסם במסגרת: עלייה 38, תשס"ז 2007, עמודים 53-55.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

פתרון מתמטי ללא נוסחאות או מתמטיקה ללא מילים

מארק אפלבוים

mark@kaye.ac.il

המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר שבע

חלק I – פתרון מתמטי ללא נוסחאות

השאלה שנדון בפתרונה היא השאלה הבאה :

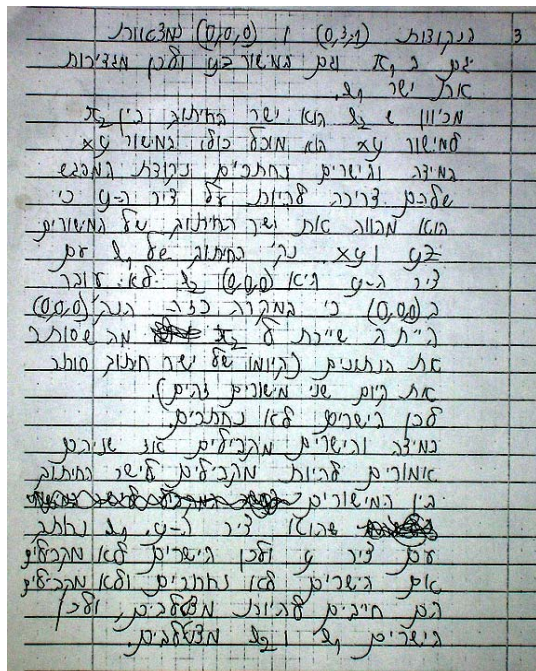
ישר החיתוך שבין מישור π_1 למישור π_2 עובר דרך הנקודות $(2, -1, 2)$ ו- $(0, 3, -1)$. המישור π_1 עובר דרך ראשית הצירים, המישור π_2 עובר דרך הנקודה $(1, 3, 1)$.

l_1 הוא ישר החיתוך בין המישור π_1 למישור yz .

l_2 הוא ישר החיתוך בין המישור π_2 למישור xy .

מהו המצב הדדי בין הישרים l_1 ו- l_2 ?

הפתרון של התלמיד לפניכם :



בערב קיצי אחד פנתה אליי מעריכה בכירה של בחינות בגרות ושאלה את דעתי על פתרון לבעיה מבחינת בגרות – שאלון 007, קיץ תשס"ו מועד ב. היא לא הסבירה מדוע חשובה לה חוות דעתי, כי רצתה לשמור על אובייקטיביות במתן התשובה. אציין כי במשך 7 שנים הייתי מעריך בחינות בגרות ברמה של 5 יח"ל. בדיקת מבחני בגרות היא עבודה קשה מאוד הדורשת הן מאמץ פיזי (לבדוק 50-80 מבחנים ביום) והן מנטאלי – הרי על הכתפיים של מעריכים מונחת אחריות כבדה ביחס לעתידו של התלמיד. כל מבחן נבדק פעמיים כדי למנוע טעויות אנוש. במילים פשוטות: עומס רב, אחריות כבדה ומעט כבוד. יחד עם זאת חשוב לציין שלפי התקן של משרד החינוך על המעריך לבדוק שאלון אחד (לדוגמה 007) ב- 10-12 דקות. אני מציין את הפרט הזה כיוון שבדיקת הפתרון שיוצג בהמשך של שאלה אחת בלבד לקחה לי כ- 20 דקות. ברור כי תכנים מתמטיים ברמה של 5 יח"ל מאפשרים ליוזם וליצור במספר רב יותר מקרים, הן בשל מורכבות הנושאים והן בזכות הרמה הגבוהה של הפותרים, שיכולים להפגין מקוריות ויצירתיות. אין ספק כי לא בכל מבחן יימצא פתרון לא שגרתי. אולם פעמים רבות אנחנו פוגשים פתרונות לא קצרים, אשר קו המחשבה בהם אינו ברור. אז מוטל על המעריכים לקרוא ולהבין אותם! לפעמים הפתרונות האלה מתגלים כשגויים אך לעיתים יש הפתעות. מה עושים מעריכים במקרים בהם הם לא עומדים בקצב שנקבע על ידי משרד החינוך? יושבים על חשבונם שעות על גבי שעות כדי שהבוגרים שלנו לא ייפגעו מחוסר תשומת לב, חוסר ריכוז או מחוסר מקצועיות (לא עלינו).

הנני מזמין אותך להצטרף אליי למסע מרתק של בדיקת הפתרון של תלמיד אלמוני.

ניתן לראות כאן שהפתרון אינו מסודר במיוחד ובולט לעין שהוא לא מכיל נוסחאות כלל: לא כתובות בו המשוואות או ההצגות הפרמטריות של המישורים, אין הצגות פרמטריות של ישרים, אין פתרון מערכת משוואות וכדומה. הנטייה הטבעית של כל מעריך, שמכיר את הפתרון הסטנדרטי, אשר מופיע גם במחווין, היא: לדחות פתרון אשר לא מכיל חישובים! ההתרשמות הראשונית שלי היתה: הרבה מלל ותשובה נכונה. לא פעם אחת ראינו פתרונות לא נכונים עם תשובות נכונות. (דוגמה אחת מיני רבות:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right) = a - b$$

התחלתי לקרוא את הפתרון בעיון רב. הנקודות (0,3,-1) ו-(0,0,0) נמצאות על ג- π_1 ו- π_2 מאישור yz ואכן מאשרות את הישר l_1 .

בטענה זו התלמיד, למעשה, כבר מגלה ראייה מרחבית, חשיבה אנליטית ויכולת לקרוא ולנתח נתונים וכמו-כן להסיק מסקנות נכונות. למעשה בשלב זה התלמיד חסך לעצמו מספר שלבים בפתרון הסטנדרטי, הרי בדרך אלגברית הוא היה יכול למצוא את משוואתו של המישור ולאחר מכן למצוא את ההצגה פרמטרית של הישר l_1 כישר החיתוך בין שני מישורים. התלמיד המשיך בשלו ועבר לישר l_2 .

כיוון ש- l_2 הוא ישר החיתוך בין π_2 למישור xy הוא מוכל כולו מאישור xy מאשרה שהישר l_2 נחתך (הכוונה של התלמיד לישרים l_1 ו- l_2) נקודת המפגש שלהם צריכה להיות על ציר ה- y . כי הוא מהווה את ישר החיתוך של המישורים xy ו- yz .

מהפתרון של התלמיד ברור שהוא מבין שישר l_1 שייך למישור yz והישר l_2 שייך למישור xy . ישר החיתוך של שני מישורים אלה הינו ציר ה- y , לכן אם הישרים נחתכים אז רק על ציר ה- y ! נקודת החיתוך של l_1 עם ציר ה- y היא (0,0,0).

שימו לב, שתלמיד מצא את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y בלי לדעת את ההצגה הפרמטרית של הישר l_2 . הפתרון הינו פשוט, אלגנטי ויצירתי! נזכור כי בזמן הבחינה רוב התלמידים נמצאים תחת לחץ ומעדיפים להימנע מניתוח נתונים וחיפוש אחר דרכים לא שגרתיות. פתרון אלגברי נתפס אצלם (ולא רק אצל תלמידים) כדרך הבטוחה יותר. לעומת זאת התלמיד ממשיך להפתיע בקבלת החלטות וכמו במשחק שח בוחר את המהלכים הכי טובים.

l_2 לא עברה ג- $(0,0,0)$ כי המקרה כלל הנקודה (0,0,0) הייתה שייכת ל- π_2 מה שסותר את הפתרון (קיומו של ישר חיתוך סותר את קיום שני מישורים זהים).

במקרה זה למישורים π_1 ו- π_2 היו שלוש נקודות משותפות וכנובע מכך המישורים היו מתלכדים, אך בנתון צוין שקיים ישר חיתוך בין שני מישורים. כאן התלמיד למעשה משתמש באלגנטיות ב"הוכחה בדרך שלילה": נניח ישר l_2 עובר דרך נקודה (0,0,0). הנחה זו מביאה אותנו לסתירה עם הנתונים ולכן ההנחה הינה שגויה והישר לא עובר דרך הנקודה (0,0,0).

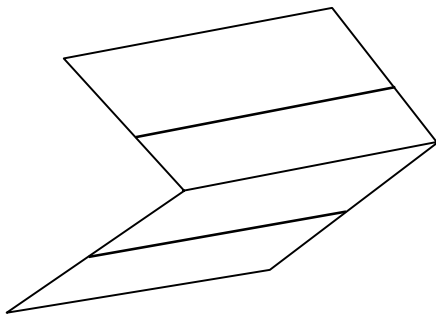
אכן הישרים לא נחתכים (ולא מתלכדים כמו בן!)

התלמיד סיים את ההכנה וניגש לשאלה שנשאלת בבעיה: "מהו המצב הדדי בין הישרים l_1 ו- l_2 ?" הוא צמצם את מספר האפשרויות מארבע לשתיים. המצבים היחידים האפשריים כאן הם: הקבלה או הצטלבות.

המורה וישרים מקבילים אל שניהם אמורים להיות מקבילים לישר החיתוך בין המישורים שהוא ציר ה- y .

התלמיד שוב משתמש בדרך שלילה: נניח שהישרים l_1 ו- l_2 מקבילים זה לזה. כיוון שהם נמצאים במישורים שונים π_1 ו- π_2 הנחתכים זה עם זה, הרי כדי להיות מקבילים עליהם להיות מקבילים לישר החיתוך ביניהם. בדרך אינטואיטיבית (או לא!) התלמיד נעזר במשפט:

שני ישרים אשר שייכים לשני מישורים שונים והנחתכים, מקבילים זה לזה אם ורק אם הם מקבילים לישר החיתוך בין שני המישורים.



l_1 נחתך עם ציר ה- y (הוא עובר דרך הנקודה (0,0,0)) ואכן הישרים לא מקבילים. אם הישרים לא נחתכים ולא מקבילים הם חייבים להיות מצטלבים ואכן הישרים l_1 ו- l_2 מצטלבים.

בהוכחה כולה היו בסך הכל שבעה משפטים ואף לא חישוב או נוסחה אחת. כמו שצינתי קודם לקח לי

כאחת. אם אנחנו, אנשי מקצוע יכולים להבין למה התכוון המחבר, אינני בטוח שילדים יסיקו מסקנות נכונות וילמדו מהוכחה זו.

סיכום

איזה פתרון יועדף על ידי המורים? ואיזה יועדף על ידי התלמידים? אני מאמין שלשאלות אלו יהיו תשובות מגוונות מאוד. מעניין לשמוע את דעתם של מעריכי בחינות בגרות. איזה פתרון מעדיפים הם במבחנים שעליהם לבדוק?

לי אישית הפתרון של התלמיד גרם סיפוק והנאה. אודה למחברי ספרי בגרות ומתכונת לרבות פתרונות.

בגרות קיץ תשס"ז - 2006 - מועד ב' - 007 - אלי מיטב - 052-2671210

$\pi_1: ax + by + cz + d = 0$

$(0,0,0) \Rightarrow d=0$, $(0,3,-1) \Rightarrow 3b-c=0 \Rightarrow c=3b$

$(2,-1,2) \Rightarrow 2a-b+2c=0 \Rightarrow 2a-b+6b=0 \Rightarrow 2a=-5b$, $b=-2 \Rightarrow c=-6$, $a=5 \Rightarrow \pi_1: 5x-2y-6z=0$

$\pi_2: (0,3,-1) \Rightarrow 3b-c+d=0 \Rightarrow (I) d=-3b+c$

$(2,-1,2) \Rightarrow 2a-b+2c+d=0 \Rightarrow (II) d=-2a+b-2c$

$(1,3,1) \Rightarrow a+3b+c+d=0 \Rightarrow (III) d=-a-3b-c$

$(I), (II) \Rightarrow -3b+c=-2a+b-2c \Rightarrow 3c=-2a+4b \Rightarrow c=\frac{-2a+4b}{3}$

$(II), (III) \Rightarrow -2a+b-2c=-a-3b-c \Rightarrow c=-a+4b$

$\Rightarrow \frac{-2a+4b}{3}=-a+4b \Rightarrow -2a+4b=-3a+12b \Rightarrow a=8b$

$b=1 \Rightarrow a=8 \Rightarrow c=-8+4=-4 \Rightarrow (I) d=-3(-4)-4=-7$

$\Rightarrow \pi_2: 8x+y-4z-7=0$

$l_1: \pi_1: 5x-2y-6z=0, yz: x=0 \Rightarrow -2y-6z=0 \Rightarrow y=-3z, z=t \Rightarrow y=-3t$

$\Rightarrow l_1: \underline{x=0, -3t, t} = t(0, -3, 1)$, נקודה טיפוסית על הישר: $(0, -3t, t)$

$l_2: \pi_2: 8x+y-4z-7=0, xy: z=0 \Rightarrow 8x+y-7=0 \Rightarrow y=7-8x, x=s \Rightarrow y=7-8s$

$\Rightarrow l_2: \underline{x=s, 7-8s, 0} = (s, 7-8s, 0)$, נקודה טיפוסית על הישר: $(s, 7-8s, 0)$

אין תלות ליניארית בין וקטורי הכיוון של l_1 ושל l_2 אין סקלר k המקיים: $(1, -8, 0) = k(0, -3, 1)$.

מסקנה: הישרים אינם מקבילים ואינם מתלכדים.

בדיקת חיתוך: מחשואות רכיבי x ו- z של הנקודות הטיפוסיות $s=0, t=0$ נקבל

סתירה ברכיב $y: 0=7 \Rightarrow -3t-8s=0$ מסקנה: הישרים אינם נחתכים.

מסקנה: הישרים l_1 ו- l_2 מצטלבים.

נמחיש בציר:

xy הוא מישור יצפה, מישור זה מכיל את הישר l_2

yz הוא מישור קיר אנכי כמתאר. מישור זה מכיל את הישר l_1

אם הישרים נפגשים - הם יפגשו על קו החיתוך xy .

l_1 עובר דרך $(0,0,0)$ על קו החיתוך.

l_2 אינו עובר דרך $(0,0,0)$ על קו החיתוך.

לכן לישרים אלו אין נקודה משותפת מכאן שהם מצטלבים.

61

© הוצאת שושר - אלי מיטב - 052-2671210

כעשרים דקות לפענח את הפתרון. אפשר להעלות השערה כי התלמיד בעל ראיה מרחבית מצוינת, יכולות גבוהות של נימוק והסקת מסקנות.

ברור כי נהניתי לבדוק את השאלה. הצטערתי על כך שאין לי אפשרות לראיין את התלמיד ולדעת עוד עליו ועל פתרונו. שמחתי לבשר למעריכה שהפתרון של התלמיד היה מצוין. היא סיפרה שלקח גם לה זמן רב להעריך את הפתרון לשאלה וגם היא הגיעה לאותה מסקנה. אמרתי לה שאילו יכולתי להוסיף עוד נקודות לציון על מקוריות הייתי עושה זאת. אך בכך, כידוע, מעריכים מוגבלים וטוב שכך...

חלק 2. מתמטיקה ללא מילים!

התעניינתי לראות איך פתרו את התרגיל המובילים בתחום אשר עוסקים בהוצאת ספרי הכנה למבחני בגרות ההולכים ומתרבים בשוק משנה לשנה. באחד הספרים (באישורו של מר אלי מיטב מצורף פתרון שנמצא בספרו) מצאתי פתרון שעניין אותי מהסיבה ההפוכה: כמעט לא נמצאו בו מילים. בחלק הראשון של הפתרון היה זה פתרון אלגברי ואפשר לראות כאן שכעבור 12 שורות של חישובים הפותר הגיע למשוואות המישוריים:

$$\pi_1: 5x-2y-6z=0 \text{ ו- } \pi_2: 8x+y-4z-7=0$$

אחרי ארבע שורות נוספות של חישובים נמצאו כבר ההצגות הפרמטריות של הישרים l_1 ו- l_2 :

$$l_1: \underline{x=t(0, -3, 1)}, \quad l_2: \underline{x=s(1, -8, 0)}$$

בארבע השורות של בדיקת המצב הדדי בין הישרים מגיעים לתשובה הנכונה: ישרים מצטלבים. בהמשך הפתרון המחבר מציע המחשה בעזרת ציור.

הוא כותב:

$$xy \text{ הוא 'מישור' יצפה. מישור זה מכיל את הישר } l_2.$$

$$yz \text{ הוא מישור קיר אנכי כמתאר. מישור זה מכיל את הישר } l_1.$$

$$אם הישרים נפגשים - הם יפגשו על קו החיתוך (ציר ה-xy).$$

כאן מתבקשת השאלה: האם זו המחשה או פתרון נוסף?!

$$l_1 \text{ עובר דרך } (0,0,0) \text{ על קו החיתוך.}$$

$$l_2 \text{ אינו עובר דרך } (0,0,0) \text{ על קו החיתוך (מדוע?).}$$

אכן אישים אלו אין נקודה משותפת מכאן שהם מצטלבים. האם הישרים שאינם נפגשים הם בהכרח ישרים מצטלבים? כאן אנו רואים ניסיון המחשה המשולב עם הוכחה חלקית. אנחנו, אנשי חינוך מתמטי נושאים באחריות לניסוח מדויק של טענות, עובדות והוכחות