



הנושא: a^b או b^a מה גדול יותר? באיזה תנאי קיים שיוויון?

עלי עותמאן.

הוכן ע"י:

המחבר בוחן את החילופיות של פעולת החזקה ודן בשאלה מה גדול יותר: a^b או b^a . הדיון מתבצע תוך שימוש בשיקולים מתחומים שונים במתמטיקה: תורת המספרים, חקירת פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות וסדרות איטרטיביות ונקודות שבת.

תקציר:

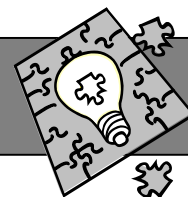
חקירה מתמטית, פתרון בעיות, פעולת החזקה, חילופיות, תורת המספרים, פירוק לגורמים ראשוניים, פונקציה, פונקציה מעריכית, פונקציה לוגריתמית, פונקציה עולה, פונקציה קמורה, מקסימום, סדרה, איטרציה, נקודת שבת, אינדוקציה.

מילות מפתח:

החומר פורסם במסגרת: עלי"ה 38, תשס"ז 2007, עמודים 56-58.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

בעיה לעניין



$$b^a \text{ או } a^b$$

מה גדול יותר? באיזה תנאי קיים שיוויון?

עלי עותמאן

alioi@macam.ac.il

אלקאסמי, מכללה אקדמית לחינוך, באקה אלגריביה

תקציר

במסגרת תכנית הלימודים אנו מגדירים את פעולת החזקה, פותרים משוואות מעריכיות, חוקרים פונקציות מעריכיות ופותרים אי-שיוויונים מעריכיים. המאמר מדגים איך שאלה מתמטית פשוטה מאוד יכולה להוביל לחקירה מתמטית רחבה. תוך כדי החקירה משערים השערות, מנהלים דיונים ומוכיחים הוכחות – פעילויות מועילות ותורמות למעשה הוראה ולמידה. במאמר זה נענה על שאלות אחדות הקשורות לפונקציות מעריכיות.

1. היות ופעולת החזקה היא פעולה אלגברית שאיננה חילופית שאלה מעניינת היא: מהי קבוצת הזוגות של מספרים טבעיים שעבורם הפעולה חילופית. נראה כי הקבוצה: $\{(4,2), (2,4)\}$ היא קבוצת הזוגות שעבורה פעולת ההעלאה בחזקה חילופית.

2. נמצא תנאי מספיק לקיום התנאי: $a^b > b^a$ עבור $a > b > 0$.

3. נציג שיטה איטרטיבית למציאת הפתרון של המשוואה $a^x = x^a$ עבור קבוע חיובי a השונה מ-1. השאלות עצמן נושאות אופי אלגברי. התשובות לשאלות מזמנות דיון אלגברי בצד הפעלת שיקולים מתחום החשבון הדיפרנציאלי.

$$a^b = b^a$$

כאמור, נחפש את כל הזוגות (a,b) של מספרים טבעיים עבורם $a > b$ וגם $a^b = b^a$. ידוע כי $4^2 = 2^4$, כלומר הזוג $(4,2)$ מקיים את התנאים. האם יש זוגות

נוספים? בסימונים של תורת הקבוצות עלינו למצוא במפורש את הקבוצה:

$$A = \{(a,b) : a > b; a^b = b^a, a, b \in \mathbb{N}\}$$

נניח כי $a^b = b^a$ וגם $a > b > 1$. לכן כל גורם ראשוני של a הוא גורם ראשוני של b . נניח כי הפירוק הקנוני של a הוא $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_j^{e_j}$. אז קיימים $t_1, t_2, \dots, t_j$ טבעיים כך ש- $b = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_j^{t_j}$.

לכן:

$$\Leftrightarrow p_1^{be_1} p_2^{be_2} \dots p_j^{be_j} = p_1^{at_1} p_2^{at_2} \dots p_j^{at_j} \Leftrightarrow a^b = b^a$$

$$\text{לכל } 1 \leq i \leq j \text{ מתקיים } e_i b = a t_i \Leftrightarrow e_i > t_i \Leftrightarrow \frac{e_i}{t_i} = \frac{a}{b} > 1$$

$$\text{מתקיים } 1 \leq i \leq j \text{ לכל } e_i > t_i \Leftrightarrow \frac{e_i}{t_i} = \frac{a}{b} > 1$$

$$\text{לכן } e_j - t_j \text{ נשים לב כי } \frac{a}{b} = p_1^{e_1-t_1} p_2^{e_2-t_2} \dots p_j^{e_j-t_j}$$

הוא מספר טבעי לכל $1 \leq i \leq j$. ולכן $\frac{a}{b}$ הוא מספר

טבעי. נסמן $\frac{a}{b} = m$ (m הוא מספר טבעי). מאחר ש-

$$a = mb \text{ אזי:}$$

$$a = b^m \Leftrightarrow a^b = (bm)^b \Leftrightarrow a^b = b^{mb} \Leftrightarrow a^b = b^a$$

$$\text{לכן } mb = b^m \text{ ולכן } b^{m-1} = m$$

המטרה שלנו היא למצוא את הערכים הטבעיים הגדולים מ-1, של b ו- m שעבורם קיים השוויון $b^{m-1} = m$.

$$1. \text{ נתחיל עם } b = 2. \text{ המשוואה היא } 2^{m-1} = m$$

אם $m = 2$ אז מתקיים $2^1 = 2$. כך מתקבל

הפתרון $b = 2, a = 4$, למשוואה $a^b = b^a$ (ואכן

$$4^2 = 2^4)$$

$$f'(x) = \frac{a}{x} - \ln a \quad \text{מתקיים:}$$

מקרה א

אם $0 < a < 1$ אז $\ln a < 0$ ולכן $f'(x) > 0$ לכל x . זאת אומרת ש: $f(x)$ פונקציה עולה. כך, מהתנאי: $b < a$ נובע: $f(a) > f(b)$. אבל $f(a) = 0$, לכן $f(b) < 0$. כלומר: $a \ln b < b \ln a$ ותנאי זה שקול ל- $a^b > b^a$.

מסקנה 1: אם $0 < b < a < 1$ אז $b^a < a^b$

מקרה ב

נניח כי $a > 1$. במקרה זה:

$$f'(x) = 0 \quad \text{כאשר:} \quad x_0 = \frac{a}{\ln a} \quad \text{אולם:}$$

$$x_0 = \frac{a}{\ln a} \quad \text{לכן הנקודה } x, \text{ שלילית לכל } x, \quad f''(x) = -\frac{a}{x^2}$$

היא נקודת מקסימום. בגלל הקעירות של הפונקציה $f(x)$ בכל תחום ההגדרה, x_0 היא נקודת מקסימום מוחלט.

לכן, הערך המקסימלי של $f(x)$ הוא:

$$M = \text{Max} f(x) = f\left(\frac{a}{\ln a}\right) = a \ln\left(\frac{a}{e \ln a}\right)$$

הסימן של M נקבע על-פי ערכו של $\frac{a}{e \ln a}$.

$$a = e \Leftrightarrow \frac{a}{e \ln a} = 1 \Leftrightarrow M = 0 \quad \text{ברור כי:}$$

(שים לב: $\ln a > 0$ כי $a > 1$)

לאילו ערכי a מתקיים $a > e \ln a$?

כדי לענות על השאלה, נגדיר פונקציה $g(x)$ באופן הבא:

$$g(x) = x - e \ln x$$

$$\text{לכן: } g'(x) = 1 - \frac{e}{x} \quad \text{ו-} \quad g''(x) = \frac{e}{x^2}$$

$$x = e \Leftrightarrow g'(x) = 0 \quad \text{בודאי מתקיים:}$$

מאחר ש- $g(x)$ קמורה אז ב- $x = e$ יש לה נקודת

מינימום מוחלט. אבל $g(e) = 0$ ולכן $g(x) > 0$ לכל

$$x > e \quad \text{לכן: לכל } 0 < x \neq e \quad \text{מתקיים } x > e \ln x.$$

מסקנה 2: לכל $0 < x \neq e$ מתקיים $x > e \ln x$

לכן: אם $a > 1$ אז $\text{Max} f(x) = M > 0$ והוא מתקבל

$$\text{בנקודה בה: } x_0 = \frac{a}{\ln a}$$

נסרטט את הגרף של $f(x)$ על-פי התוצאות שקיבלנו.

מצב I כאשר: $M = 0$

נוכיח באינדוקציה מתמטית, כי לכל $m > 2$ מתקיים $2^{m-1} > m$.

הוכחה:

בדיקה עבור $m = 3$: $2^2 > 3$.

הוכחת אפשרות המעבר: נניח כי עבור m טבעי מסוים מתקיים: $2^{m-1} > m$ ונוכיח כי מכן נובע: $2^m > m + 1$.

ואמנם: $2^m = 2 \cdot 2^{m-1} > 2m = m + m > m + 1$. אפשרות המעבר הוכחה, הבדיקה הצליחה, ולכן, לפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל m טבעי.

2. נוכיח כעת, שוב באינדוקציה מתמטית, שלכל $m \geq 2$ ולכל $b > 2$ מתקיים $b^{m-1} > m$.

הוכחה:

יהא $b > 2$. נבצע בדיקה עבור $m = 2$: $b^{2-1} > 2$ מתקיים.

נוכיח את אפשרות המעבר: נניח כי האי-שוויון נכון עבור m טבעי מסוים: $m \geq 2$, ונוכיח כי מכך נובעת נכונותו גם עבור $m + 1$. ואמנם:

$$b^{m+1-1} = b^m = b \cdot b^{m-1} > bm > 2m > m + 1$$

הבדיקה הצליחה, אפשרות המעבר הוכחה, ולכן, על-פי עקרון האינדוקציה המתמטית האי-שוויון מתקיים לכל $m \geq 2$ ולכל $b > 2$.

מ- (1) ו- (2) נוכל להסיק, כי הזוג: $m = 2$ ו- $b = 2$ הוא הפתרון היחיד של המשוואה $b^m = mb$. לכן אם $a > b > 1$ טבעיים אז בהכרח $a = 4$ ו- $b = 2$. כאשר מציבים במשוואה מקבלים שאכן $4^2 = 2^4$, לכן $a = 4$, $b = 2$ הוא הפתרון היחיד.

מה יותר גדול a^b או b^a ?

בסעיף זה נרצה לפתור את השאלה: בהינתן a ו- b שני מספרים חיוביים שונים, באילו מקרים $a^b > b^a$ ובאילו מקרים מתקיים האי-שוויון ההפוך?

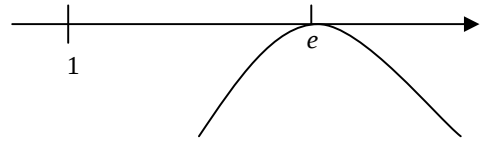
נניח כי $a > b > 0$. (נניח גם כי שניהם שונים מ-1 כי אם אחד מהם שווה ל-1 הבעיה פשוטה). נעיר כי, היות והפונקציה $f(x) = \ln x$ היא פונקציה עולה, מתקיים:

$$a^b > b^a \Leftrightarrow b \ln a > a \ln b \Leftrightarrow a \ln b - b \ln a < 0$$

נקבע את a וניתן ל- b להשתנות. נגדיר את הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 < x < a$ באופן הבא:

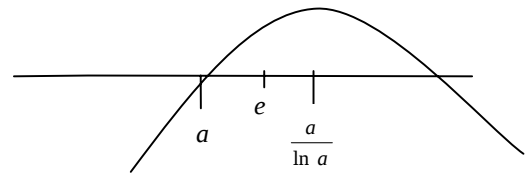
$$f(x) = a \ln x - x \ln a$$

הפונקציה $f(x) = a \ln x - x \ln a$ מתאפסת בשתי נקודות, באחת מהן: $x = a$.
מאחר ש- $f(1) = -\ln a < 0$ ו- $f(e) = a - e \ln a > 0$, אזי קיימת נקודה u כך ש- $1 < u < e$ וגם $f(u) = 0$.
לכן מתקיים: אם $u < b < a$ אז $b^a > a^b$ או $1 < b < u$ אז $b^a < a^b$ וכמו כן $a^u = u^a$.

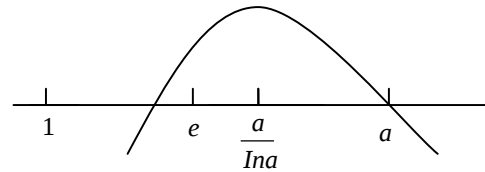


במקרה $M > 0$: נבחין בין שני מצבים:

מצב 2: $a < \frac{a}{\ln a}$ $[a < e \Leftrightarrow]$



מצב 3: $a > \frac{a}{\ln a}$ $[a > e \Leftrightarrow]$



לפי מצב 1 ($a = e$): לכל $0 < b \neq e$, מתקיים $f(b) < 0$ ותנאי זה שקול ל- $b^e < e^b$.

מסקנה 3: לכל $0 < b \neq e$ מתקיים $b^e < e^b$

לפי מצב 2: לכל $1 < x < a$ מתקיים $f(x) < 0$ ולכן $x^a < a^x$.

מסקנה 4: אם $1 < b < a < e$ אז $b^a < a^b$

משתי המסקנות (3) ו- (4) נסיק:

מסקנה 5: אם $1 < b < a \leq e$ אז $b^a < a^b$

שיטה איטרטיבית לפתרון של המשוואה $a^x = x^a$

נדון בהמצב 3: במקרה זה $a > e$.

איך לחשב את u ?

עבור $x > e$ נגדיר את הפונקציה $A(x)$ באופן הבא:

$$x^u = u^x \Leftrightarrow u = A(x) \quad x \neq u$$

נחקור את הפונקציה $A(x)$:

תחום ההגדרה של הפונקציה $A(x)$ הוא $\{x : x > e\}$. הפונקציה $A(x)$ מוגדרת היטב, כלומר לכל $x > e$, $A(x)$ קיים והוא יחיד.

כמו כן לכל $x > e$, מתקיים $1 < A(x) < e$, כלומר: התחום של $A(x)$ הוא $\{x : x > e\}$ והטווח הוא: $\{x : 1 < x < e\}$.

נגדיר: $g(u) = x \ln u - u \ln x$ (x קבוע ו- u המשתנה).

$$g'(u) = \frac{x}{u} - \ln x \quad \text{ו-} \quad g'(u) < x - \ln x < \frac{x}{e} - \ln x$$

ש- $x > e \ln x$, לכל $0 < x \neq e$ מתקיים, לפי מסקנה 3: $g'(u) > 0$ לכן $g(u)$ פונקציה עולה.

$$T(u) = -\frac{3}{4(x - \ln x)} \cdot g(u) + u \quad \text{נגדיר:}$$

פונקציה זו מקיימת:

$$1 > 1 - \frac{3}{4e} \left(\frac{x - e \ln x}{x - \ln x} \right) > T'(u) > 0$$

מאחר ש- $g(1) = -\ln x < 0$ וגם $g(e) = x - e \ln x > 0$

ובנוסף $T(u)$ עולה, אזי $T : [1, e] \rightarrow [1, e]$.

בודאי קיימת לפונקציה $T(u)$ נקודת שבת. נסמן אותה $A(x)$ אזי:

$$(A(x))^x = x^{A(x)} \Leftrightarrow g(A(x)) = 0 \Leftrightarrow T(A(x)) = A(x)$$

הסדרה המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה (סידרת האיטרציות):

$$u_0 = 2$$

$$u_{n+1} = T(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

היא סדרה מתכנסת וגבולה הוא $A(x)$.

ניתן לחשב את ערכי הפונקציה בקירוב ע"י שימוש במחשבון כיס.