



הנושא: תרומתו של אוילר להתפתחות תורת המספרים

הוכן ע"י: אלה שמוקלר.

תקציר: לרגל יום הולדתו ה-300 של ליאונרד אוילר, שנחשב לגדול המתמטיקאים בכל הדורות, נכתב המאמר, המכיל סקירה נרחבת על תרומתו בתחום תורת המספרים. המאמר מכיל גם הצעה לפעילות בכיתה בנושא: משפטי פרמה ואוילר. הפעילות מציגה לתלמידים קטע קריאה ומשימות מונחות.

מילות מפתח: היסטוריה של המתמטיקה, תורת המספרים, ליאונרד אוילר, מספרים ראשוניים, מספרים טבעיים, מספרים שלמים, מספרים זוגיים, מספרי פרמה, מספרי מרסן, מספר זוגי, השערת גולדבך, משפט פרמה, משפט אוילר, משוואות דיאופנטיות, חינוך מתמטי, קריאה, דרכי הוראה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 38, תשס"ז 2007, עמודים 6-14.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

300 שנה להולדת אוילר

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

תרומתו של אוילר להתפתחות תורת המספרים

אלה שמוקלר

shmukler@tx.technion.ac.il

הטכניון, חיפה

רקע היסטורי

המאה ה-18, בה פעל אוילר, שייכת לתקופה המוקדמת של העידן המודרני בהתפתחות תורת המספרים. תקופה זו החלה בעבודות של באשה (Claude Bachet, 1581-1665) ונמשכה אחרי אוילר אצל גאוס (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), אשר סיים את עיצובה של תורת המספרים כתורה מתמטית מודרנית. בשחר התפתחותה של תורת המספרים עבדו גם:

מרסן (Marin Mersenne, 1588-1684), גולדבך (Christian Goldbach, 1690-1764), וארינג (Edward Waring, 1734-1798), לגראנז' (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813), לז'נדר (Adrien Marie Legendre, 1752-1833) ועוד מתמטיקאים אחדים שתרמו תרומה משמעותית להתפתחות תורת המספרים.

יצירתו של אוילר בתחום תורת המספרים מהווה דוגמה משכנעת של רציפות ההתפתחות של תורות מתמטיות כאשר כל דור, בהתבססו על הישגי דורות קודמים, תורם תרומה משלו לפיתוח ולקידום של התורה. ברוח זו נציג בסעיף הבא סקר מרוכז של תרומתו של אוילר לתחום תורת המספרים.

כיווני הפעילות והישגיו של אוילר בתורת המספרים

- תורת המספרים עוסקת בחקר תכונות של מספרים שלמים. נביא מספר מושגי יסוד של תורה זו:
- מספר שלם הוא איבר בקבוצה: $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
- מספר טבעי הוא איבר בקבוצה: $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- מספר שלם a מתחלק במספר שלם b (או b מחלק את a) אם $a = q \cdot b$ כאשר q הוא מספר שלם.
- מספר שלם b נקרא המחלק של מספר שלם a אם a מתחלק ב- b .
- שני מספרים שלמים נקראים זרים זה לזה אם אין להם אף מחלק משותף למעט ± 1 .

ליאונרד אוילר (Leonhard Euler, 1707-1783), ביצירתו חסרת התקדים בהיקפה ובעוצמתה, תרם בזמנו תרומה משמעותית לכל ענף של המתמטיקה ושל יישומיה¹. תורת המספרים נמצאה במקום השלישי בסולם העדיפויות של אוילר בתחום המתמטיקה הטהורה, אחרי האנליזה והגיאומטריה. בתוך המכלול של 886 עבודות מדעיות של אוילר יותר מ-100 מוקדשות לתורת המספרים – עובדה מפתיעה לאור זאת שבתקופתו של אוילר מתמטיקאים רבים התאכזבו מתורת המספרים, כיוון שראו אותה כתחום סגור בתוך עצמו שאינו תורם לתחומי מתמטיקה אחרים. בניגוד לדעה זו, אוילר, שתפס את המתמטיקה כגוף אחד רב-תחומי, בו התחומים השונים מתקשרים זה לזה ומשפיעים זה על זה, ראה בתורת המספרים הן מקור לרעיונות ושיטות, שניתן ליישםם בתחומים שונים של המתמטיקה, והן כר נרחב לניסוי שיטות שפותחו בתחומים אחרים. גישה זו הוכיחה את עצמה, כאשר אוילר יישם שיטות מתחום האנליזה בתורת המספרים ובכך יזם את התפתחותו של מדור חדש בתורת המספרים הנקרא "תורת המספרים האנליטית".

תורת המספרים היא אחת התורות המתמטיות הקדומות ביותר. בתולדותיה בנות יותר מ-2500 שנה ניתן להבדיל בין שני עידנים: העידן הקלאסי והעידן המודרני [1]. בעידן הקלאסי (המאה ה-6 לפנה"ס – המאה ה-13 לסה"נ) מוקדי ההתפתחות של תורת המספרים היו, תחילה, במשך כאלף שנה, ביוון העתיקה ולאחר מכן בארצות האסלם, הודו וסין. במאה ה-16 עבר מרכז ההתפתחות של תורת המספרים לאירופה ובכך התחיל העידן המודרני בתולדותיה.

¹ גאוס שנולד זמן מה לפני פטירתו של אוילר (1777-1855), היה מתמטיקאי פורה במידה שניתנת להשוואה עם זו של אוילר.

- מספר שלם r הוא שארית של מספר שלם a מודולו m אם $a = q \cdot m + r$ כאשר q שלם, m טבעי ו- $0 \leq r < m$.
- מספרים שלמים a ו- b נקראים קונגרואנטיים מודולו m אם $a - b = q \cdot m$ כאשר q שלם ו- m טבעי. הסימון: $a \equiv b \pmod{m}$.
- מספר טבעי p הגדול מ-1 נקרא מספר ראשוני אם הוא מתחלק רק ב-1 וב- p .
- מספר טבעי n הגדול מ-1 אשר אינו מספר ראשוני נקרא מספר פריק.

1. נוסחאות המחוללות מספרים ראשוניים

בתקופת אוילר חוקרי תורת המספרים התעניינו מאוד במציאת תבניות שערכיהן הם מספרים ראשוניים בלבד. פרמה טען כי כל המספרים מהצורה $2^{2^n} + 1$ עם $n = 1, 2, 3, 4$ טבעי הם מספרים ראשוניים. אכן עבור $n = 1, 2, 3, 4$ מתקבלים המספרים הראשוניים: 5, 17, 257, 65537. בשנת 1732 אוילר הוכיח כי המספר המתקבל עבור $n = 5$ כלומר $2^{32} + 1$ מתחלק ב-641 ולכן אינו מספר ראשוני אלא מספר פריק. נהוג לסמן $2^{2^n} + 1 = F_n$. ולקרא למספרים אלה מספרי פרמה. בעקבות אוילר מתמטיקאים רבים בדורות הבאים חקרו את מספרי פרמה מבחינת פריקותם. כתוצאה מכך, בזמננו ידוע כי כל המספרים F_n עבור $5 \leq n \leq 32$ הם מספרים פריקים. השאלות הפתוחות הן: האם קיימים מספרי פרמה ראשוניים למעט הארבעה הנ"ל ואם כן, מה מספרם והאם הוא סופי או אינסופי?

תבנית אחרת הקשורה ליצירת מספרים ראשוניים היא $M_p = 2^p - 1$ כאשר p מספר ראשוני. למספרים אלו קוראים מספרי מרסן לכבודו של המתמטיקאי הצרפתי של המאה ה-17 מרסן והתעניינותו הרבה בהם. בסוף המאה ה-16 היה ידוע כי הנוסחה $2^p - 1$ מחוללת מספרים ראשוניים עבור $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$. בשנת 1772 אוילר גילה את מספר מרסן הראשוני הבא, עבור $p = 31$. עד שנת 2006 התגלו 44 מספרי מרסן ראשוניים. הגדול שביניהם מתאים ל- $p = 32582657$. אוילר התעניין בנוסחאות פולינומיות המחוללות מספרים ראשוניים. בפרט, הוא חקר בקפדנות את הפולינום $P(n) = n^2 + n + 41$. עוד בתקופות הקודמות לתקופת אוילר רווחה הדעה כי פולינום זה מקבל ערכים ראשוניים בלבד. בשנת 1772 הראה אוילר כי אין זה נכון. אכן, עבור $n = 0, 1, 2, \dots, 39$ מתקבלים

ברצף ערכים ראשוניים אבל $P(40) = 41^2$ ו- $P(41) = 41 \cdot 43$ אינם מספרים ראשוניים. מעניין שהערך הבא $P(42) = 1847$ הוא שוב מספר ראשוני. לפולינום $P(n) = n^2 + n + 41$ קוראים "פולינום אוילר".

במכתביו של אוילר ובעבודותיו יש דוגמאות נוספות של פולינומים המחוללים עוד מספרים ראשוניים רבים. יחד עם זאת, כפי שהוכיחו אוילר וגולדבך, לא קיים פולינום $P(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_k n^k$ עם מקדמים שלמים, אשר ערכו עבור כל n טבעי הוא מספר ראשוני. בעקבות תגלית זו חקירת פולינומים כמייצרי מספרים ראשוניים התמקדה בחיפוש הפולינומים המייצרים רצף של ערכים ראשוניים ככל שיותר ארוך. התוצאה הטובה ביותר שהצליחו לקבל בכיוון זה עד סוף המאה ה-20 בין הפולינומים ממעלה שנייה, ניתנת על ידי הפולינום $Q(n) = 36n^2 - 810n + 2753$, אשר מקבל ערכים ראשוניים ברצף עבור $n = 1, 2, 3, \dots, 45$.

יחד עם זאת קיימות תבניות (לא פולינומיות) אשר מייצרות רק מספרים ראשוניים (לא כולם!). כך, בשנת 1947 נתגלה כי קיים מספר חיובי r עבורו כל ערכי התבנית $f(n) = \lfloor r^{3^n} \rfloor$ הם מספרים ראשוניים $\lfloor x \rfloor$ מסמן חלק שלם של x).

לבסוף נציין, כי לא ידועה, וכנראה שלא קיימת, תבנית אחת המתארת את כל המספרים הראשוניים ורק אותם.

2. הצגת מספרים טבעיים כסכום מחוברים ראשוניים (השערת גולדבך)

הבעיה המפורסמת הידועה בשם "השערת גולדבך" נולדה בהתכתבות בין גולדבך ואוילר בקיץ 1742. הניסוח המקובל של השערה זו הוא: "כל מספר טבעי זוגי החל במספר 4 ניתן להציג כסכום של שני מספרים ראשוניים". למשל,

$$14 = 3 + 11, 26 = 7 + 19, 94 = 5 + 89, 100 = 3 + 97$$

אוילר בעצמו לא ניסה, משום מה, להוכיח או להפריך את הטענה הזאת. המאמצים של המתמטיקאים בדורות הבאים עוד לא הביאו לפתרון השלם של הבעיה. במאה ה-20 הצליחו להוכיח כי השערת גולדבך נכונה כמעט לכל המספרים הזוגיים אבל עוד לא ברור אם היא נכונה בשלמותה, כלומר לכל המספרים הזוגיים החל ב-4, או לפחות נכונה חלקית קרי לכל המספרים הגדולים ממספר מסוים.

3. שאריות מעריכיות והכללת משפט פרמה הקטן

פרמה ניסח את המשפט הידוע בשם "משפט פרמה הקטן" אשר (בסימונים מקובלים כעת) טוען:

אם p מספר ראשוני ו- a מספר שלם אשר זר ל- p כלומר אינו כפולה של p אזי $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

למשל, אם $p = 7$ ו- $a = 4$ אזי

$$a^{p-1} = 4^6 = 4096 = 585 \times 7 + 1 \equiv 1 \pmod{7}$$

פרמה, לפי הרגלו, לא הציג את הוכחת המשפט. אוילר הביא שתי הוכחות למשפט זה. אחת מתבססת על התכונות של מקדמי בינום והשנייה – על התכונות של שאריות בחילוק החזקות $a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1}$ במספר p . לשאריות אלה קוראים שאריות מעריכיות. בנוסף, אוילר הוכיח, כי אם p ראשוני ועבור איזשהו k טבעי הקטן מ- $p-1$ מתקיים $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ אזי בהכרח k הוא מחלק של $p-1$. לאחר מכן הגדיר אוילר את המושג 'השורש הפרימיטיבי' עבור מספר ראשוני:

מספר שלם נקרא שורש פרימיטיבי עבור מספר ראשוני p אם התנאי $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ אינו מתקיים עבור אף k טבעי הקטן מ- $p-1$. לאור התוצאה שהוזכרה לעיל המספר a שאינו מתחלק במספר ראשוני אי-זוגי p הוא שורש פרימיטיבי עבור p אם ורק אם התנאי $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ אינו מתקיים עבור אף k טבעי אשר קטן מ- $(p-1)$ ומחלק את $(p-1)$. למשל, עבור $p = 7$ המספר $a = 3$ הוא שורש פרימיטיבי כי בחילוק ב-7 של החזקות $a^1 = 3, a^2 = 9, a^3 = 27$ אף פעם לא מתקבלת שארית 1. לעומת זאת המספר $a = 2$ אינו שורש פרימיטיבי עבור $p = 7$ כי $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$. אוילר הוכיח כי עבור כל מספר ראשוני p קיים שורש פרימיטיבי.

תוך כדי חקירתו של משפט פרמה הקטן, הגיע אוילר להכללה הבאה הידועה בשם "משפט אוילר":

יהי m מספר טבעי כלשהו ויהי a מספר שלם כלשהו אשר זר ל- m . אם $\phi(m)$ מסמן את מספר כל המספרים הטבעיים הקטנים מ- m אשר זרים ל- m , אזי מתקיים:

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

אם $m = p$ ראשוני, אזי $\phi(m) = p-1$ ולכן משפט פרמה הוא השלכתו המיידית של משפט אוילר או, במילים אחרות, משפט אוילר הוא הכללתו של משפט פרמה הקטן.

דוגמא

יהי $m = 8$. המספרים הטבעיים הקטנים מ-8 זורים לו הם: 1, 3, 5, 7. לכן $\phi(m) = 4$.

לפי משפט אוילר $a^4 \equiv 1 \pmod{8}$ עבור כל a שלם אשר זר ל-8 קרי כל מספר אי-זוגי. ואכן: $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{8}$ וגם $5^4 = 625 = 624 + 1 = 78 \times 8 + 1 \equiv 1 \pmod{8}$ וכדומה.

4. שאריות ריבועיות

מספר שלם נקרא שארית ריבועית מודולו ראשוני p אם קיים מספר שלם x כך שמתקיים: $x^2 \equiv a \pmod{p}$. למשל, $a = 4$ הוא שארית ריבועית מודולו $p = 7$ כי $2^2 = 4 \equiv 4 \pmod{7}$. לעומת זאת, המספר $a = 3$ אינו שארית ריבועית מודולו $p = 7$ כי אין אף x בין $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ עבורו מתקיים: $x^2 \equiv 3 \pmod{7}$. אוילר גילה קריטריון בעזרתו ניתן לקבוע אם מספר נתון הוא שארית ריבועית מודולו p נתון או לא.

קריטריון השארית הריבועית של אוילר

יהי p מספר ראשוני אי-זוגי. מספר שלם a הוא שארית ריבועית מודולו p אם ורק אם מתקיים:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

למשל, עבור $p = 7, a = 4$ מתקיים: $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$ כאשר $3^3 = 27 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}$. לפי קריטריון אוילר, $a = 4$ הוא שארית ריבועית מודולו 7 ו- $a = 3$ אינו שארית ריבועית מודולו 7. מסקנות אלה תואמות את המסקנות שהתקבלו לעיל על סמך ההגדרה של שארית ריבועית.

תגלית חשובה נוספת של אוילר לגבי שאריות ריבועיות קשורה לזוג של מספרים ראשוניים.

יהיו p, q שני מספרים אי-זוגיים ראשוניים שונים. ברור כי ייתכנו רק שני מקרים:

- לפחות אחד מהמספרים p, q הוא מהצורה $4n+1$.
- כל אחד מהמספרים p, q הוא מהצורה $4n+3$.

אוילר הוכיח כי במקרה א' המספר p הוא שארית ריבועית מודולו q אם ורק אם q הוא שארית ריבועית מודולו p . במקרה ב' – להפך, המספר p הוא שארית ריבועית מודולו q אם ורק אם q אינו שארית ריבועית מודולו p . לחוקיות זו קוראים "חוק ההדדיות הריבועית" של אוילר. למשל, יהי $p = 7, q = 3$.

כפי שראינו קודם המספר $q=3$ אינו שארית ריבועית מודולו $p=7$. היות ולמספרים $p=7$ ו- $q=3$ מתקיים מקרה ב', לפי חוק ההדדיות של אוילר מסיקים כי המספר $p=7$ הוא שארית ריבועית מודולו $q=3$; ואכן, $2^2 = 4 \equiv 7 \pmod{3}$.

עבור $p=5$, $q=3$, מתקיים מקרה א'. קל לבדוק כי 3 אינו שארית ריבועית מודולו 5. לפי חוק ההדדיות הריבועית של אוילר גם 5 אינו שארית ריבועית מודולו 3.

המתמטיקאי הצרפתי לג'נדר, מהדור הבא אחרי אוילר, המציא סמלים (אינדקסים, סימנים) אשר הקלו בהרבה על שימוש בתוצאות אוילר לגבי שאריות ריבועיות.

5. פונקציות חשבוניות

להכללת משפט פרמה הקטן, אוילר הגדיר פונקציה $\varphi(n)$ של משתנה טבעי n באופן הבא: $\varphi(1)=1$, ואם $n \geq 2$ אזי הערך של $\varphi(n)$ הוא המספר של כל המספרים הטבעיים בקטע $[1, n-1]$ אשר זרים ל- n . למשל, $\varphi(15)=8$ כי בין 1 לבין 14 יש 8 מספרים אשר זרים ל-15, דהיינו 1,2,4,7,8,11,13,14.

לפונקציה $\varphi(n)$ קוראים כעת פונקציית אוילר והיא אחת הפונקציות המעתיקות את קבוצת המספרים הטבעיים לתוך קבוצת המספרים השלמים:

$f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$. לפונקציות כאלה קוראים פונקציות חשבוניות (אריתמטיות). אוילר פיתח נוסחה לחישוב ערכי $\varphi(n)$. דהיינו, אם $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ כאשר p_j מספרים ראשוניים שונים, α_j מספרים טבעיים,

אזי $\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$. למשל,

היות ו- $n=15=3 \cdot 5$, לפי הנוסחה דלעיל מקבלים: $\varphi(15) = 15 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8$

התקבל קודם על פי ההגדרה של פונקציית אוילר. דוגמא נוספת: $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ולכן

$\varphi(72) = 72 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24$ לפי תוצאה זו, בין 1

לבין 71 יש סה"כ 24 מספרים זרים ל-72. ברור כי במקרה זה, חישוב לפי הנוסחה הרבה יותר קצר מאשר על פי הגדרת הפונקציה $\varphi(n)$, דרך איתור של כל המספרים הזרים ל-72 בקטע $[1, 71]$.

6. מספרים מיוחדים

מספר טבעי n נקרא מספר משוכלל אם הוא שווה לסכום כל מחלקיו הטבעיים הקטנים ממנו.

למשל, $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$. לכן 6 ו-28 הם מספרים משוכללים. המספרים המשוכללים הבאים הם 496 ו-8128. ארבעת המספרים האלה מוכרים כמספרים משוכללים עוד מהזמן העתיק. אוקלידס הוכיח כי אם p ראשוני ו- $2^p - 1$ ראשוני, אזי המספר $2^{p-1}(2^p - 1)$ הוא מספר משוכלל. אוילר הוכיח את המשפט ההפוך: כל מספר זוגי משוכלל הוא בהכרח מספר מהצורה $2^{p-1}(2^p - 1)$ עם p ראשוני ו- $2^p - 1$ ראשוני. ממשפטים אלה נובע כי עם מציאת מספר זוגי משוכלל חדש נמצא בו-זמנית גם מספר מרסן ראשוני חדש ולהפך. היות והמספר $2^{31} - 1$ התגלה כמספר ראשוני על ידי אוילר, המספר $2^{30}(2^{31} - 1)$ נקרא המספר המשוכלל של אוילר. הוא נשאר המספר המשוכלל הגדול ביותר במשך יותר מ-150 שנה. בסוף המאה ה-20 התחיל "ציד" נמרץ של מספרי מרסן הראשוניים עקב ניצולם להצפנת מידע. בתחילת המאה ה-21 היו ידועים 40 מספרי מרסן הראשוניים, כאשר הגדול שביניהם, מספר מרסן הראשוני ה-40 שווה ל- $2^{220996011} - 1$ ומכיל יותר מ-שישה מיליון ספרות (בבסיס עשר).

שני מספרים נקראים מספרים ידידים או נעים או נאהבים אם כל אחד מהם הוא סכום של כל המחלקים הטבעיים של השני הקטנים מהשני. הזוג הקטן ביותר של מספרים ידידים הוא (220, 284). בתקופת אוילר היו ידועים בנוסף לזוג זה עוד שני זוגות של מספרים ידידים: (17296, 18416) ו-(9363584, 9437056). אוילר גילה יותר מ-60 זוגות של מספרים ידידים. עד היום התגלו בעזרת מחשבים יותר מ-50,000 זוגות של מספרים כאלה.

לאוילר שייכת זכות הגילוי של סדרת מספרים פנטגוניים (מחומשים) $\frac{n(3n-1)}{2}$ אשר בהמשך מצאו ישום חשוב בקומבינטוריקה ובתורת הפונקציות האליפטיות.

7. משוואות דיאופנטיות

למשוואות דיאופנטיות מוקדשות עבודות רבות של אוילר בתורת המספרים. בשנת 1770 הוא הוכיח את משפט פרמה הגדול עבור $n=3$. אוילר חקר והציג בשנת 1759 פתרון שלם של המשוואה $x^2 - ay = 1$ המבוסס על פיתוח $\sqrt{a}$ לשבר משולב. הוא הוכיח כי את המשוואה הדיאופנטית ממעלה שנייה מהצורה הכללית: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

ניתן להביא לצורה קנונית $u^2 - av^2 = b$. הוא קישר את פתרון המשוואה האחרונה, ובכך את פתרון המשוואה הכללית, לפתרון המשוואה $x^2 - ay^2 = 1$ אשר נקראה על ידי בשם "משוואת פל". משוואה זו נחקרה חלקית עוד במאה ה-7 על ידי המתמטיקאי ההודי ברחמגופטה. אוילר הציע נוסחה למציאת כל הפתרונות של המשוואה $u^2 - av^2 = b$. החקירה של נוסחה זו בוצעה בהמשך על ידי לגרנז'.

8. תבניות ריבועיות

תבנית ריבועית בתורת המספרים פירושה ביטוי מהצורה $ax^2 + 2bxy + cy^2$ כאשר כל המשתנים והמקדמים הם מספרים שלמים. לפרמה שייכות הטענות הבאות: כל מספר ראשוני מהצורה $8n+1$ או $8n+3$ ניתן להציג על ידי התבנית $x^2 + 2y^2$ וכל מספר ראשוני מהצורה $3n+1$ ניתן להציג על ידי התבנית $x^2 + 3y^2$, אף מספר ראשוני מהצורה $3n-1$ אינו מוצג על-ידי התבנית הזאת. פרמה גם קבע כי כל מספר ראשוני מהצורה $4n+1$ (ורק מצורה זו) ניתן להציג כסכום של שני ריבועים. אוילר ולגרנז' הוכיחו את הטענות האלה. אוילר הוכיח, כי אם ניתן להציג כל אחד משני מספרים כסכום של ארבעה ריבועים, אזי גם מכפלתם ניתנת להצגה כזו. תוך שימוש בתוצאה זו, לגרנז' הוכיח בשנת 1770 כי כל מספר טבעי ניתן להצגה כסכום של ארבעה ריבועים (ביניהם יכולים להיות ריבועים שווים ואפסים). באותה שנה 1770 – המתמטיקאי האנגלי אדוארד וארינג טען (ללא הוכחה) כי ניתן להציג כל מספר טבעי כסכום של 9 חזקות שלישיות, של 19 חזקות ריבועיות וכך הלאה. בכלל, כל מספר טבעי ניתן להציג כסכום של m חזקות k -יות כאשר m תלוי רק ב- k . טענה זו ידועה בהיסטוריה של המתמטיקה בשם "השערת וארינג". היא הוכחה על ידי הילברט בשנת 1909.

9. שיטות אנליטיות

אוילר היה הראשון שהשתמש בשיטות אנליטיות בתורת המספרים ובכך פתח מדור חדש בתורת המספרים הנקרא 'תורת המספרים האנליטית'. הכלים האנליטיים האהובים עליו היו מכפלות אינסופיות וטורי חזקות. הוא פיתח את הזהות: $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots$ כאשר מעריכי החזקות באגף הימין משתנים לפי החוק

$$\frac{n(3n-1)}{2} \text{ עבור } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

על סמך זהות זו אוילר קיבל את נוסחת הנסיגה עבור סכום המחלקים הטבעיים של מספר טבעי n . דהיינו אם $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} - S_{n-5} - S_{n-7} + \dots$: סכום כזה אזי :
למשל : $S_6 = S_5 + S_4 - S_1 = (1+5) + (1+2+4) - 1 = 12$
 $S_6 = 1+2+3+6 = 12$ ואכן :

כמו כן פיתח אוילר את הזהות :

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\dots = 1 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots$$

כאשר

$$A_1 = x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$A_2 = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + \dots$$

$$A_3 = x^6 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + \dots$$

⋮
⋮

על סמך פיתוח זה, אוילר פתר את בעיית החלוקה (partition problem) : בכמה דרכים שונות ניתן להציג מספר טבעי m כסכום של n מחוברים לא שווים? את התשובה לשאלה זו ניתן לקבל מהפיתוח דלעיל. דהיינו כל איבר $k \cdot x^m$ של טור A_n עם $n \geq 2$ נושא מידע : מספר כל הייצוגים השונים של מספר m כסכום של n מחוברים שונים שווה ל- k .

למשל, האיבר $3x^8$ בטור A_2 מודיע כי המספר 8 ניתן להצגה כסכום של שני מחוברים שונים ב-3 דרכים, והאיבר $2x^8$ מהטור A_3 מוסר מידע כי אותו מספר 8 ניתן להצגה כסכום של שלושה מחוברים שונים ב-2 דרכים. ואכן :

$$8 = 1+7 = 2+6 = 3+5$$

$$8 = 1+2+5 = 1+3+4$$

10. התפלגות מספרים ראשוניים

בין כל הזהויות המכילות טורים אינסופיים שפותחו על ידי אוילר, הזהות המפורסמת ביותר היא :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

כאשר s מסמן מספר ממשי קבוע, n מקבל את כל הערכים הטבעיים, ו- p מקבל את כל הערכים הטבעיים הראשוניים. לזהות זו קוראים *זהות אוילר*. לפיה, הטור, המופיע באגף שמאל, והמכפלה, המופיעה באגף ימין, מתכנסים בו-זמנית לערכים סופיים שווים או מתבדרים בו-זמנית, כלומר מקבלים ערך אינסופי. אם $s=1$, הטור באגף השמאל הופך לטור ההרמוני אשר סכומו הוא אינסוף. המכפלה באגף ימין במקרה בו

האפסים הלא-ממשיים של $\zeta(s)$ במישור המרוכב נמצאים על הישר $x = \frac{1}{2}$. השערה זו לא הוכחה ולא

הופרכה עד היום, למרות המאמצים של מתמטיקאים גדולים בכל הדורות אחרי רימן. מאמצים אלה הביאו להישגים משמעותיים ולהתקדמות ניכרת בכיוון הפתרון של השערת רימן. קיימת הסכמה מלאה בקהילה המתמטית העולמית, כי השערת רימן בדבר המיקום של האפסים של פונקציית זיטא היא הבעיה הפתוחה החשובה ביותר במתמטיקה היום.

כך התגלית על ידי אוילר של הזהות המיוחדת העניקה לתורת המספרים שתי סגולות: משפט המספרים הראשוניים והשערת רימן המהווה אתגר האתגרים לדורות המתמטיקאים.

ההשלכות של יצירת אוילר לחינוך מתמטי

לפי עדויות עמיתיו ותלמידיו של אוילר, הוא היה מורה מצוין, אהב להסביר וניחן בכושר הסבר מדהים. על כך מעידים גם ספרים שכתב בתחומים שונים של המתמטיקה, בהם החומר מוגש באופן שיטתי ובצורה ברורה ובהירה ביותר. ספרים אלו שימשו ספרי לימוד לדורות לומדי המתמטיקה הגבוהה, עליהם התבססו גם ספרי לימוד רבים שנכתבו בזמן יותר מאוחר. העובדות שגילה ותיאר אוילר והמושגים והמונחים שהגדיר בתחומי מתמטיקה שונים, שבחלקם היה בין המייסדים – כגון אנליזה, חשבון וריאציות, משוואות דיפרנציאליות, טופולוגיה, קומבינטוריקה, פונקציות מרוכבות – נעשו "הקלאסיקה" של המתמטיקה ונכנסו לקורסים מתמטיים באוניברסיטאות ומכללות. משפט אוילר, נוסחת אוילר, משוואת אוילר, זהות אוילר, שיטת אוילר – מונחים אלו ורבים אחרים המשלבים את שמו של אוילר, מבוטאים על ידי דורות של תלמידי המתמטיקה הגבוהה ברחבי העולם.

לעומת זאת, בבתי ספר על-יסודיים כמעט ולא נשמע השם של אוילר, אם כי גם המתמטיקה הבית-ספרית מכילה לא מעט עובדות, מושגים וסימונים אשר מקורם בעבודות של אוילר, כמו המספר e ולוגריתם טבעי, המספר המדומה i , הסימון $f(x)$ עבור פונקציה, הסימון המקוצר עבור פונקציות טריגונומטריות ועוד. מצב זה נגרם על-ידי הזנחת הפן ההיסטורי בהוראת המתמטיקה בבית הספר התיכון.

גם במעמדה של תורת המספרים יש הבדל בין ההשכלה המתמטית הגבוהה לבין החינוך המתמטי העל-יסודי.

$s=1$ הופכת ל- $\left(\frac{1}{1-p_1^{-1}}\right)\dots\left(\frac{1}{1-p_K^{-1}}\right)$ כאשר K

מסמן את מספר כל המספרים הראשוניים. הערך הזה שווה לאינסוף אם ורק אם $K = \infty$. לכן מזהות אוילר עבור $s=1$ נובע משפט אוקלידס על האינסופיות של קבוצת המספרים הראשוניים.

אוילר התעניין בשאלת האופי של ההתפלגות של המספרים הראשוניים בתוך קבוצת הטבעיים. הוא העלה השערה, כי בכל סדרה חשבונית אינסופית $a + b \cdot n$ ($n=1,2,3,\dots$) עם a, b זרים, יש אינסוף מספרים ראשוניים. השערה זו הוכחה בשנת 1837 על ידי המתמטיקאי הגרמני דיריכלה (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859) על סמך השיטות האנליטיות של אוילר.

במכתב לגולדבך באוקטובר 1752 אוילר ניסח מספר שיקולים לגבי סדר הגודל של הפונקציה $\pi(x)$ המסמנת את מספר כל המספרים הראשוניים בקטע $[1, x]$. המתמטיקאי הצרפתי לגנדר היה הראשון שהתחיל בלימוד השיטתי של פונקציה זו והמשיכו בו המתמטיקאים הגרמניים גאוס ורימן (Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866). בשנת 1896 המטיקאי הבלגי ולה פוסין (Charles Jean de La Vallée Poussin, 1866-1962) והמתמטיקאי הצרפתי הדמר (Jacques Salomon Hadamard, 1865-1963) הוכיחו, בו-זמנית ובאופן בלתי תלוי, תוך שימוש בתוצאות קודמיהם ובניצול כלים מתמטיים חדשים של זמנם, כי :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

זהו משפט המספרים הראשוניים. ממשפט זה נובע כי עבור n טבעי מספיק גדול קיימים כ- $\left\lfloor \frac{n}{\ln n} \right\rfloor$ מספרים ראשוניים הקטנים מ- n .

נציין כי בזהות אוילר שהובאה בתחילת סעיף זה, הופיעה, לראשונה במתמטיקה, הפונקציה

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

"פונקציית זיטא של רימן". רימן היה הראשון שגילה קשר מפליא בין ההתפלגות של מספרים ראשוניים בקבוצת המספרים הטבעיים לבין התפלגות האפסים של הפונקציה $\zeta(s)$ במישור המרוכב. רימן העלה מספר השערות ביחס להתפלגות האפסים של פונקציית זיטא. אחת מהן, הידועה בשם 'השערת רימן', טוענת כי כל

פרמה לא השאיר אחריו את הוכחת המשפט, ולמרות שטובי המתמטיקאים בכל הדורות אחרי פרמה ניסו להוכיחו, המשפט הוכח בשלמותו רק בסוף המאה ה-20. משפט זה ידוע בשמות "משפט פרמה האחרון" ו-"משפט פרמה הגדול". השם הראשון קשור לכרונולוגיה של משפטי פרמה והוכחותיהם ואילו השם השני משקף את המעמד המיוחד של המשפט בהיסטוריה של המתמטיקה. בצל שם זה, משפט אחר של פרמה בתורת המספרים, שהוכחתו לא עוררה קשיים מיוחדים, מכונה בשם "משפט פרמה הקטן", אם כי הוא משפט חשוב בתורת המספרים, היות ויש לו השלכות ויישומים משמעותיים ומעניינים. אנחנו נגיע לניסוח המשפט הזה דרך דוגמאות מתאימות.

תחילה נגדיר מושגי יסוד אחדים. מספר טבעי הוא אחד מהמספרים $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ ומספר ראשוני הוא מספר טבעי הגדול מ-1 אשר, בקבוצת מספרים טבעיים, מתחלק ללא שארית רק בעצמו וב-1. לפי הגדרה זו עשרת המספרים הראשוניים הראשונים הם

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

כפי שהוכיח המתמטיקאי היווני המפורסם אוקלידס במאה הרביעית לפנה"ס, קיימים אינסוף מספרים ראשוניים. החיפוש אחרי מספרים ראשוניים לא מוכרים נמשך עד עצם היום הזה ומתבצע באמצעות מחשבים רבי עצמה. להלן נעסוק רק במספרים טבעיים ובראשוניים שביניהם.

יהי p מספר ראשוני כלשהו ו- a מספר טבעי הקטן מ- p . נתבונן ב- p חזקות ראשונות של a ונציג כל אחת ככפולה מרבית של p ושארית שהיא מספר טבעי הקטן מ- p . להלן רשימה של הפעולות האלו המתבצעות עבור $p = 7$ ו- $a = 2, 3, 4, 5, 6$. התוצאות של החישובים מוצגות בטבלאות להלן

$a = 2,$	$a = 3,$
$a^2 = 4,$	$a^2 = 9 = 1 \times 7 + 2,$
$a^3 = 8 = 1 \times 7 + 1,$	$a^3 = 27 = 3 \times 7 + 6,$
$a^4 = 16 = 2 \times 7 + 2,$	$a^4 = 81 = 11 \times 7 + 4,$
$a^5 = 32 = 4 \times 7 + 4,$	$a^5 = 243 = 34 \times 7 + 5,$
$a^6 = 64 = 9 \times 7 + 1,$	$a^6 = 729 = 104 \times 7 + 1,$
$a^7 = 128 = 18 \times 7 + 2$	$a^7 = 2187 = 312 \times 7 + 3$

עשרת הנושאים שהוצגו לעיל מהווים בסיס הקורס של תורת המספרים האלמנטארית, שהוא קורס חובה לפרחי ההוראה. אבל הוא נמצא מחוץ למסגרת של הוראת המתמטיקה בתיכון. מצב זה מעציב ומצער היות ולתורת המספרים יכולה להיות תרומה משמעותית להתפתחות המתמטית של תלמיד התיכון, הודות למצב הייחודי שלה כלפיו. מצד אחד, המספרים השלמים אשר מהווים את נושא תורת המספרים, מוכרים היטב לתלמידי תיכון, והם מסוגלים להבין ולהפנים את החלק הניכר של שיטות ועובדות בתחום תורת המספרים האלמנטארית.

מצד שני, לתורת המספרים יש פוטנציאל חינוכי גדול, כי למידה בה עשויה לשפר את פיתוח החשיבה המתמטית אצל הלומד ולהעניק לו הרגלי תרבות ראווה ואינטואיציה הולמת בתחום המתמטיקה.

לאור הנ"ל מאוד רצוי לשלב פריטים מתורת המספרים האלמנטארית בחינוך המתמטי העל-יסודי. אפשר לשלב עשייה מתמטית מתחום תורת המספרים בבית-הספר התיכון למשל באירועים בית ספריים כגון ימים או שבועות של מתמטיקה, תחרויות, פרויקטים אישיים וכדומה. על המורה להתאים את החומר המוגש לרמה ולידע של התלמידים.

הצעה לפעילות

לסיום מובאת כאן דוגמא לעיבוד של נושא מסוים בתורת המספרים לרמה של תלמיד תיכון ממוצע. מוצע כאן קטע קריאה בצד הנחיות לעבודה וחשיבה. הקורא יוכל לשפוט באיזו מידה הושגה המטרה. הנושא שנבחר הוא משפטי פרמה ואוילר בדבר שאריות מעריכיות ויישומם.

משפטי פרמה ואוילר על שאריות מעריכיות ויישומם

במחצית הראשונה של המאה ה-17 בעיר טולוז (Toulouse) שבדרום צרפת חי ועבד פייר פרמה (Pierre Fermat, 1601-1665). הוא היה משפטן תרתי משמע: כעורך דין במקצועו היה קשור למשפטים ציבוריים וכחובבן גדול של המתמטיקה התעניין במשפטים מתמטיים, שברובם הוקדשו לנושאים מתורת המספרים. באחד מהמשפטים בהם עסק פרמה הפרידו 350 שנה בין הניסוח להוכחה. דהיינו באמצע המאה ה-17 הצהיר פרמה כי עבור כל מספר טבעי, n , הגדול מ-2, למשוואה $x^n + y^n = z^n$ לא קיים פתרון (x, y, z) שהוא שלשה של מספרים שלמים שונים מ-0.

גדול בין הגדולים בכל הדורות אחריו. הוא יצר מספר ענק של דברים חשובים במתמטיקה וביניהם הכללת משפט פרמה. ננסה לשחזר את מחשבותיו לגבי תנאי משפט פרמה הקטן:

"אם p מספר ראשוני אזי $p-1$ הוא מספר כל המספרים הקטנים ממנו. מספרים אלה זרים ל- p , במובן שאין לכל אחד מהם ול- p אף מחלק משותף טבעי למעט 1. גם a נמצא באותו יחס של זרות עם p . מה יקרה אם נחליף במשפט פרמה מספר ראשוני p במספר טבעי m כלשהו, את המספר $p-1$ נחליף במספר k של כל המספרים הטבעיים הקטנים מ- m אשר זרים ל- m , ובהתאם לשינויים אלה נדרוש כי a יהיה זר ל- m ?"

אווילר חקר את השאלה והוכיח כי יש לה תשובה חיובית, כלומר נכון המשפט הבא:

משפט אוילר

יהי m מספר טבעי כלשהו ויהי a מספר טבעי אשר זר ל- m כלומר ל- m ו- a אין אף מחלק משותף טבעי למעט 1. יהי k מספר כל המספרים הטבעיים הקטנים מ- m אשר זרים ל- m . אזי בחילוק של מספר a^k במספר m בהכרח מתקבלת שארית 1.

דוגמא

ניקח $a = 35$, $m = 12$. מספרים אלה זרים זה לזה. בין המספרים הקטנים מ- m נציין את אלה שזרים ל- m : 1, 5, 7, 11. לכן $k = 4$. נחשב ונציג בעזרת המחשבון:

$$a^k = 35^4 = 1500625 = 125052 \cdot 12 + 1$$

רואים כי עבור המספרים $a = 35$, $m = 12$ טענת משפט אוילר אכן מתקיימת.

משימה 3. בדקו את נכונות משפט אוילר עבור מספרים a, m שונים העומדים בתנאי המשפט.

משימה 4. הראו כי משפט פרמה הקטן נובע ממשפט אוילר.

לאור הטענה שבמשימה האחרונה, אין צורך בהוכחה נפרדת של משפט פרמה הקטן. יש להוכיח את משפט אוילר ולקבל את משפט פרמה הקטן כהשלכתו. לצערנו אין באפשרותנו לדון כאן בהוכחת משפט אוילר. היא מובאת בכל ספר לימוד המוקדש ליסודות תורת המספרים, ולהבנתה דרושים רצון טוב ומאמצים סבירים. בהצלחה לאמיצים!

$a = 5,$ $a^2 = 25 = 3 \times 7 + 4,$ $a^3 = 125 = 17 \times 7 + 6,$ $a^4 = 625 = 89 \times 7 + 2,$ $a^5 = 3125 = 446 \times 7 + 3,$ $a^6 = 15625 = 2232 \times 7 + 1,$ $a^7 = 78125 = 11160 \times 7 + 5$	$a = 4,$ $a^2 = 16 = 2 \times 7 + 2,$ $a^3 = 64 = 9 \times 7 + 1,$ $a^4 = 256 = 36 \times 7 + 4,$ $a^5 = 1024 = 146 \times 7 + 2,$ $a^6 = 4096 = 585 \times 7 + 1,$ $a^7 = 16384 = 2340 \times 7 + 4$
$a = 6,$ $a^2 = 36 = 5 \times 7 + 1,$ $a^3 = 216 = 30 \times 7 + 6,$ $a^4 = 1296 = 185 \times 7 + 1,$ $a^5 = 7776 = 1110 \times 7 + 6,$ $a^6 = 46656 = 6665 \times 7 + 1,$ $a^7 = 279936 = 39990 \times 7 + 6$	

כשמשווים את כל הפיתוחים בטבלאות לעיל, רואים שיש להם תכונה משותפת אחת: השארית בשורה שלפני האחרונה היא 1 ובשורה האחרונה היא a . משפט פרמה הקטן טוען, כי מצב זה תקף עבור כל p ראשוני וכל a שלם שאינו כפולה של p . בניסוח המשפט להלן נסתפק ב- a טבעיים.

משפט פרמה הקטן

יהי p מספר ראשוני כלשהו ויהי a מספר טבעי שאינו כפולה של p . אזי בחילוק המספר $b = a^{p-1}$ ב- p מתקבלת שארית 1.

משימה 1. בדקו את תקפות המשפט עבור זוגות של מספרים a, p מתאימים.

משימה 2. הסבירו מדוע נחוץ התנאי ש- a אינו כפולה של p .

במתמטיקה כל משפט מאומת על ידי הוכחתו. מדוע? כי אף אם נביא מספר גדול מאוד של דוגמאות פרטיות התואמות את טענת המשפט, תמיד נשאר ספק שאולי קיימת דוגמא נוספת הסותרת אותה. לא נביא כאן הוכחה למשפט פרמה הקטן מהסיבה שתתברר בהמשך.

כ-106 שנה לאחר הולדתו של פייר פרמה, בעיר בזל (Basel) שבשווייץ נולד ליאונרד אוילר (Leonhard Euler, 1707-1783) שהיה, לימים, מתמטיקאי גדול ונשאר

בהסתמך על משפטי פרמה ואוילר ניתן לענות על שאלות מעניינות לגבי רישום עשרוני והתחלקות מספרים טבעיים. נביא שתי דוגמאות לכך.²

דוגמא 1

ידוע כי a מספר טבעי חד-ספרתי וכי המספר a^9 מסתיים ב-7. מהו a ?

פתרון

ניקח $m = 10$. מהנתון נובע כי המספר a אינו 2 ואינו 5. לכן a זר ל-10. בין המספרים הקטנים מ-10 המספרים הזרים ל-10 הם: 1, 3, 7, 9. לכן $k = 4$. לפי משפט אוילר, בחילוק של מספר a^4 ב-10 מתקבלת שארית 1. זה אומר כי המספר $b = a^4$ מסתיים בספרה 1. לכן גם הריבוע של מספר זה $b^2 = a^8$ מסתיים ב-1. לכן המספר a^9 יסתיים ב-7 אם ורק אם $a = 7$. בכך, התשובה לשאלה היא: $a = 7$.

דוגמא 2

איזו שארית מתקבלת בחילוק של 7^{402} ב-101?

פתרון

המספר 101 הוא מספר ראשוני. לפי משפט פרמה הקטן, בחילוק המספר 7^{100} ב-101 מתקבלת שארית 1. מכאן נובע כי בחילוק 7^{400} ב-101 גם מתקבלת שארית 1. היות ו- $7^2 = 49$, בחילוק המספר 7^{402} ב-101 מתקבלת שארית 49. תשובה: השארית המבוקשת היא 49.

דיון – התאמת הנושא לבית-הספר העל-יסודי

התאמתו של הנושא הנבחר לרמת התיכון מבוצעת באופן הבא:

- בסיסי החזקות נחשבים מספרים טבעיים, אם כי המשפטים תקפים גם עבור בסיסים שלמים.
- המשפטים אינם מוכחים, אלא מודגמים במספר רב של דוגמאות.
- הצגת החומר מתבססת לא על מושג הקונגרואנציה, אשר חדש לתלמיד התיכון, אלא על המושג המוכר לו היטב, שהוא שארית בחילוק מספרים טבעיים.
- בניסוח משפט אוילר משתמשים בתיאור המילולי של פונקציית אוילר ולא בסימון המיוחד שלה.

בסיום סעיף זה נעיר הערה חשובה: אין לאסור על התלמיד להשתמש במחשבון בזמן ביצוע משימות מסוג

² דוגמאות 1, 2 ורשימת בעיות נוספות, נלקחו מהמקור [5]

אלה המובאות ברשימת בעיות נוספות. להפך, כדאי להמליץ לו לשלב מחשבון בחישובים. אבל יש לדאוג שאופי המשימות יהיה כזה, שכדי להתמודד איתן, התלמיד ייאלץ, לא רק להיעזר במחשבון, אלא גם "להפעיל את הראש" קרי לבצע תהליך של חשיבה מתמטית.

רשימת בעיות נוספות

לסיכום נביא רשימת בעיות נוספות שניתן לפתור אותן על סמך משפט פרמה הקטן ומשפט אוילר:

1. הוכיחו כי השארית בחילוק: $2^{18} + 3^{18} + 4^{18} + 5^{18} + 6^{18}$ ב-7 היא 5.
2. הוכיחו כי המספר $73^{12} - 1$ מתחלק ב-105 ללא שארית.
3. הוכיחו כי המספר $13^{176} - 1$ מתחלק ב-89 ללא שארית.
4. הוכיחו כי המספר $3^{100} - 3^{60} - 3^{40} + 1$ מתחלק ב-77 ללא שארית.
5. הוכיחו כי המספר: $1 + 2^{19} + 4^{19} + 5^{19} + 7^{19} + 8^{19}$ מתחלק ב-9 ללא שארית.
6. הוכיחו כי המספר $1 + 3^{14} + 7^{14} + 9^{14}$ מסתיים ב-0.
7. מהן שתי ספרות אחרונות ברישום עשרוני של המספר 19^{321} ?
8. מהן שתי ספרות אחרונות ברישום עשרוני של המספר 131^{161} ?
9. מהי השארית בחילוק המספר $3^{200} + 7^{200}$ ב-101?
10. מהי השארית בחילוק המספר $7^{65} + 11^{65}$ ב-80?

מקורות

1. ד. מ. ברטון. תורת המספרים האלמנטרית. האוניברסיטה הפתוחה, 2003
2. J.C.Abbot, editor. The Chauvenet Papers v.2. MAA, 1978
3. A.P. Yushkevich, editor. The History of Mathematics v.3. "Nauka", Moscow, 1972 (in Russian)
4. G.E.Andrews. Euler's Pentagonal Number Theorem. Mathematics Magazine : Vol.56, No.5, pp.279-284, 1983
5. <http://www.eunnet.net./books/numbers/text/18.html>