



הנושא: מה לומדים כאשר משנים את נקודת המבט על חתך של חרוט?

הוכן ע"י: נורית זהבי, גיורא מן, נח דנא-פיקארד.

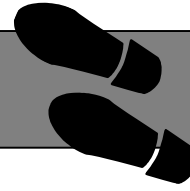
תקציר: במאמר מוצגת חקירה של חתכי החרוט באמצעות תוכנה סימבולית-גרפית (מסוג הנקרא Computer Algebra System). החקירה מתבצעת באופן אנליטי מאוחד בחתכי החרוט באמצעות זוויות ראייה, טיפול שאינו מוכר בגישה המסורתית. בסיום מובא דיון באפשרויות המתמטיות והדידקטיות המתפתחות ביחד עם התפתחות היכולת של הלומד להיעזר בתוכנה סימבולית-גרפית.

מילות מפתח: חקירה מתמטית, חתכי חרוט, תוכנה סימבולית גרפית, הוראה בשילוב מחשב, גיאומטריה אנליטית, הנדסה אנליטית, מעגל, אליפסה, פרבולה, היפרבולה, זווית ראייה, משיק, אסימפטוטה, אקסצנטריות, מקום גיאומטרי, ידע אופרטיבי, תובנה.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 38, תשס"ז 2007, עמודים 22-31.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 10 עמודים.

חקירה מתמטית



מה לומדים כאשר משנים את נקודת המבט על חתך חרוט?

נח דנא-פיקארד

dana@jct.ac.il
ביה"ס הגבוה לטכנולוגיה, ירושלים

גיאורא מן

gioramann@013.net
בית חנן

נורית זהבי

nurit.zehavi@weizmann.ac.il
מכון ויצמן למדע

בטכנולוגיה לטיפול אנליטי מאוחד בחתכי החרוט באמצעות זוויות ראייה, טיפול שאינו מוכר בגישה המסורתית. נעסוק בפרבולה, אליפסה והיפרבולה, כאשר במקרה האחרון מחכות לנו תוצאות מפתיעות. בסעיף המסכם נדון באפשרויות המתמטיות והדידקטיות המתפתחות ביחד עם התפתחות היכולת של הלומד להיעזר בתוכנה סימבולית-גרפית.

משיקים לפרבולה

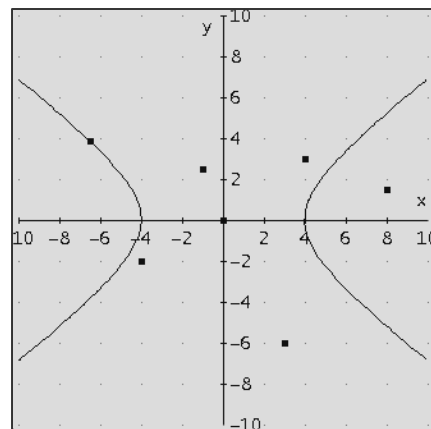
נפתח בשאלה הבסיסית: כמה משיקים לפרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ עוברים דרך נקודה T ששעיורה (X, Y) ? תהיה $y = m(x - X) + Y$ משוואת ישר (שאינו מקביל לציר ה- y) דרך הנקודה T . תנאי הכרחי ומספיק לכך שהישר ישיק לפרבולה הוא שלמערכת המשוואות $\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = m(x - X) + Y \end{cases}$ יהיה פתרון יחיד. על-ידי הצבה במקום y במשוואת הפרבולה נקבל משוואה ריבועית עבור x :

$$m^2 x^2 + (-2Xm^2 + 2Ym - 2p)x + (X^2 m^2 - 2XYm + Y^2) = 0$$

פתרונות המשוואה הריבועית תלויים כמובן בדיסקרימיננטה שלה, $8Xm^2 p + 4p^2 - 8Ymp$, שהיא ביטוי ריבועי עבור m . הערך של m הוא שיפוע של משיק לפרבולה אם ורק אם הדיסקרימיננטה מתאפסת. ניעזר בתוכנה היודעת לבצע חישובים סימבוליים כדי לפתור את המשוואה $8Xm^2 p + 4p^2 - 8Ymp = 0$ עבור הנעלם m . הדיסקרימיננטה של הטרינום באגף שמאל היא $Y^2 - 2Xp$. כאשר היא שלילית, אין פתרון ממשי

מבוא

- לפניכם היפרבולה ומספר נקודות במישור (איור 1). נסו לענות על השאלות הבאות:
- כמה משיקים להיפרבולה עוברים דרך נקודות שונות במישור?
 - האם שני משיקים העוברים דרך נקודה, משיקים לאותה זרוע של ההיפרבולה?
 - מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות דרכן עוברים שני משיקים המאונכים זה לזה?
 - מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות מהן רואים את ההיפרבולה בזווית חדה?



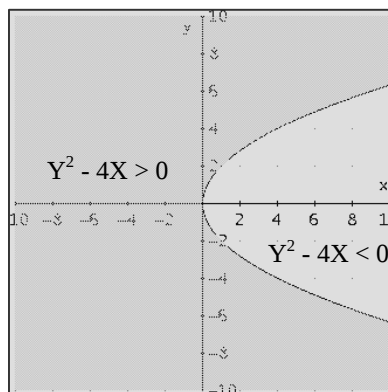
איור 1

נראה בהמשך כיצד תוכנה סימבולית-גרפית (מסוג הנקרא Computer Algebra System) מעודדת עיסוק בשאלות כאלה ויוצרת הזדמנויות להעזי ולשאל שאלות חקר בנושא מתמטי קלאסי, וגם לקבל תשובות מעוררות עניין להמשך החקירה. במאמר ניעזר

למשוואה הנ"ל, לכן אין משיק כלל דרך הנקודה T הנתונה. אם הדיסקרימיננטה מתאפסת, עובר משיק אחד דרך הנקודה T . כאשר הדיסקרימיננטה חיובית, עוברים שני משיקים דרך T . במקרה זה מקבלים:

$$m = \frac{Y + \sqrt{Y^2 - 2Xp}}{2X} \quad \text{או} \quad m = \frac{Y - \sqrt{Y^2 - 2Xp}}{2X}$$

נדגים זאת באיור 2 עבור $p = 2$



איור 2

אנו לא מופתעים לגלות שדרך כל נקודה על הפרבולה עובר משיק יחיד, בעוד ש"פנים" הפרבולה הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות דרכן אין עוברים משיקים כלל, ו"חוץ" הפרבולה הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות דרכן עוברים שני משיקים לפרבולה (הוא מופיע בצבע אפור באיור 2). אם כך – הפרבולה מחלקת את המישור לשלוש קבוצות זרות: הפרבולה עצמה, הפנים הקמור שלה והחוץ הקעור שלה.

לאחר שהתברר כי דרך כל נקודה בחוץ הקעור של הפרבולה עוברים שני משיקים, אפשר לשאול שאלות על הזווית בין שני המשיקים. למשל, באיזה תנאי שני המשיקים מאונכים זה לזה? לשם כך נחזור לשני השיפועים שקיבלנו קודם, אשר מתאימים לישרים מאונכים אם, ורק אם, מכפלתם שווה (-1) .

$$m_2 = \frac{Y + \sqrt{Y^2 - 2Xp}}{2X} \quad \text{ו-} \quad m_1 = \frac{Y - \sqrt{Y^2 - 2Xp}}{2X}$$

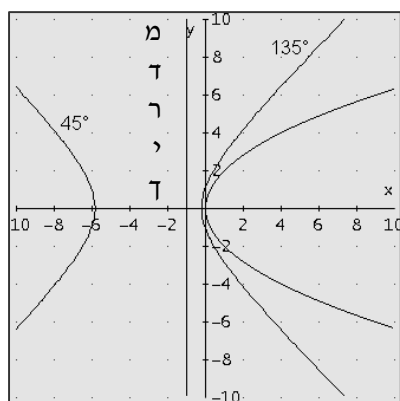
פשוט המשוואה $m_1 \cdot m_2 = -1$ נותן $X = -\frac{p}{2}$.

במילים אחרות, המקום הגיאומטרי של הנקודות דרכן עוברים משיקים מאונכים לפרבולה הוא המדריך של הפרבולה. טבעי כעת לשאול (אם כי לא כל כך ברור שנקבל "תשובה יפה") מה עם זוויות אחרות? למשל מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות דרכן עוברים משיקים היוצרים זווית בת 45° ? ניעזר בנוסחה עבור טנגנס זווית בין שני ישרים:

הצורה: $\frac{2\sqrt{Y^2 - 2Xp}}{2X + p} = \tan(\theta)$ עבור $p = 2$ ו-

$\theta = 45^\circ$ נקבל: $\frac{\sqrt{Y^2 - 4X}}{X + 1} = 1$. אם נשרטט, בעזרת

תוכנה היודעת לשרטט עקומות המוגדרות על-ידי משוואות הנתונות בצורה סתומה, את הגרף של מקום גיאומטרי זה נקבל עקומה הנראית כמו זרוע אחת של היפרבולה (הזרוע הימנית באיור 3 הנמצאת בחצי המישור מימין למדריך ומחוץ לפרבולה). מסתבר שהזווית החדה בין המשיקים היא 45° , אבל אם מתבוננים בשני המשיקים כקרניים, אז הזווית ביניהם היא 135° מעלות כפי שמצוין בציור – נסו לצייר את המשיקים. ואם היינו מחליפים את ערך הטנגנס ב- (-1) היינו מקבלים משהו הנראה כמו הזרוע השמאלית של ההיפרבולה (באיור 3).



איור 3

נוכל לאשר שהמקום הגיאומטרי ממנו רואים את הפרבולה בזוויות של $45^\circ/135^\circ$ הוא אכן היפרבולה;

אם נעלה בריבוע ונפשט את הביטוי $\frac{\sqrt{Y^2 - 4X}}{X + 1} = 1$,

נקבל משוואה של היפרבולה קנונית (שוות שוקיים) שהזזה שלוש יחידות שמאלה: $(X + 3)^2 - Y^2 = 8$.

אם נחזור למשוואה הכללית $\frac{2\sqrt{Y^2 - 2Xp}}{2X + p} = \tan(\theta)$

ונבצע מניפולציות אלגבריות נקבל משוואת היפרבולה ("תשובה יפה"). אכן קשר מעניין ולא מוכר בין פרבולות והיפרבולות!

m של ישר בעל משוואה $y = m(x - X) + Y$ העובר דרך נקודה T ששעוריה (X, Y) כדי שיהיה משיק לאלליפסה. הפעם לא נבצע הצבה במקום y במשוואת האליפסה, אלא נשתמש בניסיון שרכשנו בזמן עבודתנו על הפרבולה כדי לבקש מהתוכנה לפתור את מערכת המשוואות על-ידי התוכנה ואז לקבוע את התנאי לכך שיהיה לה פתרון יחיד. בשני הפתרונות המתקבלים עבור נקודות החיתוך של האליפסה והישר נזהה את הביטוי הריבועי עבור m הנמצא בתוך סימן השורש (הדיסקרימיננטה), ונבדוק עבור אילו ערכי m הוא מתאפס: $-X^2k^2m^2 + 2XYk^2m - Y^2k^2m^2 + 1 = 0$.

$$m = \frac{\sqrt{X^2 - Y^2k^2 - 1} + XYk}{k(1 - X^2)} \text{ או } m = \frac{\sqrt{X^2 - Y^2k^2 - 1} - XYk}{k(1 - X^2)}$$

(נציין כאן כי שהשימוש בתוכנה מביא אותנו לגילוי זה של הדיסקרימיננטה, כאשר עבודה ידנית דורשת שנחשב את הדיסקרימיננטה **תחילה** ונקיים דיון על הסימן שלה.)

עתה נוכל לברר, כמו שעשינו לגבי הפרבולה, מה מספר המשיקים דרך נקודה T נתונה. הביטוי הקובע הוא כמובן $X^2 + Y^2k^2 - 1$. דרך כל נקודה על האליפסה שמשוואתה $X^2 + Y^2k^2 - 1 = 0$ עובר משיק יחיד. פנים האליפסה הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות דרכן אין עוברים משיקים כלל, וחץ האליפסה הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות דרכן עוברים שני משיקים לאלליפסה.

נמשיך בחקירה ונברר עבור $k = 2$ מהו המקום הגיאומטרי של נקודות דרכן עוברים זוגות של משיקים מאונכים לאלליפסה. נרשום את השיפועים שקיבלנו:

$$m_2 = \frac{\sqrt{X^2 + 4Y^2 - 1} + 2XY}{2(1 - X^2)}, \quad m_1 = \frac{\sqrt{X^2 + 4Y^2 - 1} - 2XY}{2(1 - X^2)}$$

פשוט המשוואה $m_1 \cdot m_2 = -1$ נותן $\frac{4Y^2 - 1}{4(X^2 - 1)} = -1$

נשרטט את הגרף. הוא נראה כמו מעגל עם "חורים" בנקודות אשר שיעור ה- x שלהן הוא 1 או (-1) (איור 5). הסבר לחורים יכול להתקבל מהתבוננות במכנה של הביטוי שאת הגרף שלו שרטטנו. ואולם הנקודות המחוררות גם הן שייכות למקום הגיאומטרי מאחר שדרך כל אחת מהן עובר משיק המקביל לציר ה- y (נזכיר כי משוואת הישר שרשמנו בהתחלת הדיון אינה כוללת ישרים מקבילים לציר ה- y). לאחר שבררנו את תופעת ה"חורים" נבדוק שאכן המקום הגיאומטרי הוא מעגל; על-ידי "כפל במכנה" מתקבלת משוואת מעגל: $X^2 + Y^2 = 1.25$. מעגל זה, אשר מכל נקודה עליו

(נציין כאן שאם היינו מתחילים עם זווית של 135° היינו מקבלים תחילה את הזרוע השמאלית, וההעלאה בריבוע הייתה מכניסה את הזרוע הימנית.)

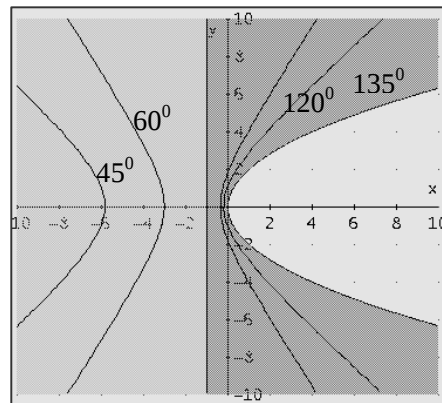
באיור 4 הוספנו לשרטוט את המקום הגיאומטרי ממנו רואים את הפרבולה (כאשר $p = 2$) בזוויות של $60^\circ/120^\circ$, שהוא היפרבולה שמשוואתה: $3X^2 + 10X - Y^2 + 3 = 0$, המתקבלת על-ידי פשוט המשוואה $\frac{Y^2 - 4X}{(X + 1)} = 3$. נשים לב לקשר בין המונה

של המשוואה האחרונה ומשוואת הפרבולה ששרטטנו ולקשר בין המכנה למשוואת המדריך לפרבולה זו. אם נסמן באופן כללי, על-ידי t , את ריבוע הטנגנס של זווית הראייה של הפרבולה בנקודה בעלת שיעורים (X, Y) :

$$\frac{Y^2 - 4X}{(X + 1)^2} = t, \text{ נוכל לראות בצורה דינמית (בעזרת}$$

התוכנה) כי עבור $t = 0$ מתקבלת הפרבולה עצמה ועבור ערכי t הולכים וגדלים ההיפרבולה מתקרבת לישר המדריך.

תופעה מעניינת נוספת עולה מאיור 4. האזור בצד של המדריך שאינו מכיל את הפרבולה הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור מהן רואים את הפרבולה בזווית חדה, ואילו האזור בין המדריך לפרבולה הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור מהן רואים את הפרבולה בזווית קהה. ניתן להוכיח זאת בעזרת שיקול גיאומטרי פשוט של זווית חיצונית למשולש.



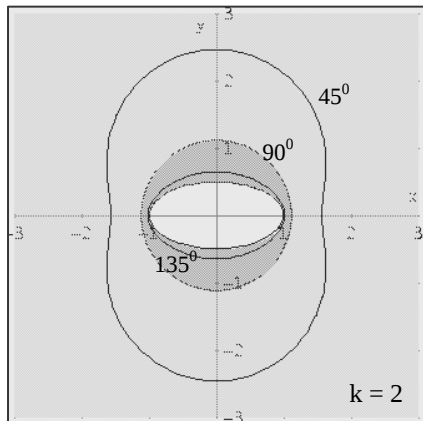
איור 4

רואים אליפסה

התוצאות המעניינות שהתקבלו לגבי משיקים לפרבולה מכוונות אותנו לחקירה דומה לגבי אליפסה. בלי הגבלת הכלליות נוכל להתייחס לאלליפסה שמשוואתה $x^2 + k^2y^2 = 1$ ($k > 0$). נבדוק את התנאי על השיפוע

$k = 2$ ונשרטט את העקומות המתארות את המשוואות הבאות (איור 7):

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \tan(45^\circ) \text{ ו- } \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \tan(135^\circ)$$



איור 7

על-ידי פישוט המשוואה המתארת את המקום הגיאומטרי של הנקודות מהן רואים את האליפסה בזווית של 45° והעלאה בריבוע מתקבלת המשוואה

$$\frac{16(X^2 + 4Y^2 - 1)}{(4X^2 + 4Y^2 - 5)^2} = 1 \text{ . שוב נשים לב לקשר בין המונה}$$

של המשוואה האחרונה למשוואת האליפסה הנתונה ולקשר בין המכנה למשוואת המעגל המדריך של האליפסה. מניפולציות נוספות של המשוואה יתנו משוואה פולינומאלית, דו-ריבועית, אשר מתארת את זוג העקומות המהוות את המקום הגיאומטרי של הנקודות מהן רואים את האליפסה בזווית של $45^\circ/135^\circ$:

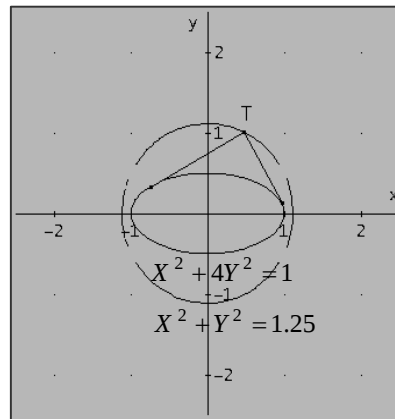
$$16X^4 + 32X^2Y^2 - 56X^2 + 16Y^4 - 104Y^2 + 41 = 0$$

נזכור ש- $\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ$. לכן ההעלאה בריבוע שבצענו מביאה לנו משוואה המתארת, בו זמנית, את המקומות הגיאומטריים המתאימים לשתי הזוויות האלה. בנוסף, ניתן לבדוק שהגרף המתקבל הוא איחוד של שתי עקומות זרות, כלומר בלי נקודות חיתוך, אחת מהן בתוך המעגל המדריך, והשנייה מחוצה לו, כצפוי (ראו איור 7).

עקומות כאלה אינן מוכרות לנו מתכנית הלימודים המסורתית ולכן מעוררות את סקרנותנו לגבי תכונותיהן הגרפיות והאנליטיות. נוכל לרשום משוואה פרמטרית של זוג העקומות עבור אליפסה כללית וזוויות ראייה של $45^\circ/135^\circ$ ולהציב ערכים שונים במקום k , למשל $k = 4$ שבה האקסצנטריות גדולה יותר מאשר

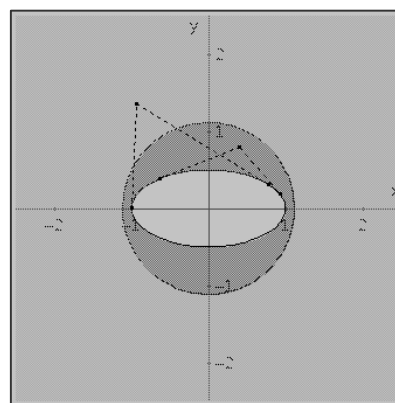
רואים את האליפסה בזווית ישרה נקרא המעגל המדריך של האליפסה (באנלוגיה לישר המדריך של הפרבולה). משוואת המעגל המדריך לאליפסה במקרה

$$\text{הכללי היא } X^2 + Y^2 = 1 + \frac{1}{k^2} \text{ .}$$



איור 5

טבעי עכשיו לשאול מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור מהן רואים את האליפסה בזוויות חדות/קהות? שיקול גיאומטרי פשוט מלמד, כי באזור שבין האליפסה לבין המעגל המדריך רואים את האליפסה בזוויות קהות ובאזור מחוץ למעגל המדריך רואים את האליפסה בזוויות חדות. שילוב של כלי התוכנה הסימבוליים והגרפים מאפשר להדגים זוויות ראייה בשרטוט (ראו איור 6).



איור 6

כמו לגבי פרבולה נשרטט מקומות גיאומטריים המתאימים לזוויות מסוימות, למשל $45^\circ/135^\circ$. נשתמש בביטויים המגדירים את שיפועי המשיקים היוצאים מנקודה כללית במישור לאליפסה שעבורה

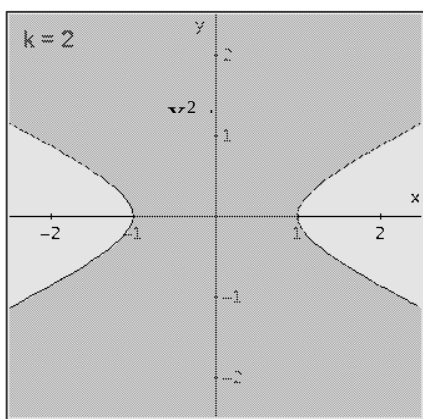
רואים היפרבולה

במהלך העבודה על פרבולה ואליפסה הצטיידנו בכלים מתמטיים וטכנולוגיים לחקירה ולהדגמת תוצאות החקירה. אנו מוכנים עתה לטפל בהיפרבולה שמשוואתה $x^2 - k^2 y^2 = 1$, $(k > 0)$. כמו קודם נפתור תחילה מערכת משוואות למציאת תנאי על השיפוע m של ישר העובר דרך נקודה בעלת השיעורים (X, Y) . בפתרונות המתקבלים נזהה את הדיסקרימיננטה בתוך סימן השורש (ואולי גם נשים לב למכנה $(k^2 m^2 - 1)$).

נמצא עבור אילו ערכי m הדיסקרימיננטה מתאפסת:

$$m_1 = \frac{\sqrt{-X^2 + Y^2 k^2 + 1} - XYk}{k(1 - X^2)}; m_2 = \frac{\sqrt{-X^2 + Y^2 k^2 + 1} + XYk}{k(X^2 - 1)}$$

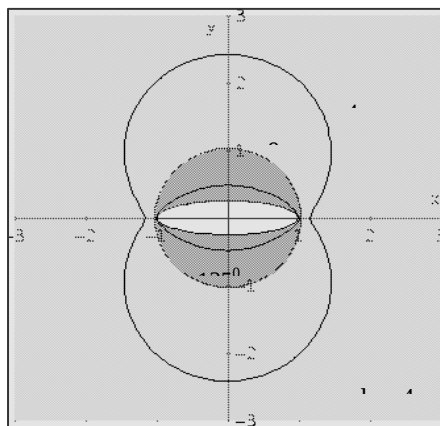
בנקודות המקיימות $-X^2 + Y^2 k^2 + 1 = 0$ (על ההיפרבולה) עובר רק משיק אחד, דרך נקודות בפנים ההיפרבולה אין משיקים וכנראה בכל נקודה מחוץ להיפרבולה (ראו איור 10) עוברים שני משיקים להיפרבולה (האמנם?).



איור 10

נמצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור מהן רואים את ההיפרבולה בזווית ישרה. לשם כך נפשט את המשוואה $m_1 \cdot m_2 = -1$ ונקבל את המשוואה הבאה: $X^2 k^2 + Y^2 k^2 = k^2 - 1$. זוהי משוואת מעגל אם ורק אם $k > 1$. למעגל זה נקרא המעגל המדריך של ההיפרבולה. נשרטט את ההיפרבולה שעבורה $k = 2$ ואת המעגל המדריך שלה ונברר, האם שני המשיקים דרך נקודה על המעגל משיקים לשתי הזרועות של ההיפרבולה, או לזרוע אחת בלבד. לשם כך נשלב כלים שונים של התוכנה, ביניהם אפשרות להדגמה דינמית של המשיקים. מטעמי סימטריה נתייחס באיורים רק לרביע הראשון. באיור 11 רואים שני זוגות משיקים מאונכים. בזוג אחד המשיקים נוגעים בשתי הזרועות

בדוגמה הקודמת (ראו איור 8). גם כאן רואים סימטריה לגבי שני הצירים ו"כיוון במותניים".

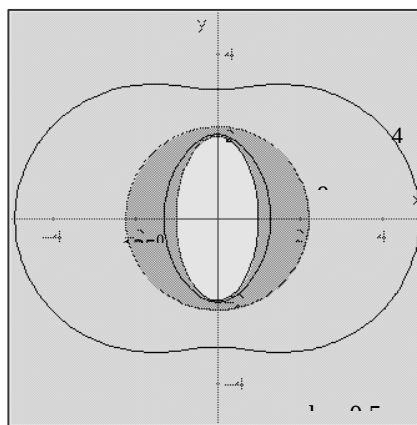


איור 8

מעניין לחקור באיזה תנאי נוצרות המותניים הצרים. קל לבדוק זאת: אם נציב 0.5 במקום k נקבל אליפסה שהציר הראשי שלה אנכי (איור 9). נוסיף לשרטוט את המעגל המדריך, אשר משוואתו היא $X^2 + Y^2 = 5$ ואת זוג העקומות מהן רואים את האליפסה בזווית $45^\circ/135^\circ$ המתוארות על-ידי המשוואה:

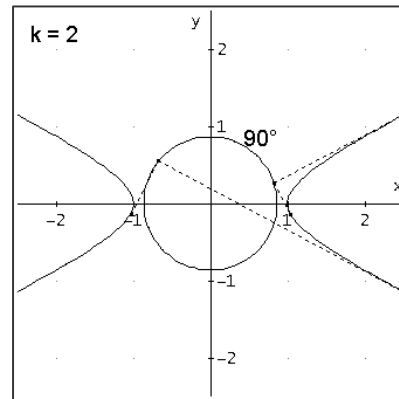
$$X^4 + 2X^2 Y^2 - 26X^2 + Y^4 - 14Y^2 + 41 = 0$$

נוכל להיעזר בתוכנה כדי לקבל ביטויים מפורשים (פונקציות) של Y על-ידי X וכך נוכל לחקור באופן אנליטי את העקומות בעזרת נגזרות ולזהות את נקודות הקיצון ונקודות הפיתול של הגרפים המתאימים לפונקציות.

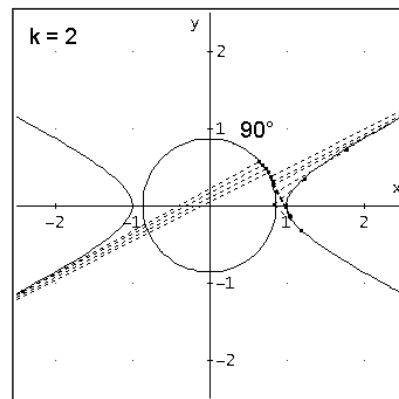


איור 9

ובזוג האחר שניהם משיקים לזרוע הימנית. נמשיך לחקור כדי לגלות היכן מתחולל המעבר מזוג חד-זרועי לזוג דו-זרועי (איור 12). אנו מגלים שיש נקודה "סינגולרית" שבה המשיק בעל השיפוע החיובי מחליף את הזרוע לה הוא משיק. בנקודה על המעגל המדריך, שבה מתבצע המעבר מזוג "חד-זרועי" ל"דו-זרועי" עובר רק משיק אחד להיפרבולה (לזרוע הימנית), הישר השני אינו פוגש את ההיפרבולה!



איור 11

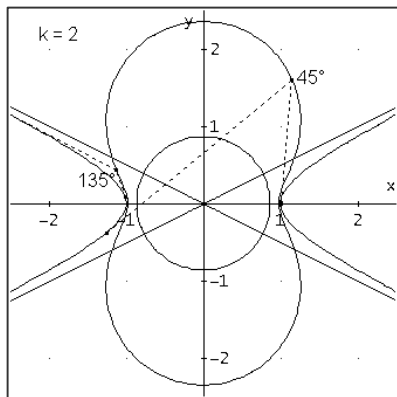


איור 12

ובכן – הישר הנקבע על-ידי הראשית והנקודה הסינגולרית הוא האסימפטוטה בעלת השיפוע החיובי שמשוואתה $y = \frac{1}{2}x$. משוואות האסימפטוטות להיפרבולה הכללית, דהיינו הנתונה על-ידי המשוואה $x^2 - k^2 y^2 = 1$ ($k > 0$) הן $y = \frac{1}{k}x$ ו- $y = -\frac{1}{k}x$. עתה נוכל לענות לשאלת "האמנם" לעיל:

משמעות תוצאה זו היא כי איחוד האסימפטוטות (שממנו מוציאים את הראשית כיוון שבה לא עובר שום משיק להיפרבולה) הן המקום הגיאומטרי של הנקודות מחוץ להיפרבולה שדרכן עובר משיק יחיד להיפרבולה. מסקנה זו, שבולטת לעין בשרטוט, מתקבלת כמובן מהתנאי $k^2 m^2 - 1 \neq 0$, המתחייב ממהלך הטיפול האלגברי, כפי שהערנו לעיל. נחקור בהמשך את השפעת הזווית בין האסימפטוטות על המקומות הגיאומטריים מהן רואים היפרבולה בזוויות שונות.

כמו לגבי האליפסה נתעניין בעקומות המתקבלות על-ידי המשוואה $\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$. על-ידי פישוט והעלאה בריבוע נקבל $t = \frac{4k^2(X^2 - Y^2k^2 - 1)}{(X^2k^2 + Y^2k^2 - k^2 + 1)^2}$ (t מייצג את ריבוע הטנגנס של זווית הראייה). נתבונן שוב במונה ובמכנה ונחدد את תובנתנו לגבי המשמעות הגרפית של הביטויים האלגבריים: הביטוי בסוגריים במונה מתאפס עבור שיעורי נקודות על ההיפרבולה, שבהן עובר רק משיק אחד, והביטוי במכנה מתאפס עבור שיעורי נקודות על המעגל המדריך, שמהן יוצאים משיקים מאונכים להיפרבולה. מה אנחנו מצפים לראות בשרטוט? נתבונן באיור 13 (עבור $k = 2$ וזוויות $45^\circ/135^\circ$) ונראה שחסרה לנו העקומה בצורת כדורגל אמריקאי (football) הנמצאת בתוך המעגל המדריך, כפי שראינו לגבי האליפסה.



איור 13

מדוע לא מצטיירת עקומה פנימית? משוואות האסימפטוטות הן $y = \frac{1}{2}x$ ו- $y = -\frac{1}{2}x$ והזווית החדה ביניהן גדולה מ- 45° (בערך 53°). שיקולים גיאומטריים מסבירים מדוע לא יכולים לראות את ההיפרבולה מנקודה בתוך המעגל ובין

בשלב זה אנחנו מוכנים להכליל ולסכם את ממצאי החקירה לגבי משיקים להיפרבולה ומקומות גיאומטריים מהן רואים היפרבולה שמשוואתה $x^2 - k^2 y^2 = 1$ ($k > 0$) בזוויות שונות.

- דרך נקודה בפנים ההיפרבולה ובראשית הצירים לא עובר אף משיק להיפרבולה.
- דרך נקודה על ההיפרבולה או על האסימפטוטות שלה (פרט לראשית) עובר משיק אחד להיפרבולה.
- דרך נקודה מחוץ להיפרבולה שאינן על האסימפטוטות עוברים שני משיקים להיפרבולה.

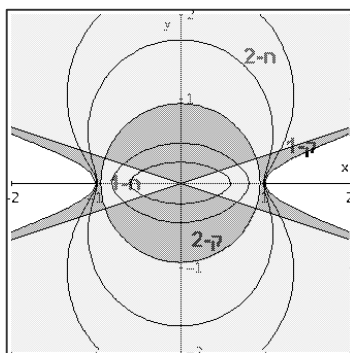
עבור $k > 1$:

- דרך נקודה על המעגל המדריך המשיקים מאונכים זה לזה.

- האסימפטוטות והמעגל המדריך מחלקים את החוץ של ההיפרבולה לארבעה אזורים כפי שרואים באיור 16: אזור ק-1 הוא המקום הגיאומטרי שבו רואים את ההיפרבולה בזווית קהות והמשיקים נוגעים בזרוע אחת. אזור ק-2 הוא המקום הגיאומטרי שבו רואים את ההיפרבולה בזווית קהות והמשיקים נוגעים בשתי הזרועות. אזור ח-1 הוא המקום הגיאומטרי שבו רואים את ההיפרבולה בזווית חדות והמשיקים נוגעים בזרוע אחת. אזור ח-2 הוא המקום הגיאומטרי שבו רואים את ההיפרבולה בזווית חדות והמשיקים נוגעים בשתי הזרועות (האזורים האלה הם "כפולים", על סמך הסימטריה).

עבור $k \leq 1$ (איור 17) :

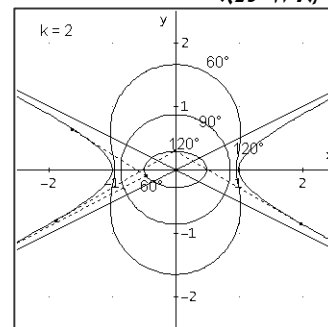
- אין מעגל מדריך ולכן החלוקה לאזורים נקבעת רק על-ידי האסימפטוטות.
- יש אם כך שני אזורים: האזור הכהה יותר בשרטוט, שהוא המקום הגיאומטרי ממנו רואים את ההיפרבולה בזווית קהות (גדולות מהזווית שבין האסימפטוטות שנקבעת כמובן על-ידי הערך של k) והמשיקים נוגעים רק בזרוע אחת, והאזור הכהה פחות בשרטוט, שהוא המקום הגיאומטרי ממנו רואים את ההיפרבולה בזווית חדות (קטנות מהזווית שבין האסימפטוטות) והמשיקים נוגעים בשתי הזרועות.



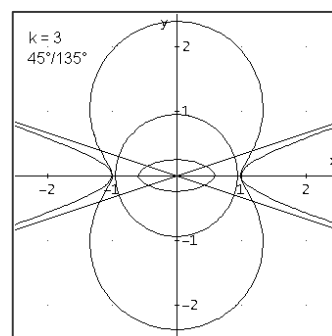
איור 16

האסימפטוטות בזווית קטנה מהזווית שבין האסימפטוטות. כמו כן לא יכולים לראות את ההיפרבולה בזווית של 135° (הגדולה מן הזווית הקהה בין האסימפטוטות) מנקודה בתוך המעגל ומחוץ לאסימפטוטות.

- דרך נקודות על העקומה החיצונית שנמצאות מחוץ לאסימפטוטות (בתוך הזווית הקהה) רואים את ההיפרבולה בזווית של 45° והמשיקים נוגעים בשתי הזרועות. ואילו דרך נקודות על העקומה שנמצאות בין האסימפטוטות (בתוך הזווית החדה) רואים את ההיפרבולה בזווית של 135° והמשיקים נוגעים בזרוע אחת. בהדגמה דינמית נוכל לראות את ההשתנות "הפתאומית" של התנהגות זוג המשיקים כאשר חולפים על האסימפטוטות. שימו לב כי גם לגבי המעגל המדריך מתברר כי המשיקים להיפרבולה מנקודות בין האסימפטוטות נוגעים בזרוע אחת והמשיקים דרך נקודות מחוץ לאסימפטוטות נוגעים בשתי הזרועות.
- אנחנו בכל זאת רוצים לראות גם עקומה הפנימית, ולכן נשנה את זוויות הראייה ל- $60^\circ/120^\circ$ (איור 14). הזווית החדה בין האסימפטוטות קטנה מ- 60° . בכל אחת משתי העקומות שהופיעו יש ארבעה חלקים: שני חלקים סימטריים בין האסימפטוטות ושני חלקים סימטריים מחוץ לאסימפטוטות. יש היפוך תפקידים בין שתי העקומות מבחינת גודל זווית הראייה, אבל התנהגות זהה בנגיעת זוגות משיקים בזרועות. נוכל גם לראות את זוג העקומות המתאים ל- $45^\circ/135^\circ$ אם נקטין את הזווית החדה בין האסימפטוטות על-ידי שנבחר $k = 3$ (איור 15).

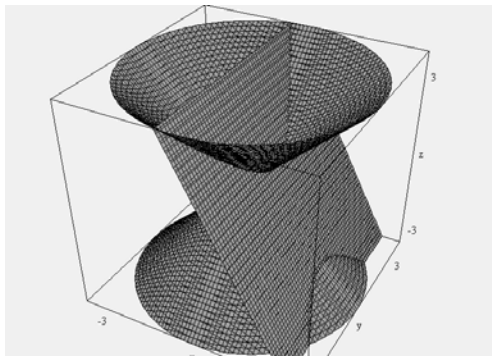


איור 14



איור 15

בעבר, מורים שבחרו להציג לתלמידיהם מבט היסטורי על העקומות בתור חתכי החרוט הדגימו זאת בעזרת ציורים, מודלים תלת-ממדיים מעץ או מפלסטיק, או סרטונים. כיום בעזרת תוכנות מחשב יכולים המורים והתלמידים לבנות הדגמה של חתכי חרוט בכיתה או במעבדת מחשבים. תקליטור המלווה את תכנית הלימודים בגיאומטריה אנליטית בשאלון 7 במבנה הצבירה (זהבי, זקס ודנא-פיקארד 2006) מכיל פעילויות ממוחשבות בעזרת תוכנה סימבולית-גרפית (Derive). בקלות רבה יכולים התלמידים לשרטט חרוט, להגדיר משפחה חד-פרמטרית של מישורים ולהיעזר בסרגל גרירה הקשור לפרמטר כדי לראות כיצד משתנה חתך המישור עם החרוט (לדוגמא איור 18 שהתקבל על-ידי התוכנה הגרפית DPGraph שמאפשרת שקיפות).

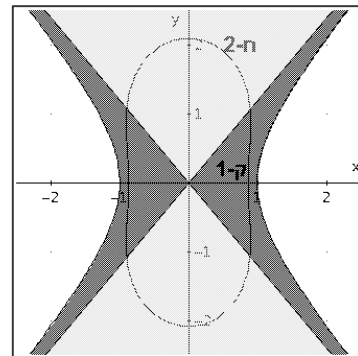


איור 18

במהלך פיתוח הפעילויות הממוחשבות פתרנו בעזרת התוכנה בעיות מספרי לימוד בגיאומטריה אנליטית. תוך כדי הפיתוח והניסוי עם מורים ותלמידים צמח, הודות לסביבה הטכנולוגית, מבט מאחד חדש, אותו הצגנו בפירוט בסעיפים הקודמים. המבט המאחד מתבצע דרך חקירה של זוויות ראייה של העקומות מנקודות מחוץ להן ובמיוחד על ה"מדריך".

החשיבות של מבט מאחד על נושא מתמטי היא בכך, שבנוסף ל"אסטטיקה", הוא מאפשר ראייה כללית של המבנה של הנושא מעבר לתכונות והמשפטים הפרטיים. חשיבות נוספת, כפי שציננה דוד, היא כמובן באפשרות ליצור קישורים בין מבטים מאחדים אחרים. בהמשך נראה כיצד עזרה הטכנולוגיה להוסיף ולפתח את המבט המאחד שתיארנו לעיל על-ידי בניית משוואה חד-פרמטרית המאפשרת לחקור בבת אחת מקומות גיאומטריים של זוויות ראייה עבור כל חתכי החרוט.

איור 16



איור 17

מהם השינויים שמביאה תוכנה סימבולית-גרפית לקורס בגיאומטריה אנליטית?

מבט מאחד

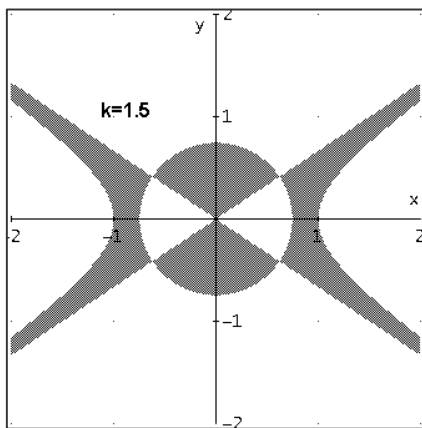
בקורס בגיאומטריה אנליטית לתלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה מוגברת עוסק בעיקר בנושא הקלאסי של מקומות גיאומטריים ממעלה השנייה. בדרך כלל מגדירים ולומדים לנתח בדרך אנליטית את כל אחת מהעקומות (פרבולה, אליפסה, היפרבולה) בנפרד. ספרי הלימוד מביאים גם הגדרה המאחדת את שלוש העקומות בעזרת האקסצנטריות שלהן:

מקומות גיאומטריים של נקודות במישור שיחס מרחקיהן מנקודה נתונה (מוקד) ומישור נתון (מדריך) הוא גודל קבוע e (אקסצנטריות). כאשר $e=1$ המקום הגיאומטרי הוא פרבולה, כאשר $e<1$ המקום הגיאומטרי הוא אליפסה, וכאשר $e>1$ המקום הגיאומטרי הוא היפרבולה.

בחלק מספרי הלימוד מוסיפים גם מבט מאחד המקשר את העקומות מנקודות מבט על החתכים של חרוט ומישור. בולט במיוחד ספרם של אביתר וציגלר (1971, פרק 6), בו נקודת המוצא היא הגדרת העקומות כחתכי החרוט וממנה מפתחים את ההגדרות בעזרת מוקד ומדריך. אלטשולר (1991) מציג את חתכי החרוט בגישה סינתטית ודוד (2005) מדגישה את החשיבות של הוכחת השקילות בין שלוש ההגדרות של העקומות ממעלה שנייה ומראה זאת בסדנאות למורי מתמטיקה. נציין כאן גם, כי במעבר למשוואות קוטביות אפשר להשתמש במשוואה אחת
$$r = \frac{e \cdot p}{1 - e \cdot \cos(\theta)}$$
 עבור כל חתכי החרוט.

ידע אופרטיבי כמתווך בין רפלקציה וביצוע

חוקרים את דרכי הלמידה בסביבת תוכנות מתמטיות (Peshek & Schneider, 2001), לפיה הלומד משתמש בכלי הסימבולי-גרפי ל"מיקור-חוץ" (outsourcing) של ידע אופרטיבי. התברר לנו שהידע האופרטיבי של המורים שימש כמתווך בין הרפלקציה והביצוע ויחד איתם הוא הלך והתפתח בעצמו תוך כדי השימוש בתוכנה. ואמנם, בהתחלה המורים השתמשו בכלי כאסיסטנט מתמטי להצבות, פתרון משוואות, להמחשת הפתרון בחלון הגרפי ובקרה שלו. לאחר ההתעסקות עם המעגל המדריך כמקום גיאומטרי של נקודות מהן רואים את חתך החרוט בזווית ישרה, היו שהעזו לשאול מה עם הנקודות מהן רואים את חתך החרוט בזוויות אחרות – שאלות כגון אלה לא עלו וכמובן שלא טופלו בספרות הקלאסית. הידע האופרטיבי שהתפתח אצל המורים, ובמיוחד השימוש בסרגלי גרירה לחקירה דינמית של ביטויים עם פרמטרים, עזר להם לקבל תשובות מעניינות על שאלות אלה (Mann, Dana-Picard and Zehavi, in press) מימוש אינטנסיבי בסרגל הגרירה, תרם להבנת ההשפעה של השתנות הערך של k (במשוואת חתך חרוט) על המקומות הגיאומטריים הקשורים למשוואה. איור 19 הוא תוצר של מהלך כזה (זוהי תמונה אחת מתוך סדרה), הבדק את השתנות המקום הגיאומטרי של הנקודות מהן רואים היפרבולה בזווית קהה.



איור 19

בעקבות ניסיון זה עם מורים חשבנו שכדאי לטפל גרפית (בעזרת סרגל גרירה) וסימבולית במשפחה חד-פרמטרית שתייצג את כל חתכי החרוט. משוואת המשפחה היא: $x^2 + y^2 = e^2(x + \frac{1}{e})^2$. מדובר במקום הגיאומטרי של כל הנקודות אשר יחס מרחקיהן מן

בספרי הלימוד המסורתיים מופיעה השאלה המתייחסת למעגל המדריך של ההיפרבולה באופן הבא: "הראו כי המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור שמהן רואים את ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ בזווית ישרה הוא המעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ ". בדרך כלל השאלה מלווה בפתרון מלא או חלקי או עם הפנייה לפתרון השאלה המתאימה לגבי אליפסה. בעיה כזו נחשבת בתור בעיה קשה (מיועדת למתקדמים) כי יש צורך בהגדרת משתני עזר. להלן פתרון הדורש תכנון אסטרטגי כולל ורפלקציה על הבעיה בטרם ניגשים לביצוע (Spain, 1963):

המשוואה הכללית של משיק להיפרבולה (מלבד המקרה של משיק מקביל לציר ה-y) היא $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ או $y = mx - \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$. משיק עובר דרך נקודה בעלת שיעורים (X, Y) אם מתקיים $(Y - mX)^2 = a^2 m^2 - b^2$. על-ידי פישוט תתקבל משוואה ריבועית עבור m : $(X^2 - a^2)m^2 - 2XYm + Y^2 + b^2 = 0$. על-מנת

להתגבר על הסרבול הטכני של מציאת ביטויים אלגבריים של שורשי המשוואה ושל מכפלתם משתמשים בתחבולה, המסתמכת על הקשר בין המקדמים והשורשים של משוואה ריבועית (נוסחת וייטה). מקבלים, עבור זוג משיקים מאונכים, את

המשוואה $\frac{Y^2 + b^2}{X^2 - a^2} = -1$. כלומר, כאשר $a > b$

משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות (X, Y) היא משוואת מעגל: $X^2 + Y^2 = a^2 - b^2$, והמעגל הזה נקרא המעגל המדריך של ההיפרבולה הנתונה.

במהלך פיתוח הפעילויות הממוחשבות הצגנו למורים, לאחר שלמדו להשתמש בתוכנה לפתרון בעיות בגיאומטריה אנליטית, את הבעיה בניסוח הבא: מהו המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של משיקים מאונכים לאליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$? את

הפתרונות שהוצעו על-ידי המורים השוינו עם הפתרון המסורתי (Zehavi & Mann, 2005). המורים התחילו לפתור את הבעיה בלי ניתוח אסטרטגי כולל. הם רשמו מודל לבעיה בתור משוואה למציאת נקודות החיתוך של האליפסה עם משוואת ישר העובר דרך נקודה כללית והתקדמו תוך התמזגות של הביצוע והרפלקציה. ניתוח הפתרונות מתבסס על תיאוריה שהוצעה על-ידי

הראשית – המוקד – ומישר – המדריך של חתך החרוט, שמשוואתו $x = -\frac{1}{e}$ הוא e . לכל חתך חרוט יש נציג דומה לו במשפחה, מה שמאפשר לתת טיפול מאחד לכל חתכי החרוט. מבט מאחד זה מתקשר עם המבט המאחד הקלאסי המתבסס על מרחקים אל מוקד ומדריך.

אז מה לומדים כאשר משנים את נקודת המבט?

- הנושא של משיקים מאונכים מופיע בספרות הקלאסית במסגרת תרגילים מבודדים ואילו במהלך הדידקטי שתיארנו הנושא מופיע במסגרת בירור כללי של זוויות ראייה. המעגל המדריך הוא מקרה פרטי של המקומות הגיאומטריים של נקודות מהן רואים חתך חרוט בזווית נתונה.

- המדריך של פרבולה גם הוא במובן מסוים "מעגל מדריך" בעל "רדיוס אינסופי". לא לכל היפרבולה יש מעגל מדריך, וגם כאשר הוא קיים הוא לא ממש מעגל, אלא איחוד של קשתות זרות.

- הידע האופרטיבי הנרכש תוך שימוש בכלי הסימבולי מאפשר לנו לשאול שאלות שהתשובות הסימבוליות עליהן, לעיתים, סתומות, תרתי משמע. אך בזכות היכולת של הכלי לשרטט עקומות של משוואות סתומות (implicit plotting), אפשר להגיע לתובנות לגבי התשובות הסימבוליות ובעקבות זאת להעזי לשאול שאלות נוספות ולהרחיב את הקוריקולום (Dana-Picard, 2004).

- הידע האופרטיבי מאפשר הרחבה והעשרה של נושא המקומות הגיאומטריים, גם כאלה הנתונים על-ידי משוואות מורכבות יותר מאשר משוואות ריבועיות. למשל, העקומות של נקודות מהן רואים היפרבולה בזווית שונה מ- 90° מיוצגות על-ידי משוואות "דו-ריבועיות" בשני משתנים. הכלי המאפשר לנו שרטוט גרפים של פונקציות סתומות עומד לרשותנו גם כשמדובר באי-שיוויונים. הטיפול האינטנסיבי במקומות גיאומטריים תורם גם לתובנה חדשה לגבי האסימפטוטות, שהן המקום הגיאומטרי של נקודות מחוץ להיפרבולה דרכן עובר משיק יחיד. (מלבד נקודה אחת, היא נקודת החיתוך של האסימפטוטות).

- שיקולים גיאומטריים פשוטים משתלבים באופן טבעי בדיון המתמטי גם בסביבת כלי סימבולי-גרפי. כך למשל, על בסיס משפט הזווית החיצונית אנו לומדים שהזווית החדה בה אפשר לראות היפרבולה מנקודה בין האסימפטוטות שלה חייבת להיות גדולה מן הזווית בין האסימפטוטות.

- בנוסף לשיקולים הגיאומטריים גם כלים של אנליזה משתלבים בלימוד הנושא. נציין כי המנגנון הסימבולי "יודע" לגזור לא רק פונקציות מפורשות, אלא גם פונקציות סתומות. הידע האופרטיבי שניתן לרכוש בהסתמך על כלי התוכנה באנליזה מעודד חקירת העקומות של זוויות ראייה. כמובן שהדבר מתאפשר, כי התלמידים יודעים מספיק אנליזה בשלב זה של לימודיהם. הידע האופרטיבי הנרכש תוך כדי שימוש בתוכנה הופך להיות חלק אינטגרלי של הידע המתמטי של הלומד, כמו חישובים בעל פה, או בכתב.

- הביטויים האלגבריים המתקבלים במהלך החקירה של חתכי החרוט מנקודת מבט של זוויות ראייה מבטאים למעשה את כל הקשרים בין המשתנים, ואולם נדרשת תובנה סימבולית מפותחת כדי לפרש אותם מבחינה גיאומטרית. ההרגל להתבסס על שרטוט עקומות המתארות משוואות (מפורשות וסתומות) עוזר לפתח את התובנה הסימבולית בהדרגה. לאורך הצגת הדברים הראינו כיצד אפשר לפרש את המשמעות של מרכיבים שונים של הביטויים האלגבריים. אחת הדרכים לחקירת הביטויים האלגבריים היא הפעלת סרגל הגרירה על הפרמטרים. השימוש האינטנסיבי המשולב במנגנון הסימבולי ובמנגנון הגרפי, שכולל את סרגל הגרירה, יוצרים תובנה סימבולית שלא התאפשרה בעבר למרבית התלמידים. תובנה זאת מתבטאת בכך שלא רק שניתן לזהות איכותית את ההשפעה של שינוי ערך הפרמטר על הצורה הגיאומטרית, אלא גם ללמוד להסביר כמותית את סיבת השינוי.

רשימת מקורות

- אביתר, ע., ציגלר, צ., (1971), גיאומטריה אנליטית, הוצאת קרני בע"מ.
אלטשולר ע., (1991), חתכי החרוט בגישה סינתטית, עלי"ה 9, עמ' 56-57.
דוד ח., (2005), אליפסה, היפרבולה ופרבולה מנקודת ראות מישורית ומרחבית, עלי"ה 9, עמ' 32-37.
זהבי נ., זקס ר., ודנא-פיקארד נ., (2006), אוגון למורה: גיאומטריה אנליטית – פעילויות ממוחשבות, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.
Dana-Picard, T. (2004). Technology as a bypass for a lack of theoretical knowledge, International Journal for Technology in Mathematics Education, 11 (3), 101-109.
Peshek, W. and Schneider, E. (2001). How to identify basic knowledge and basic skills? Features of modern general education in mathematics. The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 8 (1), 7-22.
Mann, G., Dana-Picard, T. and Zehavi, N. (in press). Technological Discourse on CAS-based Operative Knowledge. The International Journal of Technology in Mathematics Education, Spain, B. (1963). Analytical Geometry, Oxford: Pergamon Press.
Zehavi, N. (2004). Symbol Sense with a Symbolic-Graphical System: A Story in Three Rounds. Journal of Mathematical Behavior, 23, 183-203.
Zehavi N. and Mann G. (2005). Instrumented Techniques and Reflective Thinking in Analytic Geometry, The Montana Mathematical Enthusiast, <http://www.montanamath.org/TMME/v2n2/TMMEv2n2a1.pdf>