



הנושא: משפט צ'בה והרחבתו

הוכן ע"י:

עטרה שריקי, קלרה זיסקין, אילנה לביא.

תקציר:

במאמר מוצג המשפט המפורסם של המתמטיקאי האיטלקי ג'ובאני צ'בה, שתיים מההוכחות שלו והרחבה של המשפט, אותה גילו המ חברות בעזרת שימוש בלומדה של גיאומטריה דינאמית.

מילות מפתח:

חקירה מתמטית, הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטריה המישור, משפט צ'בה, ג'ובאני צ'בה, משפט, הוכחה, משולש, מצולע, צ'ביאנים, תיכון, גובה, חוצה זווית, אנך אמצעי, "מה אם לא?", פרופורציה, הרחבה, הכללה.

החומר פורסם במסגרת:

על"ה 38, תשס"ז 2007, עמודים 32-36.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 5 עמודים.

משפט צ'בה והרחבתו

אילנה לביא
ilanal@vvc.ac.il
מכללת עמק יזרעאל

קלרה זיסקין
claraz@research.haifa.ac.il
היחידה הקדם אקדמית, אוניברסיטת חיפה

עטרה שריקי
shriki@tx.technion.ac.il
אורנים, המכללה האקדמית לחינוך

כיוון, וברישום עוברים אל המונה של השבר הבא, וכך הלאה עד אשר מגיעים שוב לנקודת המוצא.

למשפט קיימות הוכחות רבות. להלן מובאות שתי הוכחות הנשענות על ידע בסיסי בגיאומטריה, ולכן מתאימות להצגה בבית הספר.

הוכחה 1

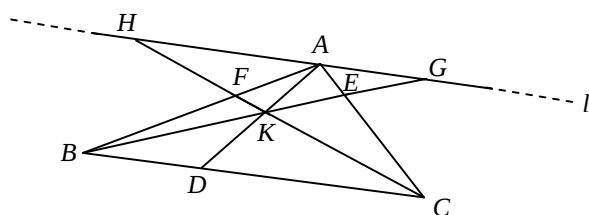
כיוון אחד:

נתון משולש ABC . שלושת קטעים AD , BE , CF נחתכים בנקודה אחת, K .

צ"ל שמתקיים:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

הוכחה: דרך הקדקוד A נעביר ישר l , מקביל ל- BC (ר' שרטוט 2). נאריך את הישרים BE ו- CF עד שייפגשו עם הישר l . נסמן ב- G את נקודת החיתוך של BE עם l , וב- H את נקודת החיתוך של CF עם l .



שרטוט 2

נקבל:

$$\triangle AHF \sim \triangle BCF;$$

$$\triangle AEG \sim \triangle CEB;$$

$$\triangle AGK \sim \triangle DBK;$$

$$\triangle CDK \sim \triangle HAK$$

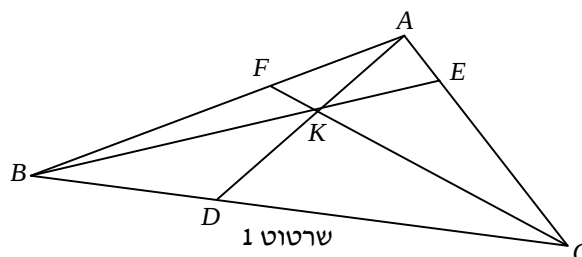
גיובאני צ'בה היה מתמטיקאי אילטקי, אשר חי בין השנים 1647-1734. עיקר עיסוקו היה בגיאומטריה, ואת המשפט המפורסם שלו פירסם בשנת 1678 בספרו De lineis rectis. המשפט כמעט שאינו מוזכר בספרי הגיאומטריה, למרות היותו משפט מעניין ומפתיע. בדפים הבאים נציג את המשפט ושתיים מההוכחות שלו. בהמשך נציג הרחבה של המשפט, אותה גילינו בעזרת שימוש בלומדה של גיאומטריה דינאמית.

1. משפט צ'בה

במשולש ABC , שלושה קטעים AD , BE , CF נחתכים בנקודה אחת, K (ר' שרטוט 1),

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

אם ורק אם



יש לשים לב לכך שהקטעים הרשומים בקשר האלגברי אותו מתאר המשפט מסודרים על-פני צלעות המשולש בסדר הבא: 'מתחילים' מאחד הקדקודים ורשמים אותו במונה של השבר בראשון, וממשיכים בכיוון השעון (או כנגד כיוון השעון), אל המכנה של השבר הראשון ורשמים בו את הקטע הבא המונה על אותה צלע, מתקדמים על פני צלעות המשולש באותו

לכן מתקיים :

$$(1) \frac{AF}{FB} = \frac{AH}{BC}$$

$$(2) \frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AG}$$

$$(3) \frac{AG}{BD} = \frac{AK}{DK}$$

$$(4) \frac{AH}{DC} = \frac{AK}{DK}$$

מ – (3) ומ – (4) נובע :

$$(5) \frac{AG}{BD} = \frac{AH}{DC}$$

$$(6) \frac{BD}{DC} = \frac{AG}{AH}$$

ולכן :

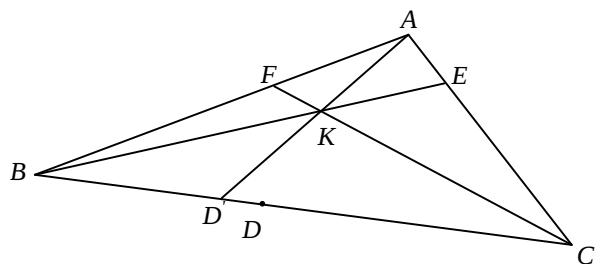
נכפול את השוויונות (1), (2), (6), ונקבל :

$$(7) \frac{AF}{FB} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{AH}{BC} \cdot \frac{BC}{AG} \cdot \frac{AG}{AH} = 1$$

לכן, אם הישרים AD , BE , CF נחתכים בשלושת בנקודה K , מתקיים השוויון (7).

נוכיח עתה את הכיוון ההפוך. נניח שמתקיים שוויון (7), ונראה שהישרים AD , BE , CF נחתכים בנקודה אחת.

ההוכחה תתבצע בדרך השלילה. נניח ש הנקודה K היא נקודת החיתוך של BE ו- CF . נשרטט את הקטע AK ונאריכו עד לנקודת החיתוך שלו עם BC , D' . בהנחה ששלושת הישרים לא נחתכים בנקודה K הרי שהנקודה שונה מהנקודה D (ר' שרטוט 3).



שרטוט 3

לכן, ממה שהוכחנו כבר נובע :

$$(8) \frac{AC}{FB} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{BD'}{D'C} = 1$$

מתוך (7) ו – (8) נקבל :

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{BD'}{D'C}$$

ומכאן :

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BD'}{D'C} + 1 = \frac{BD}{DC} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{BD' + D'C}{D'C} = \frac{BD + DC}{DC} \Rightarrow \frac{BC}{D'C} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow D'C = DC$$

כלומר, D' ו- D מתלכדות. מ.ש.ל.

הוכחה 2

כמו בהוכחה הקודמת, נתון ששלושת הקטעים AD , BE , CF במשולש ABC נחתכים בנקודה אחת, K .

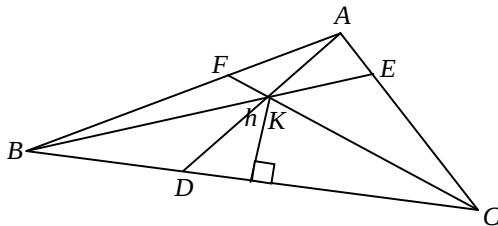
למשולשים CKD ו- BKD יש גובה משותף h מהקדקוד K (ר' שרטוט 4). מכאן נקבל ששטחיהם :

$$(1) S(\Delta CKD) = DC \cdot \frac{h}{2}; (2) S(\Delta BKD) =$$

$$= BD \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow (3) \frac{BD}{DC} = \frac{S(\Delta BKD)}{S(\Delta CKD)}$$

באופן דומה נקבל עבור המשולשים ACD ו- ABD :

$$(4) \frac{BD}{DC} = \frac{S(\Delta ABD)}{S(\Delta ACD)}$$



שרטוט 4

מתוך (3) ו – (4) נקבל :

$$\frac{S(\Delta BKD)}{S(\Delta CKD)} = \frac{S(\Delta ABD)}{S(\Delta ACD)}$$

ניעזר עתה באחד מכללי הפרופורציה : בהינתן ארבעה גדלים a, b, c, d המקיימים את הקשר $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, קל

להראות שהם מקיימים גם את הקשר $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$

(בעזרת כפל "בהצלבה" ניתן להוכיח זאת באופן מיידי).

לכן, מתוך (5) נקבל :

$$(6) \frac{S(\Delta BKD)}{S(\Delta CKD)} = \frac{S(\Delta ABD) - S(\Delta AKD)}{S(\Delta ACD) - S(\Delta AKD)} = \frac{S(\Delta AKB)}{S(\Delta AKC)}$$

כלומר :

$$(7) \frac{BD}{DC} = \frac{S(\Delta AKB)}{S(\Delta AKC)}$$

ב. נראה ששלושת חוצי הזוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת. נניח שבשרטוט 5 הקטעים AD, BE, CF

הם שלושת חוצי הזווית. ידוע שמתקיים עבורם:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}; \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}; \frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB}$$

אם נכפול את שלושת השוויונות נקבל:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1$$

ג. נראה עתה ששלושת הגבהים נפגשים בנקודה אחת.

בשרטוט 6 נתונים שלושת הגבהים של המשולש ABC .

המשולשים BCE ו- ACD דומים

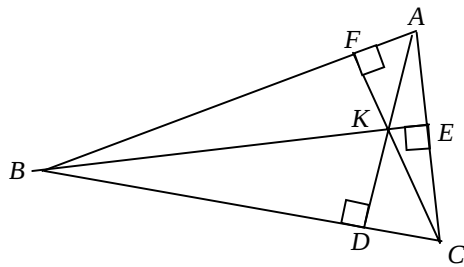
$$\frac{CE}{DC} = \frac{BE}{AD} \quad \text{לכן: } (\angle C, \angle D, \angle E = 90^\circ \text{ משותפת}).$$

באופן דומה מתקיים:

$$\frac{AF}{EA} = \frac{CF}{BE}; \frac{BD}{FB} = \frac{AD}{CF}$$

מכאן:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{EA} \cdot \frac{BD}{FB} \cdot \frac{CE}{DC} = \frac{CF}{BE} \cdot \frac{AD}{CF} \cdot \frac{BE}{AD} = 1$$



3. הרחבת משפט צ'בה

תוך שימוש באסטרטגיה "מה אם לא?", החלטנו לבדוק האם משפט צ'בה תקף גם עבור מצולעים אחרים. את האפשרות להכליל את המשפט עבור מצולעים בעלי מספר זוגי של צלעות קל לשלול מיד, והקוראים מוזמנים להסביר מדוע.

בעזרת לומדה של גיאומטריה דינאמית, בדקנו את קיומה של תכונה דומה עבור מצולעים בעלי 5, 7, 9, 11 צלעות. להפתעתנו, גילינו שאפשר לנסח משפט מתאים גם עבור מצולעים אלה. לאור זאת העלנו את ההשערה שמשפט צ'בה תקף לכל מצולע בעל מספר אי-זוגי של צלעות.

להלן נביא את ההוכחה למקרה של מחומש. ההוכחה עבור מצולעים אחרים בעלי מספר אי-זוגי של צלעות היא דומה. לכן משפט צ'בה ניתן להכללה.

באותה הדרך נקבל עבור שני הזוגות הנוספים של המשולשים:

$$(8) \frac{AF}{FB} = \frac{S(\Delta AKC)}{S(\Delta BKC)}; \quad (9) \frac{CE}{EA} = \frac{S(\Delta BKC)}{S(\Delta AKB)}$$

נכפול את (7), (8), (9) ונקבל מכפלה שערכה שווה ל-1. מ.ש.ל.

בהוכחה זו הראנו רק כיוון אחד, ואנו מזמינים את הקוראים להוכיח ברוח זו את הכיוון ההפוך.

הערה:

הנקודות D, E, F עשויות להיות שייכות להמשכי הצלעות המתאימות של המשולש, בעוד נקודת החיתוך של שלושת הצ'ביאנים¹, K , עשויה להיות מחוץ למשולש. ההוכחות זהות בכל המקרים האפשריים.

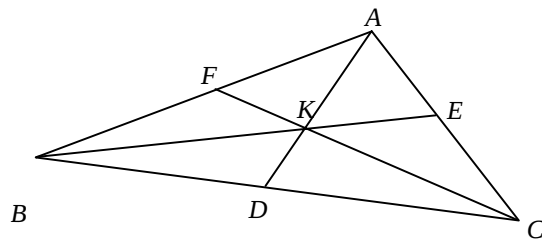
2. שימוש במשפט צ'בה עבור קווים מיוחדים במשולש

בעזרת משפט צ'בה קל להראות משפטים מוכרים עבור הצ'ביאנים המיוחדים: תיכונים, חוצי זוויות, וגבהים. בעזרת משפט צ'בה נראה להלן ששלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת, וכך גם שלושת חוצי הזוויות ושלושת הגבהים.

א. ממשפט צ'בה נובע מיד ששלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת. בשרטוט 5 נתונים שלושת התיכונים של המשולש ABC .

$$\text{מתקיים: } \frac{AF}{FB} = 1; \frac{BD}{DC} = 1; \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\text{לכן, ברור שתוצאת המכפלה היא: } \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$



שרטוט 5

¹ לישרים במשולש המחברים קדקוד עם נקודה על הצלע הנגדית מקובל לקרוא בשם "צ'ביאנים" (Cevians).

הגדרה

ניעזר במונח "צ'ביאן" כדי לציין קטע המחבר בין קדקוד לבין נקודה על צלע "נגדית לו". עבור מצולעים בעלי יותר משלוש צלעות, מושג זה דורש הגדרה. בחרנו להגדיר את המושג צלע נגדית כך: בהינתן מצולע בעל n צלעות, כאשר n הוא מספר אי-זוגי, אם נמספר את הקדקודים באופן: $1, 2, \dots, n$ אזי הצלע הנגדית של הקדקוד i , היא הצלע שבין הקדקודים הסמוכים שמספריהם $(i + \frac{n-1}{2})_{\text{mod}(n)}$ ו- $(i + \frac{n+1}{2})_{\text{mod}(n)}$.

לדוגמא, במתווש הצלע הנגדית לקדקוד שמספרו 7 היא הצלע שבין הקדקודים שמספריהם

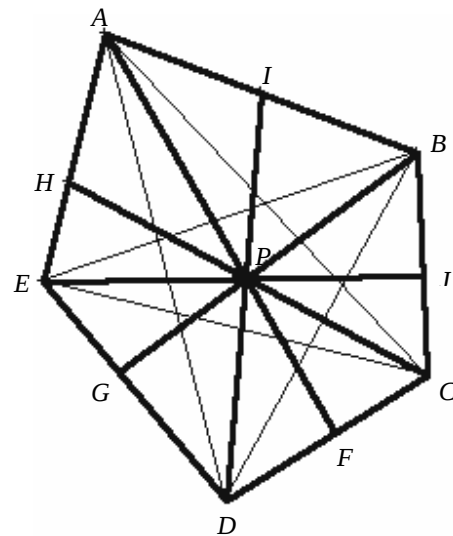
$$(7 + \frac{9-1}{2})_{\text{mod}(9)} = 11_{\text{mod}(9)} = 2$$

$$\text{ו- } (7 + \frac{9+1}{2})_{\text{mod}(9)} = 12_{\text{mod}(9)} = 3$$

משפט צ'בה במחומש

במחומש $ABCDE$ (ר' שרטוט מס' 7) חמשת הצ'ביאנים AF, BG, CH, DI, EJ נפגשים בנקודה אחת, אם ורק

$$\frac{AH}{HE} \cdot \frac{EG}{GD} \cdot \frac{DF}{FC} \cdot \frac{CJ}{JB} \cdot \frac{BI}{IA} = 1 \quad \text{אם:}$$



שרטוט 7

בדומה להוכחה מס' 2 עבור המקרה של משולש, ניתן לומר שמתקיים:

$$\frac{AH}{HE} = \frac{S(\triangle ACP)}{S(\triangle ECP)}$$

$$\frac{EG}{GD} = \frac{S(\triangle EBP)}{S(\triangle DBP)}$$

$$\frac{DF}{FC} = \frac{S(\triangle ADP)}{S(\triangle ACP)}$$

$$\frac{CJ}{JB} = \frac{S(\triangle CEP)}{S(\triangle BEP)}$$

$$\frac{BI}{IA} = \frac{S(\triangle BDP)}{S(\triangle ADP)}$$

מכאן נקבל:

$$\frac{AH}{HE} \cdot \frac{EG}{GD} \cdot \frac{DF}{FC} \cdot \frac{CJ}{JB} \cdot \frac{BI}{IA} = \frac{S(\triangle ACP)}{S(\triangle ECP)} \cdot \frac{S(\triangle EBP)}{S(\triangle DBP)} \cdot \frac{S(\triangle ADP)}{S(\triangle ACP)} \cdot \frac{S(\triangle CEP)}{S(\triangle BEP)} \cdot \frac{S(\triangle BDP)}{S(\triangle ADP)} = 1$$

נראה עתה את הכיוון ההפוך:

נניח שמתקיים השוויון:

$$(10) \quad \frac{AH}{HE} \cdot \frac{EG}{GD} \cdot \frac{DF}{FC} \cdot \frac{CJ}{JB} \cdot \frac{BI}{IA} = 1$$

ונראה שהישרים AF, BG, CH, DI, EJ נחתכים בנקודה אחת.

נסמן ב- P את נקודת החיתוך של AF, BG, CH, DI , ונשרטט ישר EP עד לנקודת החיתוך שלו עם BC , בנקודה J' (ר' שרטוט מס' 8). לכן, ממה שהוכחנו כבר

$$(11) \quad \frac{AH}{HE} \cdot \frac{EG}{GD} \cdot \frac{DF}{FC} \cdot \frac{CJ'}{J'B} \cdot \frac{BI}{IA} = 1 \quad \text{נובע ש:}$$

מתוך (10) ו- (11) נקבל:

$$(12) \quad \frac{AH}{HE} \cdot \frac{EG}{GD} \cdot \frac{DF}{FC} \cdot \frac{CJ}{JB} \cdot \frac{BI}{IA} = \frac{AH}{HE} \cdot \frac{EG}{GD} \cdot \frac{DF}{FC} \cdot \frac{CJ'}{J'B} \cdot \frac{BI}{IA}$$

מכאן נובע:

$$\frac{CJ}{JB} = \frac{CJ'}{J'B} \Rightarrow \frac{CJ}{JB} + 1 = \frac{CJ'}{J'B} + 1 \Rightarrow \frac{CJ + JB}{JB} = \frac{CJ' + J'B}{J'B} \Rightarrow \frac{CB}{JB} = \frac{CB}{J'B} \Rightarrow JB = J'B$$

כלומר, J ו- J' הן אותה הנקודה. מ.ש.ל.

"תיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים שווים שטח". במשפט זה הנתונים מצביעים על כך שחילקנו צלע כלשהי במשולש לשני חלקים שווים. כלומר, בהתאם לסימונים של שרטוט 1, היחס בין אורכי הקטעים שיוצר התיכון הוא 1 $\left(\frac{BD}{DC}=1\right)$, וכתוצאה מכך קבלנו שני משולשים שהיחס בין שטחיהם גם הוא 1 $\left(\frac{S(\Delta ABD)}{S(\Delta ACD)}=1\right)$. אבל מובן שמשפט

זה הוא רק מקרה פרטי של אפשרויות שונות לחלוקת הצלע BC לשני חלקים. שכן, אם נחלק את הצלע כך שיתקבל: $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$, הרי שגם: $\frac{S(\Delta ABD)}{S(\Delta ACD)} = \frac{m}{n}$.

דוגמא מוכרת נוספת היא משפט פיתגורס. בהתאם למשפט, סכום שטחי ריבועים הבנויים על ניצביו של משולש ישר זווית שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר. מקרה זה הינו מקרה פרטי של המשפט הרחב יותר שבו בונים על הניצבים מצולעים משוכללים אחרים, שכל אחד מהם בעל אותו מספר צלעות. לדעתנו, הרבה יותר מעניין להבין או לזהות תופעה שניתנת להכללה, ומתוכה לבחון מקרים פרטיים מעניינים, מאשר להסתפק במקרים הפרטיים. לכן, חשוב שכמורים נהיה ערים לתופעה זו, ונסייע לתלמידים שלנו לפתח את יכולתם לצאת מתוך מקרים פרטיים ולהיות מסוגלים למצוא הכללה שלהם.

מקורות

את משפט צ'בה המקורי והוכחותיו ניתן למצוא באתר:

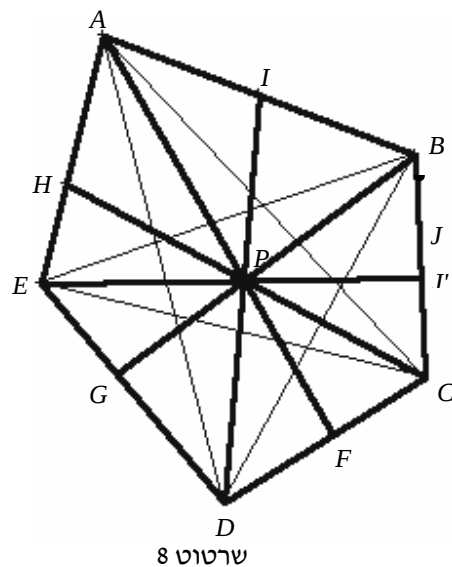
<http://www.cut-the-knot.org/Generalization/ceva.shtml>

מידע נוסף על צ'בה וחיייו ניתן למצוא באתר:

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Ceva_Giovanni.html

שריקי ע. (2004). להיות מתמטיקאי אמיתי – כל אחד יכול!, על"ה – עלון למורי המתמטיקה, 31, עמ' 4-13

ה'דעת?
לישרים במשולש המאחזרים קדקוד
עם נקודה על הצלע הנגדית
מקובל לקרוא בשם
"צ'ביאנס" (Cevians).



קל לראות שרעיון ההוכחה ניתן להכללה עבור כל מצולע בעל מספר אי-זוגי של צלעות, ומכאן ניתן לנסח את המשפט הכללי:

נתון מצולע בעל n צלעות, כאשר n מספר אי-זוגי. נסמן את קדקודיו באמצעות $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. על כל אחת מהצלעות נסמן נקודה B_i , כך ש- B_1 מונחת על הצלע A_1A_2 ; B_2 מונחת על הצלע A_2A_3 , וכן הלאה, עד ל- B_n המונחת על הצלע A_nA_1 .

n הצ'ביאנסים² של המצולע נפגשים בנקודה אחת, אם

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_nB_n}{B_nA_1} = 1$$

ורק אם:

4. סיכום

לעיתים קרובות אנחנו פוגשים מקרים פרטיים של טענות שניתנות להכללה, מבלי להיות מודעים לכך שניתן להכלילם. לכן, מעניין לבחון טענות מתמטיות מתוך ניסיון למצוא איזה מבין הנתונים שלה מהווים דוגמאות למקרים פרטיים. בגיליונות על"ה ניתן למצוא דוגמאות אחדות לכך (למשל, שריקי, 2004).

בתוכנית הלימודים קיימים משפטים רבים שאנו מציגים בפני התלמידים מבלי לתת את הדעת לכך שהם מהווים מקרים פרטיים. נציין, לדוגמא, את המשפט:

² כזכור, הצלע הנגדית לקדקוד A_i היא הצלע שבין הקדקודים הסמוכים שמספריהם $(i + \frac{n-1}{2})_{\text{mod}(n)}$ ו- $(i + \frac{n+1}{2})_{\text{mod}(n)}$.